

**EPFL****1****Enseignants: Dubuis, Favi, Friedli****Analyse A - MAN****24 juin 2024****Durée : 150 minutes**

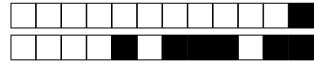
# Robin des Bois

**SCIPER : 999999**

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 13 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 40 points. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :  
les points indiqués si la réponse est correcte,  
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,  
0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons sont à rendre mais ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire   what should NOT be done   was man NICHT tun sollte		



## Quelques formules de trigonométrie

### Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

### Formules de bisection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

### Formules de transformation produit-somme :

$$\begin{aligned}\cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)] \\ \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]\end{aligned}$$

### Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

### Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ :

$$\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \tan x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$



## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

### Question 1 (3 points)

L'unique solution  $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$  de l'équation

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 1$$

est

- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> $x = \frac{-5\pi}{24}$ | <input type="checkbox"/> $x = \frac{-\pi}{12}$ | <input type="checkbox"/> $x = \frac{-\pi}{24}$  | <input type="checkbox"/> $x = \frac{-7\pi}{24}$ |
| <input type="checkbox"/> $x = \frac{-7\pi}{12}$ | <input type="checkbox"/> $x = \frac{-\pi}{4}$  | <input type="checkbox"/> $x = \frac{-5\pi}{12}$ | <input type="checkbox"/> $x = \frac{-3\pi}{8}$  |

*Correction : L'équation est équivalente à  $\cos(2x + \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}$  dont les solutions sont données par  $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$  ou  $x = \frac{-5\pi}{24} + k\pi$ . La solution dans l'intervalle demandé est donc  $-5\pi/24$ .*

### Question 2 (3 points)

Soit  $S$  l'ensemble solution de l'inéquation

$$\tan(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x \in [0, \pi].$$

Alors  $S$  est

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> une union de 6 intervalles disjoints. | <input type="checkbox"/> un intervalle.                        |
| <input type="checkbox"/> une union de 2 intervalles disjoints. | <input type="checkbox"/> une union de 5 intervalles disjoints. |
| <input type="checkbox"/> une union de 4 intervalles disjoints. | <input type="checkbox"/> une union de 3 intervalles disjoints. |

*Correction : Les solutions de  $\tan(2x) \leq \sqrt{3}/3$  sont  $-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ .*

$$S = [0, \pi/12] \cup [\pi/4, 7\pi/12] \cup [3\pi/4, \pi].$$

### Question 3 (2 points)

Le nombre  $\alpha = \arctan(-\frac{1}{2}) + \arctan(-\frac{1}{3})$  est égal à

- |  |   |   |   |
|--|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\frac{\pi}{4}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{5\pi}{4}$ | <input type="checkbox"/> $-\frac{\pi}{4}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{3\pi}{4}$ |
|--|---|---|---|

*Correction : On utilise la formule  $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$  avec  $a = \arctan(-\frac{1}{2})$  et  $b = \arctan(-\frac{1}{3})$  on trouve  $\tan(\alpha) = -1$ . Comme on localise  $\alpha \in ]-\pi, 0[$  il en résulte que  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ .*

### Question 4 (3 points)

Soit  $m > 0$  un paramètre. Donner l'ensemble solution  $S \subset \mathbb{R}$ , en fonction de  $m$ , de l'inéquation

$$\sqrt{(x - m)(x + m)} < \sqrt{8}m.$$

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $S = ]-3m, -m] \cup [m, 3m[$               | <input type="checkbox"/> $S = ]-3m, 3m[$ |
| <input type="checkbox"/> $S = ]-\sqrt{3}m, -m] \cup [m, \sqrt{3}m[$ | <input type="checkbox"/> $S = [m, 3m[$   |

*Correction : Domaine de définition: le membre de gauche est défini  $\iff x \notin ]-m, m[$ .*

