EPFL

1

Enseignant·es: Dubuis, Favi, Friedli
Analyse A - CMS
28 juin 2023
Durée : 150 minutes

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 questions et 20 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons sont à rendre mais ne seront pas corrigés.

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\,\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$ **:**

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question. Une bonne réponse vaut le nombre de points indiqués. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou aucune réponse vaut 0 point. Il n'y a pas de points négatifs.

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

On énonce la proposition suivante :

$$T : \forall x, y \in \mathbb{R}, (x > 0 \text{ et } y > 0) \Rightarrow xy > 0.$$

Question 1 (2 points)
Parmi les propositions suivantes, laquelle est la contraposée de T ?

- ☐ $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq 0 \text{ et } y \leq 0) \Rightarrow xy \leq 0$.
- ■ $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy \leq 0 \Rightarrow (x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0)$.
- ☐ $\exists x, y \in \mathbb{R}, (x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0) \text{ et } xy \leq 0$.
- ☐ $\exists x, y \in \mathbb{R}, xy \leq 0 \text{ et } (x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0)$.

Correction : La contraposée de $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $\forall x \in E, nonQ(x) \Rightarrow nonP(x)$. La négation du "ou" est le "et".

Question 2 (2 points)
Parmi les propositions suivantes, laquelle est la négation de T ?

- ■ $\exists x, y \in \mathbb{R}, (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ et } xy \leq 0$.
- ☐ $\exists x, y \in \mathbb{R}, (x \leq 0 \text{ et } y \leq 0) \text{ et } xy \leq 0$.
- ☐ $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0) \Rightarrow xy \leq 0$.
- ☐ $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0) \text{ et } xy < 0$.

Correction : La négation de $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $\exists x \in E, P(x)$ et $nonQ(x)$.

Question 3
Soit $E \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs du paramètre m pour lesquelles la parabole $y = (m^2+1)x^2 + 2mx$ est strictement au-dessus de la droite $y = x - 1$. Alors

- ☐ $E = \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right[$.
- ☐ $E = \left]-\frac{5}{4}, +\infty\right[$.
- ☐ $E = \left]-\infty, \frac{5}{4}\right[$.
- ■ $E = \left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

Correction : On doit imposer que $(m^2+1)x^2 + (2m-1)x + 1 > 0$ *pour tout* x *ce qui revient à demander que* $\Delta = -4m - 3 < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{4}$, *puisque* $m^2 + 1 > 0$.

Question 4 (2 points)
La valeur exacte de l'angle $\beta = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$ est

- ☐ $\beta = \frac{5\pi}{4}$.
- ☐ $\beta = -\frac{\pi}{4}$.
- ☐ $\beta = -\frac{7\pi}{4}$.
- ■ $\beta = \frac{\pi}{4}$.

Correction : On calcule $\tan(\beta)$ *grâce à la formule* $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$*: On trouve* $\tan(\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$. *De plus on a que* $0 < \arctan(\frac{1}{2}) < \frac{\pi}{4}$ *et* $0 < \arctan(\frac{1}{3}) < \frac{\pi}{4}$ *donc* $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ *et* $\tan(\beta) = 1$ *ce qui montre que* $\beta = \frac{\pi}{4}$.

Question 5 (2 points)
L'ensemble S des solutions de l'inéquation $|x-5| \geq x - 2$ est

- ■ $S = \left]-\infty, \frac{7}{2}\right]$.
- ☐ $S = \mathbb{R}$.
- ☐ $S = \left[2, \frac{7}{2}\right]$.
- ☐ $S = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$.

Correction : On résout la paire d'inéquations : $x - 5 \geq x - 2$ ***ou*** $x - 5 \leq 2 - x$.

Question 6 (2 points)
La valeur de

$$\frac{(2-i)(3+i^2)(4-i^3)}{1+2i+3i^2+4i^3+5i^4}$$

est

- ☐ $\dfrac{31+12i}{13}$.
- ☐ $\dfrac{62+22i}{14}$.
- ■ $\dfrac{62+24i}{13}$.
- ☐ $\dfrac{61+24i}{14}$.

