Physique — Guido Burmeister
Semestre de printemps 2025

https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15142

Corrigé 7

Exercice 1

Nous allons mettre à profit la loi de Gauss

$$\oint_{\text{surface fermée } \Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{intérieur de } \Sigma}\,,$$

en choisissant la surface fermée la plus appropriée à notre problème.

Comme l'objet chargé est une boule uniformément chargée, le champ $\vec{E}$ possède une symétrie radiale et nous allons considérer des surfaces sphériques en guise de surfaces de Gauss Σ. Ainsi, les lignes de champ seront toujours parallèles aux vecteurs "élément de surface" $\overrightarrow{d\Sigma}$, ce qui facilitera grandement le calcul du flux $\oint_{\text{surface fermée } \Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma}$.

Comme la charge enfermée à l'intérieur de Σ sera différente selon la valeur du rayon r de Σ, il est nécessaire de distinguer au moins deux cas : $r > R$ et $r < R$.

A l'extérieur de la boule, le champ électrique est dû à la totalité de la charge Q. On écrit la loi de Gauss en choisissant une sphère de rayon r, avec $r > R$, en guise de surface fermée, et une charge intérieure $Q_{\text{intérieur de } \Sigma} = Q$:

$$\oint_{\text{sphère de rayon } r} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} Q\,.$$

Par symétrie (invariance de rotation), le champ électrique $\vec{E}$ est radial. Il est donc en tout point de la surface de Gauss parallèle au vecteur "élément de surface" $\overrightarrow{d\Sigma}$:

$$\oint_{\text{sphère de rayon } r} E\, d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} Q\,.$$

Par symétrie, la norme du champ $\vec{E}$, E, ne dépend que de la distance r au centre de la boule. Cette norme est constante sur la surface de Gauss. On peut ainsi mettre E en évidence et le sortir de l'intégrale :

$$E \oint_{\text{sphère de rayon } r} d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} Q\,.$$

Comme $\oint_{\text{sphère de rayon } r} d\Sigma = 4\pi r^2$, il vient finalement

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad \text{avec } r > R\,.$$

Remarquons que l'on retrouve une expression identique à celle du champ électrique produit par une charge ponctuelle Q.

A l'intérieur de la boule, la densité de charge s'écrit

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,.$$

On utilise à nouveau la loi de Gauss sur une sphère de rayon r ($r < R$), mais pour une charge "incomplète"

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \;= \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} Q\,.$$

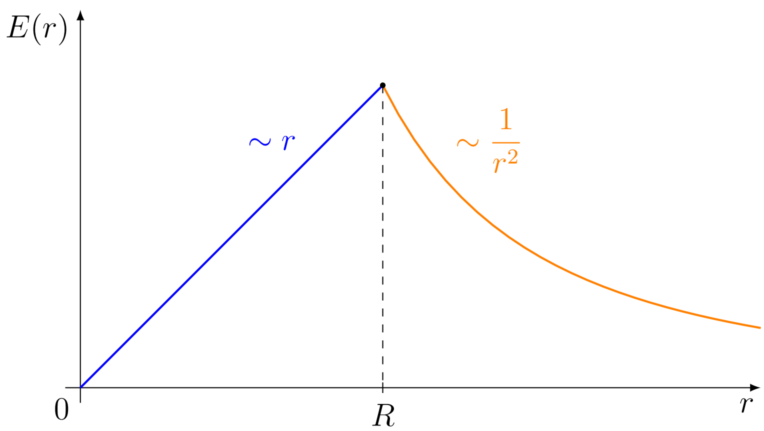
Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\oint_{\text{sphère de rayon } r} \vec{E}\cdot\overrightarrow{d\Sigma} &= \frac{1}{\epsilon_0} q \\
\oint_{\text{sphère de rayon } r} E\, d\Sigma &= \frac{1}{\epsilon_0} q \\
E \oint_{\text{sphère de rayon } r} d\Sigma &= \frac{1}{\epsilon_0} q \\
E\, 4\pi r^2 &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} Q\,.
\end{aligned}$$