*Donc  $D_{def} = ]-\infty, -m] \cup [m, +\infty[$ .*

*Sous la condition  $x \in D_{def}$  on peut éléver au carré l'inéquation (car  $m > 0$  comme donné dans l'énoncé) qui devient:*

$$(x - m)(x + m) < 8m^2 \iff x^2 - m^2 < 8m^2 \iff x^2 - 9m^2 < 0.$$



Or  $x^2 - 9m^2 = (x - 3m)(x + 3m)$  et donc

$$S = ]-3m, 3m] \cap D_{def} = ]-3m, -m] \cup [m, 3m[,$$

**Question 5** (3 points)

L'ensemble solution  $S$  de l'inéquation

$$|1 - x| \leq 2 - |x| \quad x \in \mathbb{R},$$

est

- $S = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$         $S = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$         $S = [0, \frac{4}{5}]$         $S = [-1, \frac{3}{2}]$

*Correction : On doit résoudre (a) :  $1 - x \leq 2 - |x| \iff |x| \leq 1 + x$  et (b)  $1 - x \geq -2 + |x| \iff |x| \leq 3 - x$ . On applique à nouveau le théorème pour résoudre (a.1)  $x \leq 1 + x$  et (a.2)  $x \geq -1 - x$  et (b.1)  $x \leq 3 - x$  et (b.2)  $x \geq x - 3$ . On doit donc inter-secter  $\mathbb{R} \cap [-\frac{1}{2}, +\infty[ \cap ]-\infty, \frac{3}{2}] \cap \mathbb{R} = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ .*

**Question 6** (2 points)

On considère l'affirmation  $A$ : "pour tout réel  $x > 0$ , il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{m} \leq x$ ".

La négation de  $A$  est

- "il existe  $x > 0$  tel que  $x < \frac{1}{m}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ "  
 "il n'existe aucun  $x \leq 0$  tel que  $x \leq \frac{1}{m}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ "  
 "il existe  $x \leq 0$  tel que  $x < \frac{1}{m}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ "  
 "il existe  $x > 0$  tel que  $x \geq \frac{1}{m}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ "

*Correction : On applique les règles de négations des opérateurs logiques "il existe" et "pour tout".*

**Question 7** (2 points)

Soit  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \in \mathbb{C}$ . Alors  $z^8$  est égal à

- $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$         $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$         $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$         $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$   
  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$         $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$         $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$         $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

*Correction : Sous forme polaire, on a  $z = [1, -\frac{\pi}{6}]$  d'où  $z^8 = [1, -\frac{4\pi}{3}]$ .*

**Question 8** (2 points)

Soit  $a > 0$ . Alors pour tout  $x > 0$ , l'expression  $\log_{\frac{1}{a}}(x)$  est égale à

- $-\log_a(\frac{1}{x})$         $\log_a(-\frac{1}{x})$         $\log_{\frac{1}{a}}(\frac{1}{x})$         $\log_a(\frac{1}{x})$

*Correction : On a  $\log_{1/a}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1/a)} = -\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(1/x)}{\ln(a)} = \log_a(1/x)$ .*

**Question 9** (3 points)

Pour quelles valeurs de  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 1$ , le sommet de la parabole d'équation

$$P(x) = (1 - m)x^2 + 2mx + 1$$

est-il strictement à gauche de la droite verticale d'équation  $x = -1$  ?

- $m \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$ .        $m \in ]-\infty, \frac{1}{2}[$ .  
  $m \in ]\frac{1}{2}, 1[$ .        $m \in ]-1, 1[$ .  
  $m \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ .        $m \in ]-\infty, \frac{1}{2}[ \cup ]1, +\infty[$ .

*Correction : L'abscisse du sommet est en  $x_S = \frac{-2m}{2(1-m)} = \frac{m}{m-1}$ . On résout  $\frac{m}{m-1} < -1 \iff$*





## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

**Question 10:** *Cette question est notée sur 3 points.*

<sub>0</sub>     <sub>1</sub>     <sub>2</sub>     <sub>3</sub>

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit

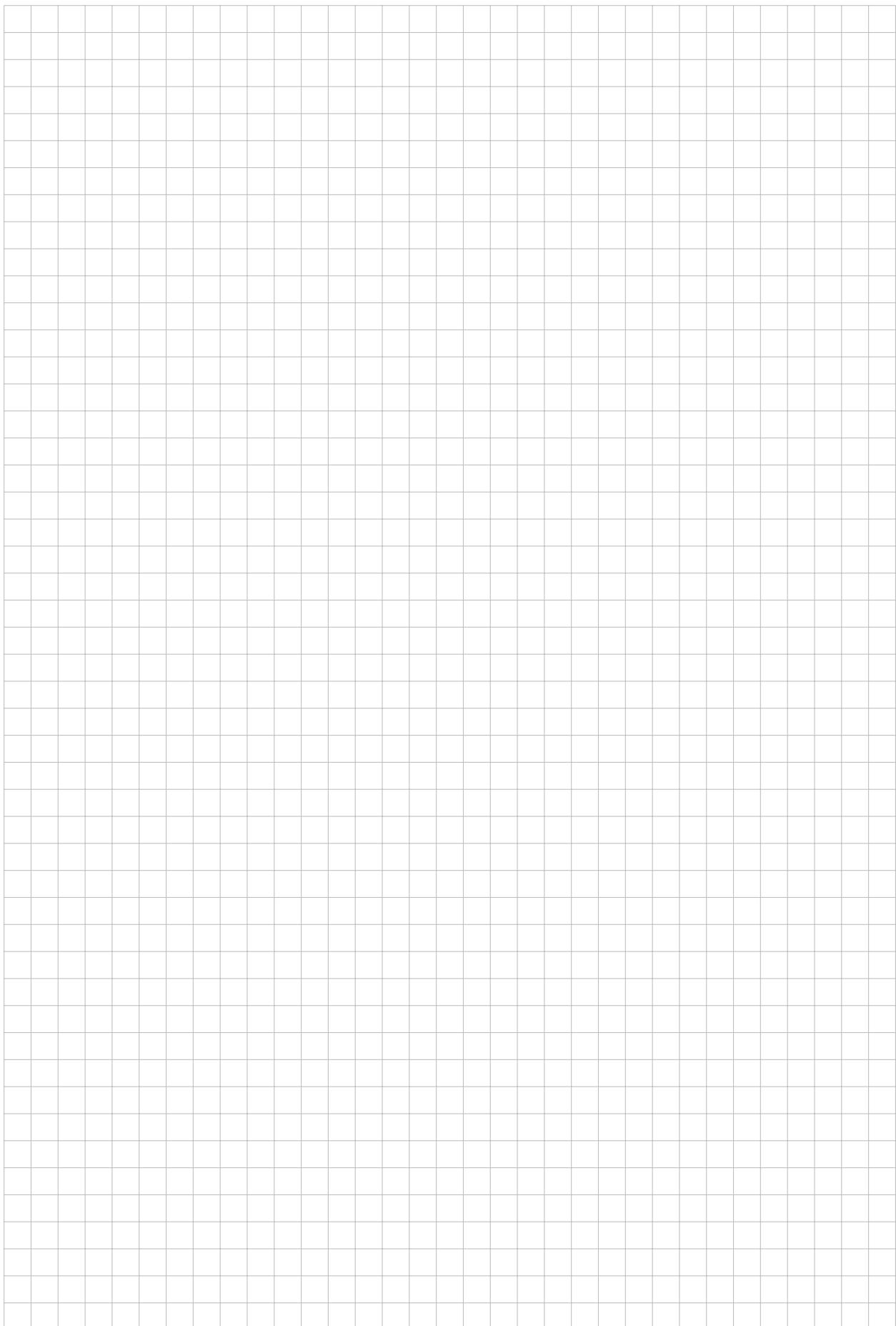
$$S_n = 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \dots + (2n)^3.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$S_n = 2n^2(n + 1)^2.$$



