Enseignants: Dubuis, Favi, Friedli
Analyse A - MAN
24 juin 2024
Durée : 150 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 13 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 40 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons sont à rendre mais ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\,\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (3 points)
L'unique solution $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ de l'équation

$$\cos(2x - \tfrac{\pi}{4}) + \sqrt{3}\sin(\tfrac{\pi}{4} - 2x) = 1$$

est

- ☐ $x = \dfrac{-5\pi}{24}$
- ☐ $x = \dfrac{-\pi}{12}$
- ☐ $x = \dfrac{-\pi}{24}$
- ☐ $x = \dfrac{-7\pi}{24}$
- ☐ $x = \dfrac{-7\pi}{12}$
- ☐ $x = \dfrac{-\pi}{4}$
- ☐ $x = \dfrac{-5\pi}{12}$
- ☐ $x = \dfrac{-3\pi}{8}$

Correction : L'équation est équivalente à $\cos(2x + \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}$ dont les solutions sont données par $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{-5\pi}{24} + k\pi$. La solution dans l'intervalle demandé est donc $-5\pi/24$.

Question 2 (3 points)
Soit S l'ensemble solution de l'inéquation

$$\tan(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x \in [0, \pi]\,.$$

Alors S est

- ☐ une union de 6 intervalles disjoints.
- ☐ un intervalle.
- ☐ une union de 2 intervalles disjoints.
- ☐ une union de 5 intervalles disjoints.
- ☐ une union de 4 intervalles disjoints.
- ☐ une union de 3 intervalles disjoints.

Correction : Les solutions de $\tan(2x) \leq \sqrt{3}/3$ sont $-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.
$S = [0, \pi/12] \cup]\pi/4, 7\pi/12] \cup]3\pi/4, \pi]$.

Question 3 (2 points)
Le nombre $\alpha = \arctan(-\frac{1}{2}) + \arctan(-\frac{1}{3})$ est égal à

- ☐ $\frac{\pi}{4}$
- ☐ $\frac{5\pi}{4}$
- ☐ $-\frac{\pi}{4}$
- ☐ $\frac{3\pi}{4}$

Correction : On utilise la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ avec $a = \arctan(-\frac{1}{2})$ et $b = \arctan(-\frac{1}{3})$ on trouve $\tan(\alpha) = -1$. Comme on localise $\alpha \in]-\pi, 0[$ il en résulte que $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

Question 4 (3 points)
Soit $m > 0$ un paramètre. Donner l'ensemble solution $S \subset \mathbb{R}$, en fonction de m, de l'inéquation

$$\sqrt{(x-m)(x+m)} < \sqrt{8}m.$$

- ☐ $S =]-3m, -m] \cup [m, 3m[$
- ☐ $S =]-3m, 3m[$
- ☐ $S =]-\sqrt{3}m, -m] \cup [m, \sqrt{3}m[$
- ☐ $S = [m, 3m[$

Correction : Domaine de définition: le membre de gauche est défini $\iff x \notin]-m, m[$.
Donc $D_{def} =]-\infty, -m] \cup [m, +\infty[$.
Sous la condition $x \in D_{def}$ on peut élever au carré l'inéquation (car $m > 0$ comme donné dans l'énoncé) qui devient:

$$(x-m)(x+m) < 8m^2 \iff x^2 - m^2 < 8m^2 \iff x^2 - 9m^2 < 0.$$

Or $x^2 - 9m^2 = (x-3m)(x+3m)$ *et donc*

$$S =]-3m, 3m[\cap D_{def} =]-3m, -m] \cup [m, 3m[,$$

Question 5 (3 points)
L'ensemble solution S de l'inéquation

$$|1-x| \leq 2 - |x| \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

est

☐ $S = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ☐ $S = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ☐ $S = [0, \frac{4}{5}]$ ☐ $S = [-1, \frac{3}{2}]$

Correction : On doit résoudre (a) : $1 - x \leq 2 - |x| \iff |x| \leq 1 + x$ *et* $(b) 1 - x \geq -2 + |x| \iff |x| \leq 3 - x$*. On applique à nouveau le théorème pour résoudre (a.1)* $x \leq 1 + x$ *et (a.2)* $x \geq -1 - x$ *et (b.1)* $x \leq 3 - x$ *et (b.2)* $x \geq x - 3$*. On doit donc intersecter* $\mathbb{R} \cap [-\frac{1}{2}, +\infty[\cap]-\infty, \frac{3}{2}] \cap \mathbb{R} = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Question 6 (2 points)
On considère l'affirmation A: "pour tout réel $x > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{m} \leq x$".
La négation de A est

☐ "il existe $x > 0$ tel que $x < \frac{1}{m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$"
☐ "il n'existe aucun $x \leq 0$ tel que $x \leq \frac{1}{m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$"
☐ "il existe $x \leq 0$ tel que $x < \frac{1}{m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$"
☐ "il existe $x > 0$ tel que $x \geq \frac{1}{m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$"

Correction : On applique les règles de négations des opérateurs logiques "il existe" et "pour tout".

Question 7 (2 points)
Soit $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \in \mathbb{C}$. Alors z^8 est égal à

☐ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ☐ $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
☐ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

Correction : Sous forme polaire, on a $z = [1, \frac{-\pi}{6}]$ *d'où* $z^8 = [1, -\frac{4\pi}{3}]$.

Question 8 (2 points)
Soit $a > 0$. Alors pour tout $x > 0$, l'expression $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ est égale à

☐ $-\log_a(\frac{1}{x})$ ☐ $\log_a(-\frac{1}{x})$ ☐ $\log_{\frac{1}{a}}(\frac{1}{x})$ ☐ $\log_a(\frac{1}{x})$

Correction : On a $\log_{1/a}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1/a)} = -\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(1/x)}{\ln(a)} = \log_a(1/x)$.

Question 9 (3 points)
Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 1$, le sommet de la parabole d'équation

$$P(x) = (1-m)x^2 + 2mx + 1$$

est-il strictement à gauche de la droite verticale d'équation $x = -1$?

☐ $m \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. ☐ $m \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.
☐ $m \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. ☐ $m \in]-1, 1[$.
☐ $m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. ☐ $m \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$.

Correction : L'abcisse du sommet est en $x_S = \frac{-2m}{2(1-m)} = \frac{m}{m-1}$*. On résout* $\frac{m}{m-1} < -1 \iff$

$\frac{2m-1}{m-1} < 0 \iff m \in]1/2, 1[.$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 10: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$S_n = 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + ... + (2n)^3.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$S_n = 2n^2(n+1)^2.$$

Question 11: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Soit $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.

(a) Calculer $P(i)$.

(b) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

(c) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[x]$.

Question 12: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Dans le plan complexe, on donne $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = 2 + i$. Calculer z_3 et z_4 pour que le triangle $z_2 z_3 z_4$ soit tel que

- $|z_4 - z_2| = |z_3 - z_2| = 2\sqrt{2}|z_1 - z_2|$,
- l'angle au sommet z_2 est droit,
- la droite passant par z_1 et z_2 est la bissectrice de l'angle au sommet z_2,
- $\mathrm{Im}(z_4) < 0$.

Les points z_3 et z_4 doivent être donnés sous forme cartésienne, et ne doivent pas contenir de fonctions trigonométriques.

Question 13: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Résoudre l'inéquation suivante par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{-3\frac{x}{2}} - e^{-2\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \leq \ln(e^3)e^{-\frac{x}{2}}.$$