



1

Enseignants: Candil, Dubuis, Friedli
Analyse A - MAN
27 juin 2022
Durée : 150 minutes

Robin des Bois

SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Quelques formules de trigonométrie

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Formules de duplication :

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1.$$

Formules de bisection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \qquad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \qquad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Formules de transformation produit-somme :

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \tan x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$



Première partie, questions à choix multiples

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Une bonne réponse vaut le nombre de points indiqués. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou aucune réponse 0 point. Il n'y a pas de points négatifs.

Question 1 (2 points)

Soit un référentiel E sur lequel sont définies trois propriétés P, Q et R . Soit T la proposition définie par

$$T : \forall x \in E, P(x) \Rightarrow (Q(x) \text{ ou } R(x)).$$

Parmi les propositions ci-dessous, laquelle correspond à la contraposée de T ?

- ☐ $\exists x \in E, (\text{non } Q(x) \text{ et non } R(x)) \Rightarrow \text{non } P(x)$
- ☐ $\exists x \in E, \text{non } P(x) \text{ et } (\text{non } Q(x) \text{ et non } R(x))$
- ☐ $\forall x \in E, (\text{non } Q(x) \text{ et non } R(x)) \Rightarrow \text{non } P(x)$
- ☐ $\forall x \in E, (Q(x) \text{ ou } R(x)) \Rightarrow P(x)$

Question 2 (2 points)

Soit un référentiel E sur lequel sont définies deux propriétés P et Q . Soit T la proposition définie par

$$T : \forall x \in E, \exists y \in E, P(x) \Leftrightarrow Q(y).$$

Parmi les propositions ci-dessous laquelle correspond à la négation de T ?

- ☐ $\exists x \in E, \forall y \in E, \text{non } P(x) \Leftrightarrow \text{non } Q(y)$
- ☐ $\exists x \in E, \forall y \in E, (P(x) \text{ et non } Q(y)) \text{ ou } (\text{non } P(x) \text{ et } Q(y))$
- ☐ $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x) \text{ et non } Q(y)$
- ☐ $\forall y \in E, \exists x \in E, \text{non } Q(y) \Leftrightarrow \text{non } P(x)$

Question 3 (2 points)

Soit le polynôme $Q(z) = \frac{1}{4}z^2 - (m+2)z + 7 + 2m^2$ où $m \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de m le polynôme Q admet-il deux racines réelles distinctes ?

- ☐ $m \in]1, 3[.$
- ☐ $m \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[.$
- ☐ $m \in]-3, -1[.$
- ☐ $m \in]-\infty, -1[\cup]-3, +\infty[.$

Question 4 (3 points)

Le polynôme $P(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4$ possède

- ☐ trois racines réelles et une racine complexe.
- ☐ deux racines réelles doubles.
- ☐ deux racines réelles distinctes et deux racines complexes conjuguées.
- ☐ une racine réelle double et deux racines complexes conjuguées.



Deuxième partie, Vrai ou faux

Répondre par vrai ou faux. Une bonne réponse vaut +1 point, une mauvaise -1 point, aucune réponse 0 point.

Question 5 Soit $a > 0, a \neq 1$, un nombre réel. L'équation

$$a^{2x} + \frac{1}{2}a^x - \frac{1}{2} = 0$$

possède une unique solution $x \in \mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 6 La fonction $f(x) = \ln \left(\arccos \left(\frac{\sqrt{1+x}}{x^2+1} \right) \right)$ est bien définie en $x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 7 Si $x = \frac{-2\pi}{15}$, alors

$$\arcsin \left(\sin \left(5x - \frac{\pi}{3} \right) \right) = 5x - \frac{\pi}{3}.$$

☐ VRAI ☐ FAUX



Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 8: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ ₀☐ ₁☐ ₂☐ ₃