+1/7/54+



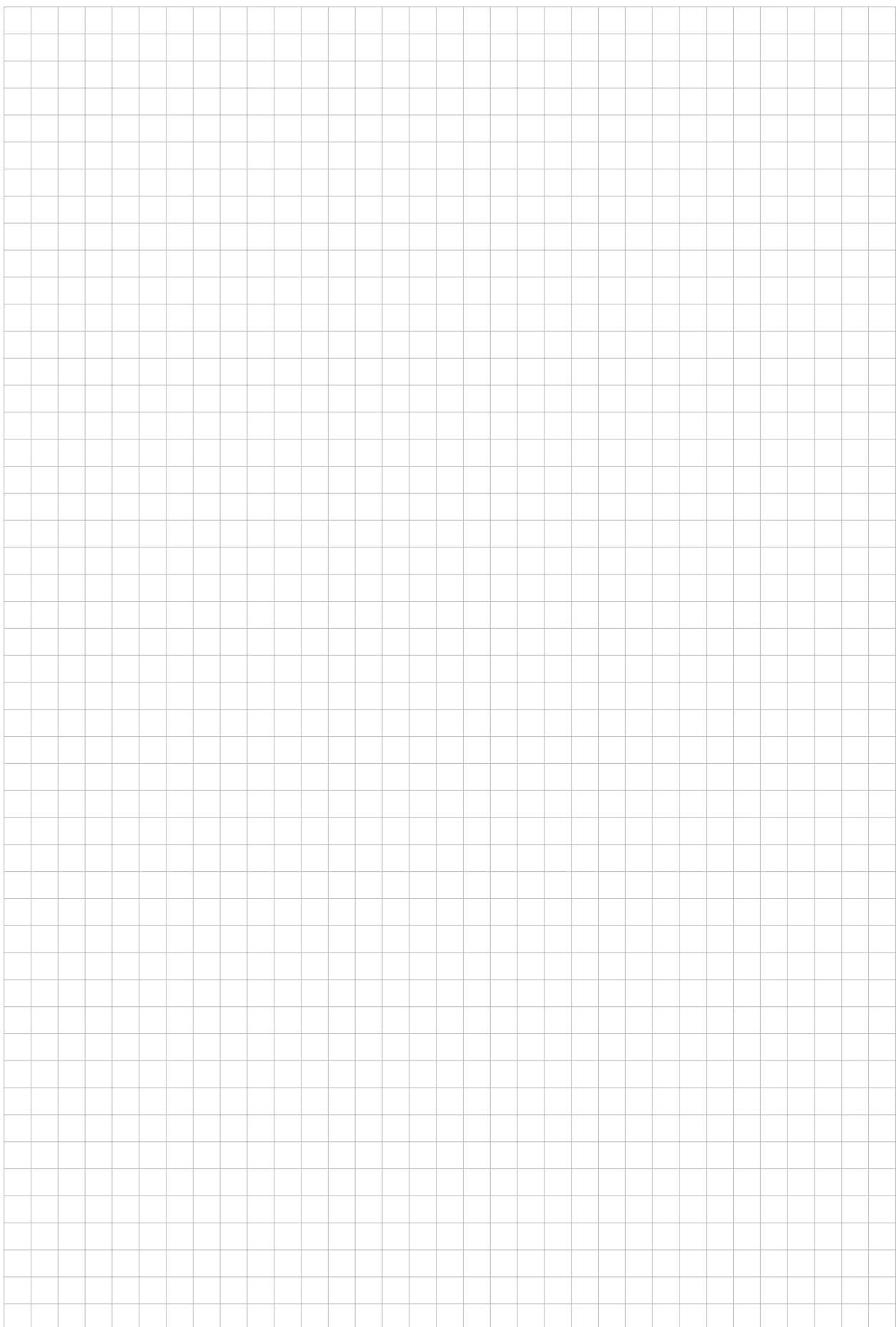
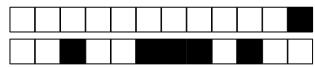


