Enseignants: Candil, Dubuis, Friedli
Analyse A - MAN
27 juin 2022
Durée : 150 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\, \cos y + \cos x\, \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\, \tan y}$$

Formules de duplication :

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1.$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\,\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Première partie, questions à choix multiples

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.
Une bonne réponse vaut le nombre de points indiqués. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou aucune réponse 0 point. Il n'y a pas de points négatifs.

Question 1 (2 points)
Soit un référentiel E sur lequel sont définies trois propriétés P, Q et R. Soit T la proposition définie par

$$T : \forall x \in E, P(x) \Rightarrow (Q(x) \text{ ou } R(x)).$$

Parmi les propositions ci-dessous, laquelle correspond à la contraposée de T ?

- ☐ $\exists x \in E, (\text{non } Q(x) \text{ et non } R(x)) \Rightarrow \text{non } P(x)$
- ☐ $\exists x \in E, \text{non } P(x) \text{ et } (\text{non } Q(x) \text{ et non } R(x))$
- ■ $\forall x \in E, (\text{non } Q(x) \text{ et non } R(x)) \Rightarrow \text{non } P(x)$
- ☐ $\forall x \in E, (Q(x) \text{ ou } R(x)) \Rightarrow P(x)$

Question 2 (2 points)
Soit un référentiel E sur lequel sont définies deux propriétés P et Q. Soit T la proposition définie par

$$T : \forall x \in E, \exists y \in E, P(x) \Leftrightarrow Q(y).$$

Parmi les propositions ci-dessous laquelle correspond à la négation de T ?

- ☐ $\exists x \in E, \forall y \in E, \text{non } P(x) \Leftrightarrow \text{ non } Q(y)$
- ■ $\exists x \in E, \forall y \in E, (P(x) \text{ et non } Q(y)) \text{ ou } (\text{non } P(x) \text{ et } Q(y))$
- ☐ $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x) \text{ et non } Q(y)$
- ☐ $\forall y \in E, \exists x \in E, \text{non } Q(y) \Leftrightarrow \text{ non } P(x)$

Question 3 (2 points)
Soit le polynôme $Q(z) = \dfrac{1}{4}z^2 - (m+2)z + 7 + 2m^2$ où $m \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de m le polynôme Q admet-il deux racines réelles distinctes ?

- ■ $m \in]1, 3[$.
- ☐ $m \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.
- ☐ $m \in]-3, -1[$.
- ☐ $m \in]-\infty, -1[\cup]-3, +\infty[$.

Question 4 (3 points)
Le polynôme $P(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4$ possède

- ☐ trois racines réelles et une racine complexe.
- ☐ deux racines réelles doubles.
- ☐ deux racines réelles distinctes et deux racines complexes conjuguées.
- ■ une racine réelle double et deux racines complexes conjuguées.

Deuxième partie, Vrai ou faux

Répondre par vrai ou faux. Une bonne réponse vaut +1 point, une mauvaise -1 point, aucune réponse 0 point.

Question 5 Soit $a > 0, a \neq 1$, un nombre réel. L'équation

$$a^{2x} + \frac{1}{2}a^x - \frac{1}{2} = 0$$

possède une unique solution $x \in \mathbb{R}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 6 La fonction $f(x) = \ln\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{1+x}}{x^2+1}\right)\right)$ est bien définie en $x = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 7 Si $x = \dfrac{-2\pi}{15}$, alors

$$\arcsin\left(\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 5x - \frac{\pi}{3}.$$

☐ VRAI ■ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 8: *Cette question est notée sur 3 points.*

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

Montrer par récurrence que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout entier $n \geq 4$:

$$3^n \geq 4n(n+1).$$

Solution
Phase d'initialisation . Pour $n = 4$, on obtient

$$3^4 = 81 \geq 80 = 4 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4.$$

Pas de récurrence . Supposons que l'inégalité est vraie pour un certain entier $n \geq 4$, et montrons qu'elle est encore vraie pour $n+1$:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \geq 3 \cdot 4n(n+1) \\ &= 4(n+1)(3n) \geq 4(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

La dernière inégalité, $3n \geq n+2$, est vraie pour tout $n \geq 1$.

Question 9: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Résoudre l'équation suivante par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ et en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$|mx^2 - 5x| = mx^2.$$

Solution

Domaine de positivité : $D_{pos} = \{x \in \mathbb{R} | mx^2 \geq 0\}$. On étudie le signe de la parabole mx^2 :

$$\text{si } m < 0,\ mx^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Si } m \geq 0,\ mx^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'où :

$$\text{si } m < 0, D_{pos} = \{0\}, \qquad \text{si } m \geq 0, D_{pos} = \mathbb{R} \quad .$$

Résoudre les équations : $mx^2 - 5x = mx^2$ (a), $\quad mx^2 - 5x = -mx^2$ (b).