Montrer par récurrence que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout entier $n \geq 4$:

$$3^n \geq 4n(n+1).$$



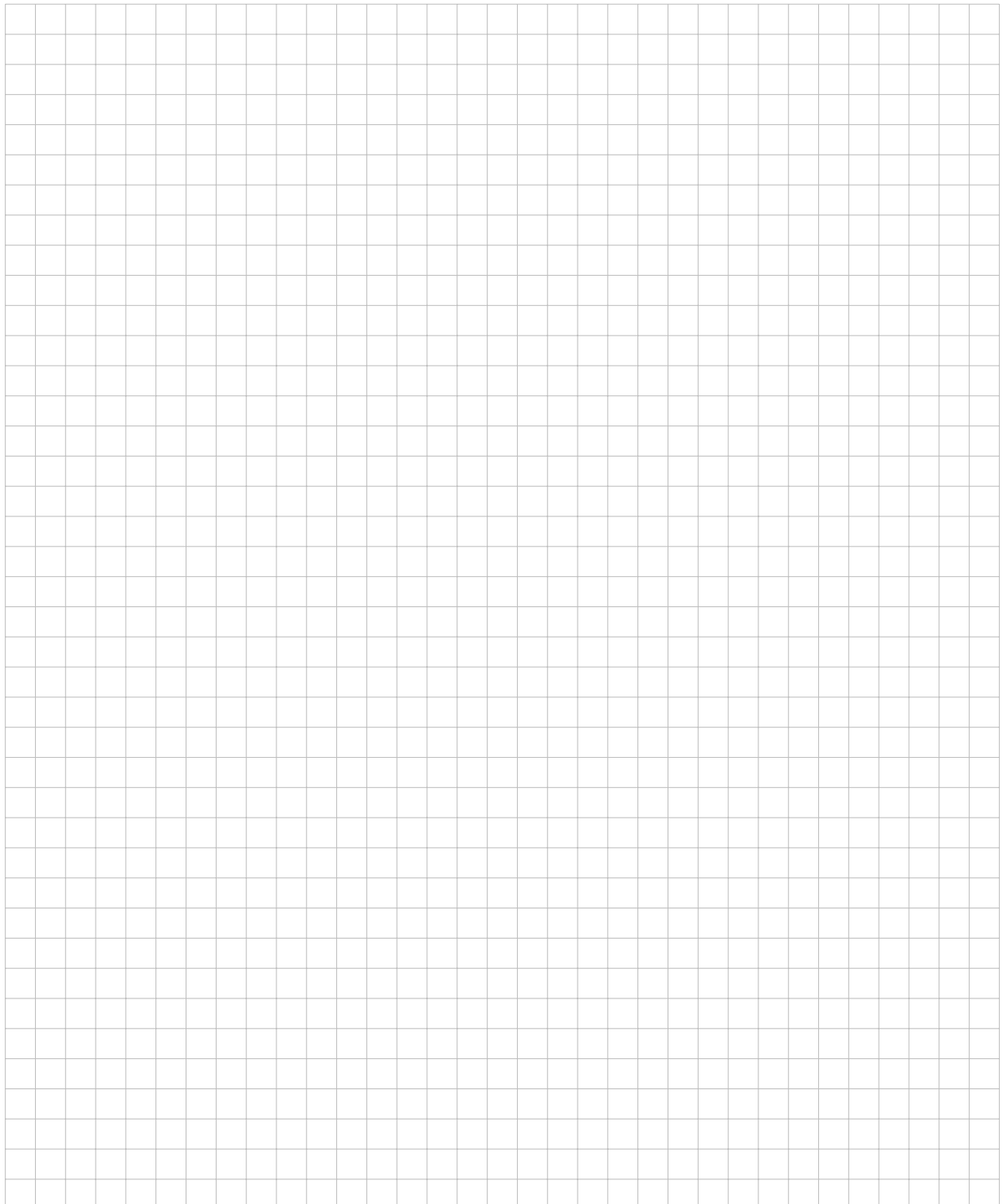


Question 9: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐₀ ☐₁ ☐₂ ☐₃ ☐₄ ☐₅

Résoudre l'équation suivante par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ et en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$|mx^2 - 5x| = mx^2.$$