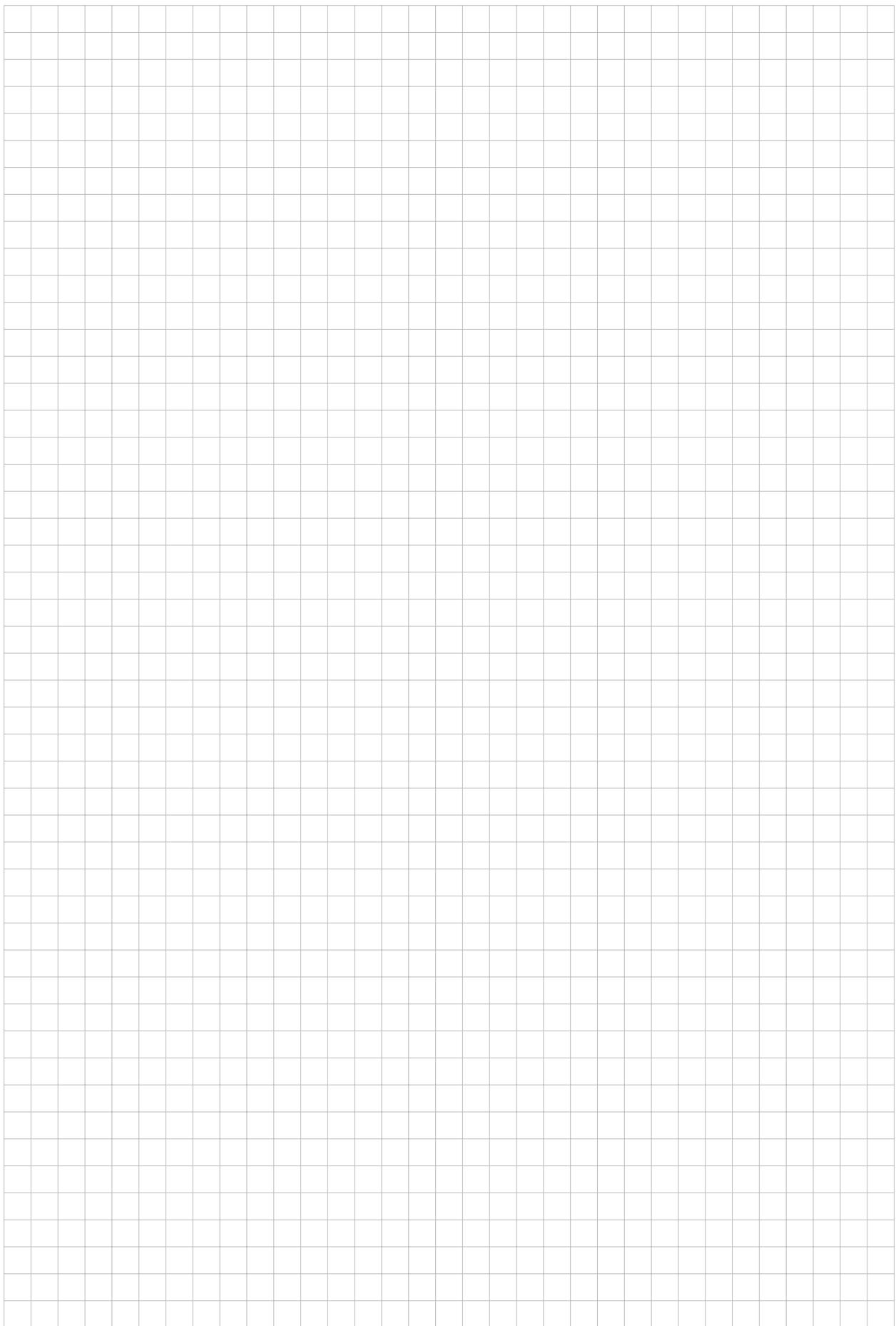
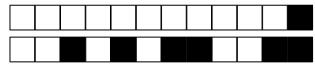
**Question 11:** Cette question est notée sur 5 points.

0     1     2     3     4     5

Soit  $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ .

- (a) Calculer  $P(i)$ .
- (b) Décomposer  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[x]$ .
- (c) Décomposer  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[x]$ .







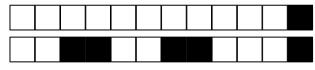
**Question 12:** Cette question est notée sur 4 points.