Correction : On calcule en utilisant les valeurs de i^n.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + ... + \frac{n}{2^n}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$.

Solution

L'égalité est vraie pour $n = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$.

Supposons l'égalité vraie pour un certain $n \geq 1$ et montrons que l'égalité est vraie pour $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.$$

On conclut ainsi par le principe de récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

■0 □1 □2 □3 □4 □5

Résoudre l'inéquation suivante par rapport à $x \in \mathbb{R}$ et en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x+m}{2x+m} \leq 2\,.$$

Solution
L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{m}{2}\}$.

En passant tout du même côté,

$$\frac{3x+m}{2x+m} \geq 0\,.$$

Le numérateur change de signe en $-\frac{m}{3}$, et le dénominateur en $-\frac{m}{2}$.

- Si $m > 0$, alors $-\frac{m}{2} < -m/3$ et le tableau des signes donne
  $S = \left]-\infty, -\frac{m}{2}\right[\cup \left[-\frac{m}{3}, +\infty\right[$.

- Si $m < 0$, alors $-\frac{m}{2} > -\frac{m}{3}$ et le tableau des signes donne
  $S = \left]-\infty, -\frac{m}{3}\right] \cup \left]-\frac{m}{2}, +\infty\right[$.

- Si $m = 0$, alors $S = \mathbb{R}^*$.

Question 9: *Cette question est notée sur 3 points.*

■ 0 □ 1 □ 2 □ 3

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Effectuer la division de $P(x)$ par $Q(x) = x + 2$ dans $\mathbb{R}[x]$, et donner le reste.

Solution

Avec le schéma de Hörner:

	1	1	1	1	1
-2		-2	2	-6	10
	1	-1	3	-5	11

On trouve ainsi que $P(x) = S(x)(x+2) + R(x)$ avec $S(x) = x^3 - x^2 + 3x - 5$ et $R(x) = 11 = P(-2)$.

Autre façon de calculer le reste: $R(x) = P(-2) = 16 - 8 + 4 - 2 + 1 = 11$.

Question 10: *Cette question est notée sur 5 points.*

■ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5

Résoudre l'équation suivante par rapport à x sur l'intervalle donné :

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1, \quad x\in[0,2\pi].$$

Solution
Etape 1 : on résout pour $x \in \mathbb{R}$. On pose tout d'abord $y = 2x + \frac{\pi}{3}$ et on résout

$$\cos(y)+\sin(y)=1.$$

En normalisant l'équation, on doit résoudre

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(y)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\Leftrightarrow \sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&\Leftrightarrow y+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \text{ ou } y+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\
&\Leftrightarrow y=k2\pi \text{ ou } y=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{12}+k\pi.
\end{aligned}$$

Etape 2 : on sélectionne les solutions qui appartiennent à $[0,2\pi]$. On a donc

$$S=\left\{\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6},\frac{\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right\}.$$

Alternative : A la première étape résoudre en cosinus et choisir

$$\cos\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Question 11: *Cette question est notée sur 5 points.*

■0 □1 □2 □3 □4 □5

Calculer les racines sixièmes de $\omega = -64\,i$. Pour chaque racine, donner sa forme polaire. Représenter schématiquement ces racines dans le plan complexe en indiquant clairement leur module et leur argument.

Solution

Commençons par exprimer ω sous forme polaire: puisque $|\omega| = 64$ et qu'on peut prendre comme argument le même que celui de $-i$, à savoir $-\frac{\pi}{2}$, on a que

$$\omega = [64\,;\,-\tfrac{\pi}{2}].$$

Par le résultat vu au cours (qui utilise la formule de Moivre), on sait que ω possède exactement 6 racines sixièmes, données par $z^6 = \omega$ et donc en passant par la forme polaire:

$$z^6 = [r,\theta]^6 = [r^6, 6\theta] = \omega = [64\,;\,-\tfrac{\pi}{2}]$$

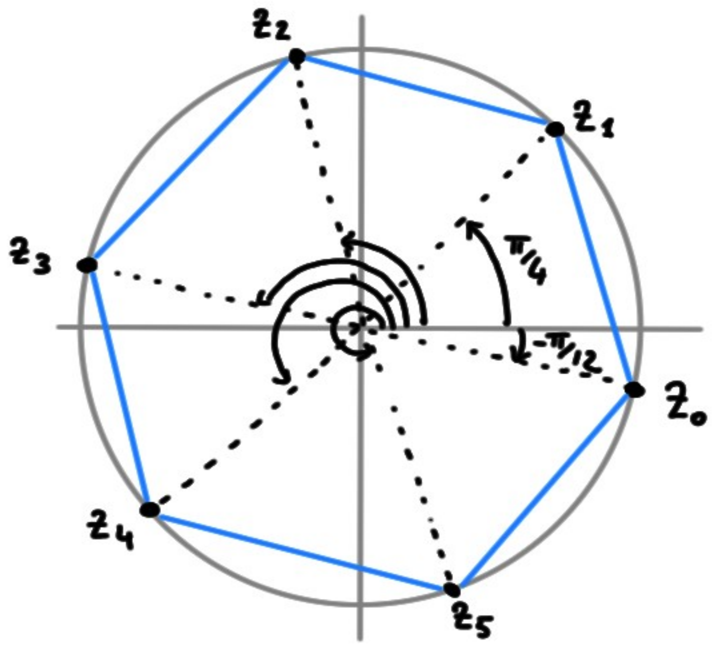
et finalement

$$z_k = \left[\sqrt[6]{64}\,;\,\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}\right] = \left[2\,;\,-\tfrac{\pi}{12}+k\tfrac{\pi}{3}\right]\,,\qquad k = 0,1,2,3,4,5\,.$$

Les 6 racines sont données par

$$\begin{aligned}
z_0 &= \left[2\,;\,-\tfrac{\pi}{12}\right]\\
z_1 &= \left[2\,;\,-\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{\pi}{3}\right] = \left[2\,;\,\tfrac{\pi}{4}\right]\\
z_2 &= \left[2\,;\,-\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{2\pi}{3}\right] = \left[2\,;\,\tfrac{7\pi}{12}\right]\\
z_3 &= \left[2\,;\,-\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{3\pi}{3}\right] = \left[2\,;\,\tfrac{11\pi}{12}\right]\\
z_4 &= \left[2\,;\,-\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{4\pi}{3}\right] = \left[2\,;\,\tfrac{15\pi}{12}\right]\\
z_5 &= \left[2\,;\,-\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{5\pi}{3}\right] = \left[2\,;\,\tfrac{19\pi}{12}\right]\,.
\end{aligned}$$

Ces points sont tous sur le cercle de rayon 2 centré à l'origine, aux sommets d'un hexagone régulier:



Question 12: *Cette question est notée sur 6 points.*

☒ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation

$$2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+3) \geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{6}\right) - \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{1+x}\right).$$

Solution
Etape 1 : on établit d'abord le domaine de définition. On doit satisfaire :

- $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
- $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$
- $\frac{x}{6} > 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $\frac{3}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

D'où $D_{def} =]2, +\infty[$.
Etape 2 : on résout sur D_{def} en utilisant les propriétés du logarithme :

$$\begin{aligned}
&2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+3) \geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{6}\right) - \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{1+x}\right) \\
&\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\right) + \log_{\frac{1}{3}}((x-2)(x+3)) \geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{6}\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+1}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}(x-2)(x+3)\right) \geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{18}x(x+1)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\log_{\frac{1}{3}}$ est décroissant (ou en appliquant l'exponentielle de base $\frac{1}{3}$ de chaque côté) on obtient finalement

$$\begin{aligned}
&\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}(x-2)(x+3)\right) \geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{18}x(x+1)\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{9}(x-2)(x+3) \leq \frac{1}{18}x(x+1) \\
&\Leftrightarrow 2(x-2)(x+3) - x(x+1) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + x - 12 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow (x-3)(x+4) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow x \in [-4, 3].
\end{aligned}$$

En intersectant avec D_{def}, on trouve finalement l'ensemble solution

$$S =]2, 3].$$