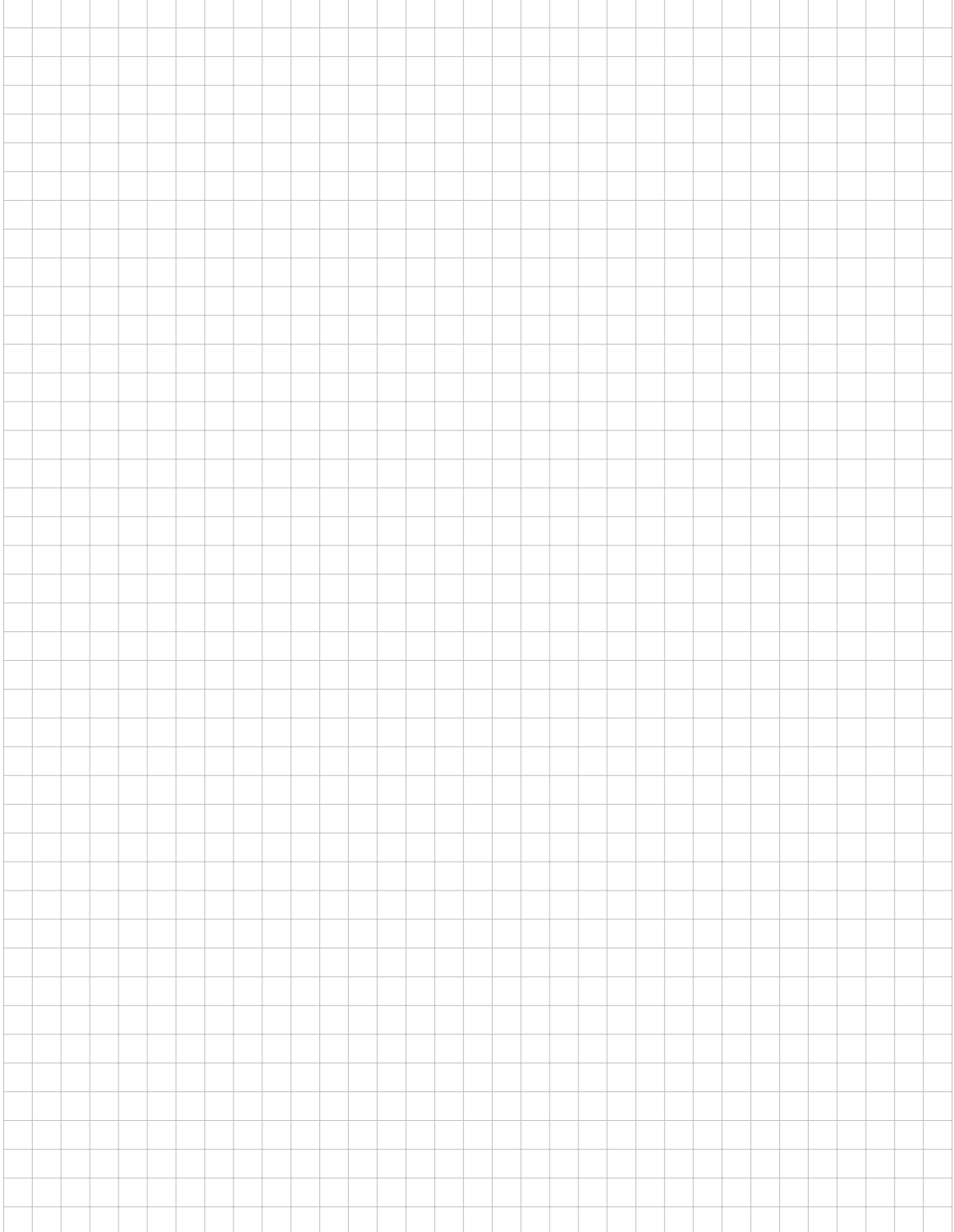




Question 10: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ ₀ ☐ ₁ ☐ ₂ ☐ ₃ ☐ ₄ ☐ ₅

Résoudre l'équation suivante, pour $x \in [-\pi, 0]$: $\sin(3x) + \cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.