0     1     2     3     4

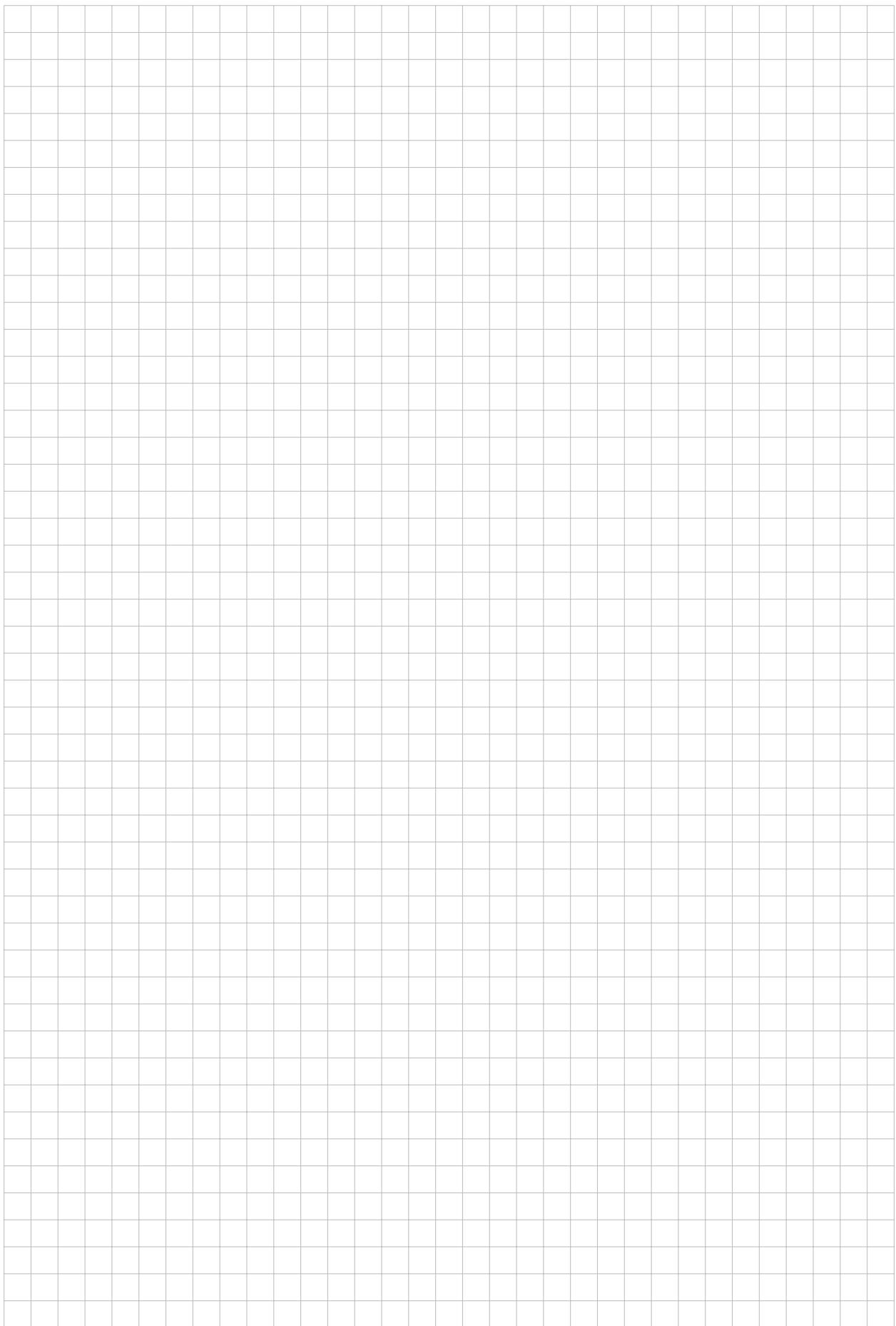
Dans le plan complexe, on donne  $z_1 = -1 - i$  et  $z_2 = 2 + i$ . Calculer  $z_3$  et  $z_4$  pour que le triangle  $z_2 z_3 z_4$  soit tel que

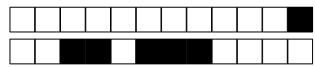
- $|z_4 - z_2| = |z_3 - z_2| = 2\sqrt{2}|z_1 - z_2|$ ,
- l'angle au sommet  $z_2$  est droit,
- la droite passant par  $z_1$  et  $z_2$  est la bissectrice de l'angle au sommet  $z_2$ ,
- $\operatorname{Im}(z_4) < 0$ .

Les points  $z_3$  et  $z_4$  doivent être donnés sous forme cartésienne, et ne doivent pas contenir de fonctions trigonométriques.