$$mx^2 - 5x = mx^2 \Leftrightarrow x = 0.\ 0 \in D_{pos} \text{ pour tout } m \in \mathbb{R}, \text{ d'où } S_a = \{0\}.$$

$$mx^2 - x = -mx^2 \Leftrightarrow x(2mx - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \tfrac{5}{2m}\ (m \neq 0).$$

$$0 \in D_{pos} \text{ pour tout } m \text{ et } \tfrac{5}{2m} \in D_{pos} \Leftrightarrow m > 0. \text{ D'où } S_b = \{0\} \text{ si } m \leq 0 \text{ et } S_b = \left\{0, \tfrac{5}{2m}\right\} \text{ si } m > 0. \ .$$

Résumé et conclusion

- si $m < 0$, $S = S_a \cup S_b = \{0\}$.
- si $m = 0$, $S = S_a \cup S_b = \{0\}$.
- si $m > 0$, $S = S_a \cup S_b = \left\{0, \frac{5}{2m}\right\}$.

Question 10: *Cette question est notée sur 5 points.*

■ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5

Résoudre l'équation suivante, pour $x \in [-\pi, 0]$: $\sin(3x) + \cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution

Normalisation :

$$\sin(3x) + \cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(3x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Recherche de toutes les solutions :

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

D'où les solutions :

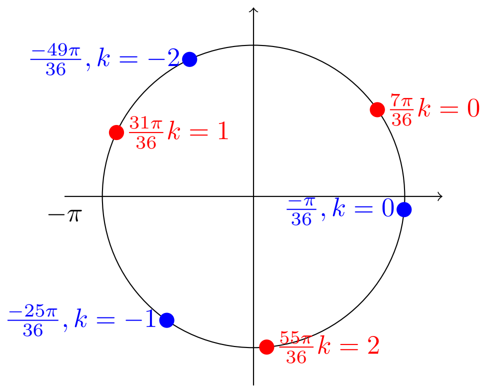
$$x_1 = -\frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \text{ ou } x_2 = \frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Filtration : On cherche maintenant k pour que $x \in [-\pi, 0]$. En visualisant dans le cercle certaines solutions, on constate qu'on peut choisir

$$x_1 \text{ avec } k = 0, -1 \text{ et } x_2 \text{ avec } k = -1.$$

D'où les solutions finales

$$S = \left\{\frac{-17\pi}{36}, \frac{-\pi}{36}, \frac{-25\pi}{36}, \right\}.$$



Question 11: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Résoudre l'inéquation suivante par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

$$2 + 4\log_3\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) > \log_3(x) + \log_3(2-2x).$$

Solution

- Domaine de définition :

$$D_{\text{def}} = \{x | x > 0 \text{ et } 2-2x > 0\} =]0,1[.$$

- On résout sur D_{def} :

$$\begin{aligned}
&2 + 4\log_3\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) > \log_3(x) + \log_3(2-2x) \\
&\Leftrightarrow 2\log_3(3) + \log_3\left(\frac{4}{81}\right) > \log_3(x(2-2x)) \\
&\Leftrightarrow \log_3(9) + \log_3\left(\frac{4}{81}\right) > \log_3(x(2-2x)) \\
&\Leftrightarrow \log_3(\frac{4}{9}) > \log_3(x(2-2x)) \\
&\Leftrightarrow \frac{4}{9} > x(2-2x) \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + \frac{4}{9} > 0 \\
&\Leftrightarrow 2(x^2 - x + \frac{2}{9}) > 0 \\
&\Leftrightarrow 2(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3}) > 0 \\
&\Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[= S_1
\end{aligned}$$

- En intersectant avec le domaine de définition, on trouve l'ensemble solution

$$S = D_{\text{def}} \cap S_1 =]0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, 1[.$$

Question 12: *Cette question est notée sur 4 points.*

■ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4

Calculer les racines quatrièmes de $\omega = -8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i}$. Pour chaque racine, donner sa partie réelle et sa partie imaginaire. Ensuite, représenter ces racines dans le plan complexe, en indiquant clairement leur module et leur argument.

Solution

Commençons par écrire ω sous forme polaire:

$$\omega = -8 - 8\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 16\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right) = [16, \tfrac{4\pi}{3}]\,.$$

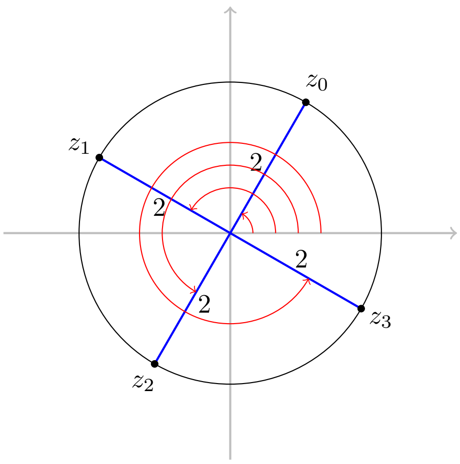
Donc ses racines quatrièmes sont

$$z_k = \left[\sqrt[4]{16}, \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right] \qquad k = 0, 1, 2, 3\,,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
z_0 &= [2, \tfrac{\pi}{3}] = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}\,,\\
z_1 &= [2, \tfrac{5\pi}{6}] = -\sqrt{3} + \mathrm{i}\,,\\
z_2 &= [2, \tfrac{4\pi}{3}] = -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}\,,\\
z_3 &= [2, \tfrac{11\pi}{6}] = \sqrt{3} - \mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