+1/9/52+



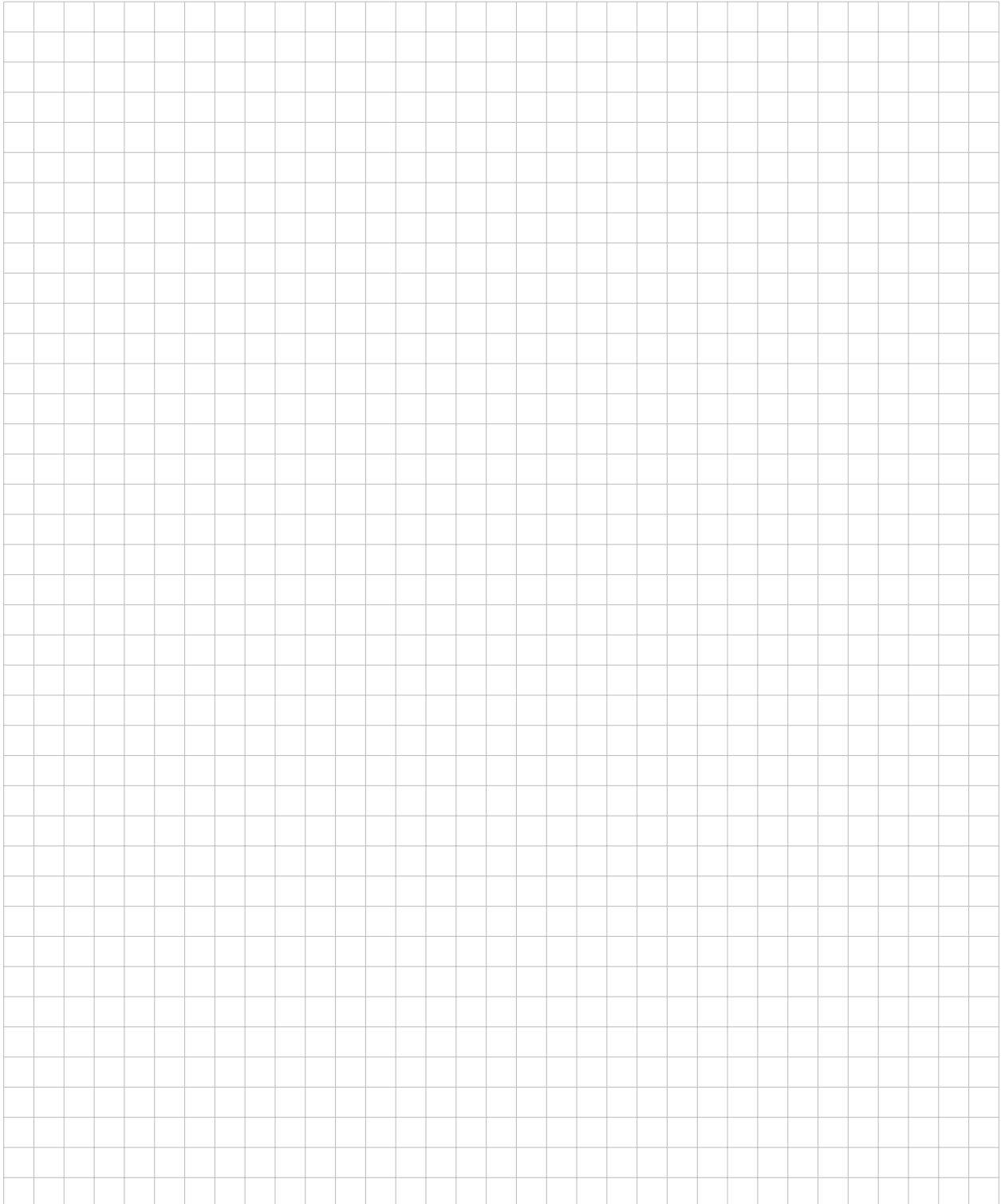


Question 11: *Cette question est notée sur 6 points.*

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆

Résoudre l'inéquation suivante par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

$$2 + 4 \log_3 \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) > \log_3(x) + \log_3(2 - 2x).$$