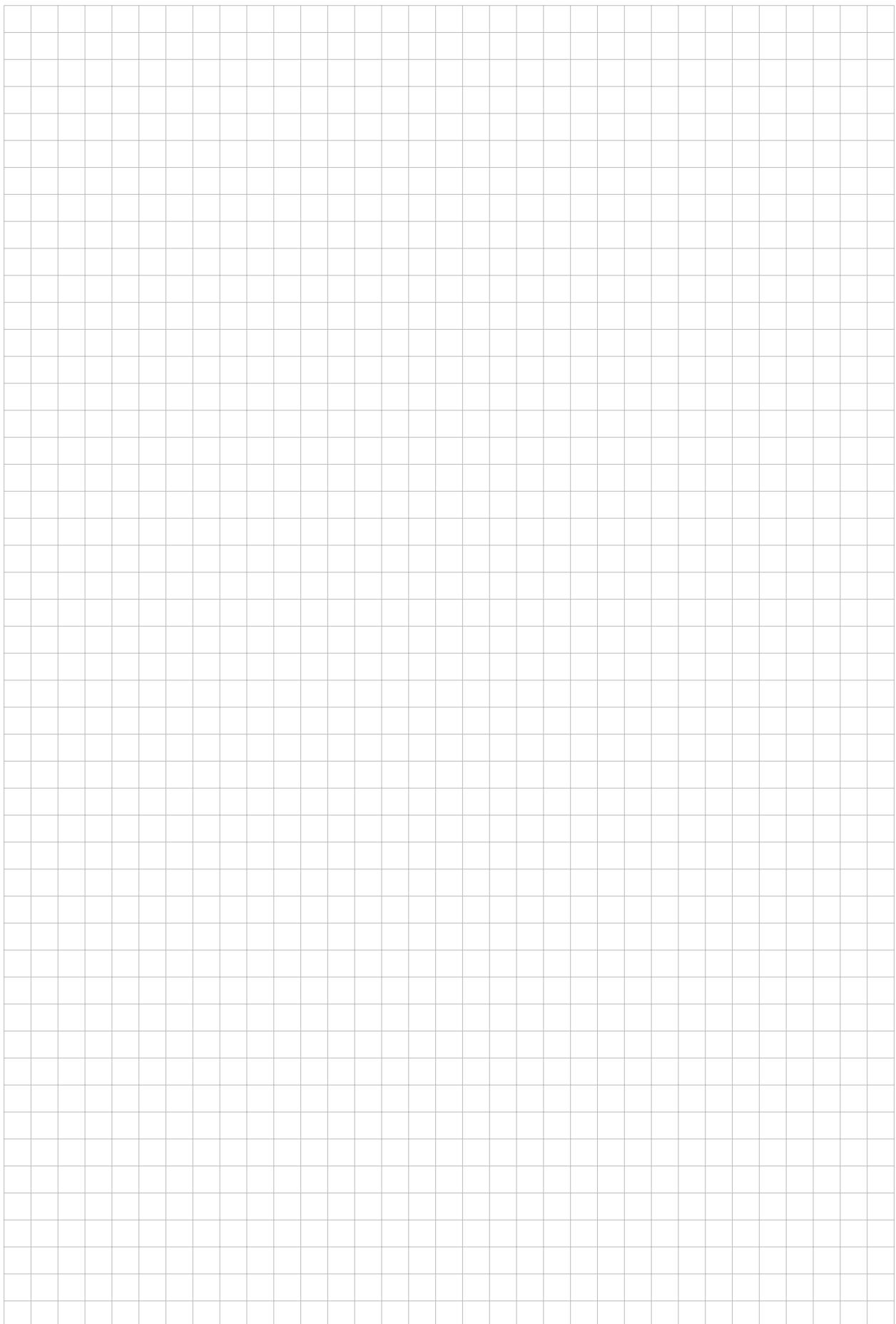


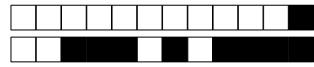
+1/12/49+





+1/13/48+



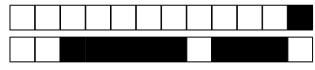


**Question 13:** Cette question est notée sur 5 points.

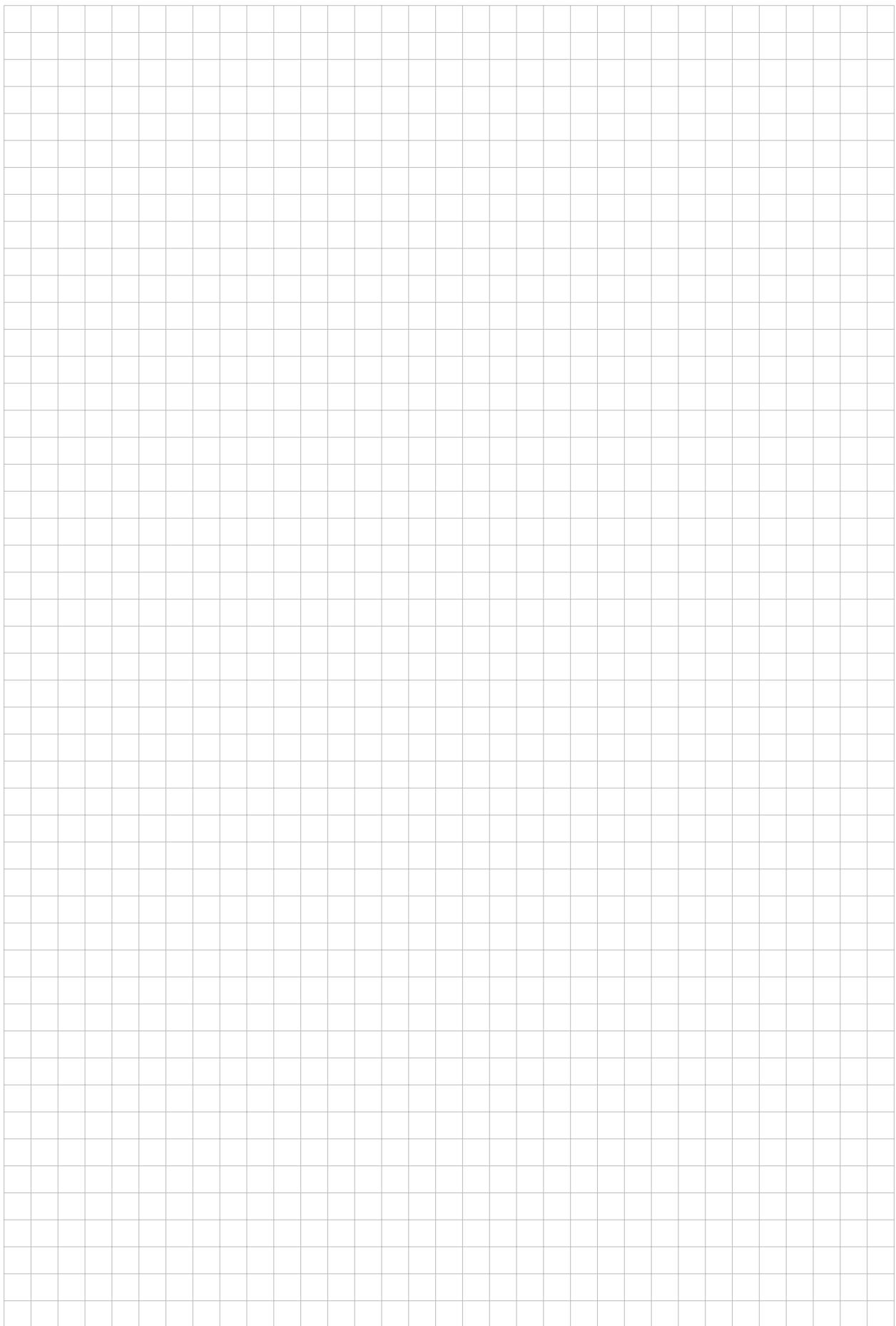
- 0    1    2    3    4    5

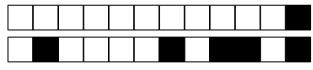
Résoudre l'inéquation suivante par rapport à  $x \in \mathbb{R}$  :

$$e^{-3\frac{x}{2}} - e^{-2\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \leq \ln(e^3)e^{-\frac{x}{2}}.$$



+1/15/46+





+1/16/45+