On représente ces points dans le plan complexe, avec module et argument:



Question 13: *Cette question est notée sur 5 points.*

■ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5

On considère, dans le plan complexe, un triangle de sommets z_1, z_2 et z_3 tel que

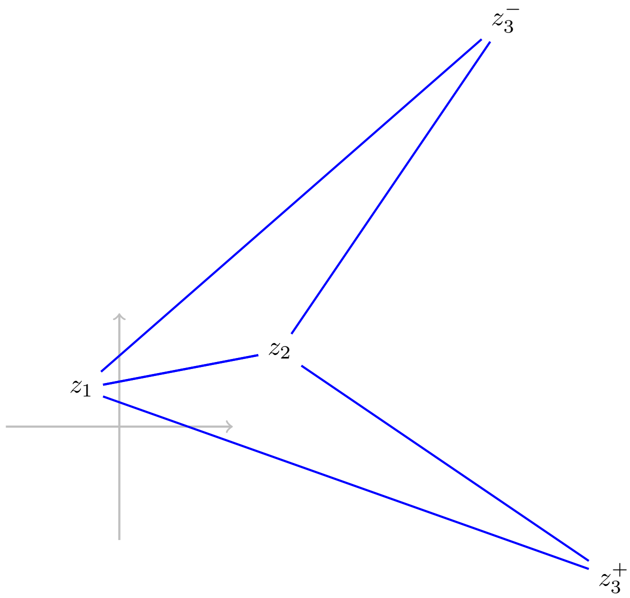
$$|z_3 - z_2| = 2|z_1 - z_2|\,,$$

et tel que l'angle d'ouverture en z_2 est égal à $\frac{3\pi}{4}$. Si on suppose que $\mathrm{Im}(z_3) > 0$ et que

$$z_1 = -1 + \mathrm{i}\,, \qquad z_2 = 3\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\,,$$

calculer z_3 et donner sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Solution Figure d'étude:



On obtient z_3 en ramenant z_2 à l'origine, puis en appliquant sur z_1

(a) une rotation d'angle $\theta = \pm\frac{3\pi}{4}$, suivie

(b) d'une homothétie de rapport $\lambda = 2$.

Ceci s'exprime, dans $\mathbb{C}$, par deux multiplications:

$$z_3 - z_2 = [2, 0][1, \pm\tfrac{3\pi}{4}](z_1 - z_2)\,,$$

c'est-à-dire

$$z_3 = [2, 0][1, \pm\tfrac{3\pi}{4}](z_1 - z_2) + z_2\,.$$

Donc dans un cas

$$\begin{aligned}
z_3^+ &= [2, 0][1, +\tfrac{3\pi}{4}](z_1 - z_2) + z_2 \\
&= 2\big(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big)\big((-1 + \mathrm{i}) - (3\sqrt{2} + 2\mathrm{i})\big) + (3\sqrt{2} + 2\mathrm{i}) \\
&= 2\big(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big)\big((-1 - 3\sqrt{2}) - \mathrm{i}\big) + (3\sqrt{2} + 2\mathrm{i}) \\
&= 2\big((\sqrt{2} + 3) - 3\mathrm{i}\big) + (3\sqrt{2} + 2\mathrm{i}) \\
&= (6 + 5\sqrt{2}) - 4\mathrm{i}\,,
\end{aligned}$$

et dans l'autre

$$\begin{aligned} z_3^- &= [2,0][1,-\tfrac{3\pi}{4}](z_1 - z_2) + z_2 \\ &= 2\bigl(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\bigr)\bigl((-1+\mathrm{i}) - (3\sqrt{2}+2\mathrm{i})\bigr) + (3\sqrt{2}+2\mathrm{i}) \\ &= 2\bigl(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\bigr)\bigl((-1-3\sqrt{2}) - \mathrm{i}\bigr) + (3\sqrt{2}+2\mathrm{i}) \\ &= 2\bigl(3 + (\sqrt{2}+3)\mathrm{i}\bigr) + (3\sqrt{2}+2\mathrm{i}) \\ &= (6+3\sqrt{2}) + (2\sqrt{2}+8)\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Im}(z_3^+) < 0$ et que $\mathrm{Im}(z_3^-) > 0$, le point demandé est

$$z_3 = z_3^- = (6+3\sqrt{2}) + (2\sqrt{2}+8)\mathrm{i}\,.$$