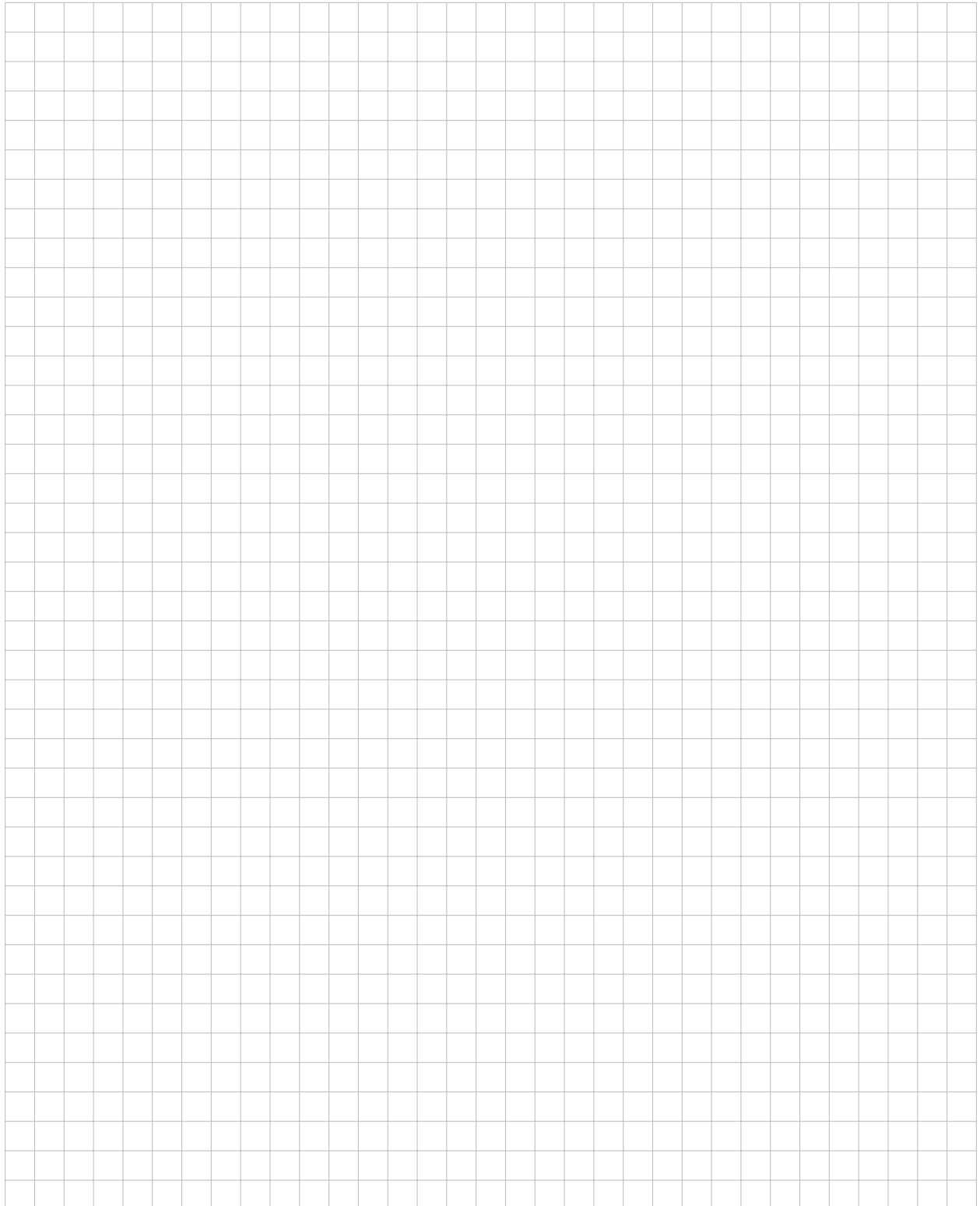




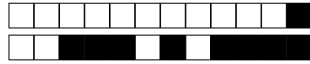
Question 12: *Cette question est notée sur 4 points.*

₀ ₁ ₂ ₃ ₄

Calculer les racines quatrièmes de $\omega = -8 - 8\sqrt{3}i$. Pour chaque racine, donner sa partie réelle et sa partie imaginaire. Ensuite, représenter ces racines dans le plan complexe, en indiquant clairement leur module et leur argument.







Question 13: *Cette question est notée sur 5 points.*

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅

On considère, dans le plan complexe, un triangle de sommets z_1 , z_2 et z_3 tel que

$$|z_3 - z_2| = 2|z_1 - z_2|,$$

et tel que l'angle d'ouverture en z_2 est égal à $\frac{3\pi}{4}$. Si on suppose que $\text{Im}(z_3) > 0$ et que

$$z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 3\sqrt{2} + 2i,$$

calculer z_3 et donner sa partie réelle et sa partie imaginaire.