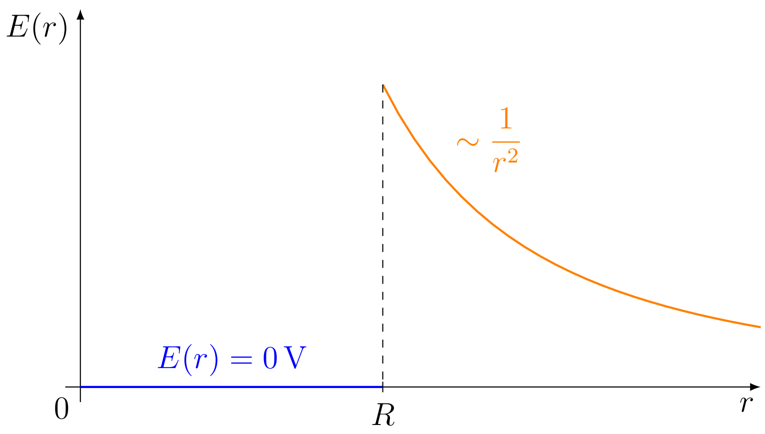
$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\, r, \quad \text{avec } r < R\,.$$

Cette expression est différente de celle du champ électrique produit par une charge ponctuelle Q. Ici, l'intensité de $\vec{E}$ augmente linéairement avec la distance r.

Représentation graphique de l'intensité du champ électrique :

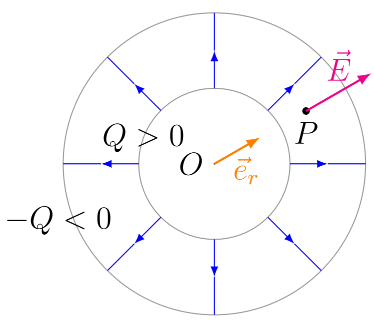


Remarque
Pour une boule *métallique* de rayon R portant une charge Q, le champ électrique se comporterait de la manière suivante :



En effet, en électrostatique le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur doit être nul (sinon les charges mobiles se déplaceraient). La loi de Gauss nous indique alors que la charge doit être intégralement répartie à la surface du conducteur. Le champ à l'extérieur d'une boule métallique est donc identique à celui trouvé pour une boule pleine non métallique lorsque $r > R$.

Exercice 2
Nous allons considérer la définition de la capacité d'un condensateur, en caractérisant en particulier le potentiel électrique en un point à l'intérieur du condensateur portant une charge Q.
La capacité d'un condensateur est le rapport entre sa charge et la tension entre ses armatures :
$$CU = Q\,.$$
En électrostatique, la charge du condensateur est celle portée par l'armature positive.
Si l'armature intérieure, de rayon R, porte la charge positive $Q > 0$, la tension du condensateur est celle entre l'armature positive et l'armature négative, de rayon R', $R' > R$:
$$U = U_{RR'} = \Phi(R) - \Phi(R')\,.$$



Par la loi de Gauss, le champ électrique en un point P situé entre les armatures à une distance r du centre vaut
$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r\,.$$
Le potentiel en P est
$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \text{cte}.$$
La tension du condensateur vaut donc
$$U_{RR'} = \Phi(R) - \Phi(R') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\,.$$

On en déduit la capacité du condensateur sphérique :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R R'}{R' - R}\,.$$

Exercice 3

Nous allons mettre à profit la loi de Gauss

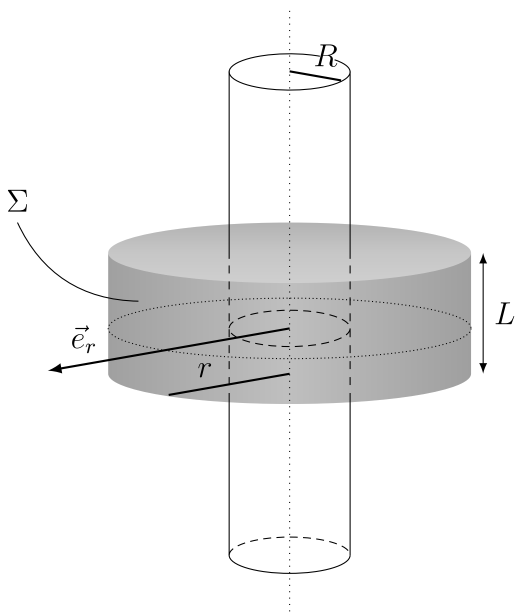
$$\oint_{\text{surface fermée }\Sigma} \vec{E}\cdot\overrightarrow{d\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{intérieur de }\Sigma}\,,$$

en choisissant la surface fermée la plus appropriée à notre problème.

Par symétrie, le champ électrique doit être axial et ne dépendre que de la distance à l'axe du conducteur cylindrique :

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r\,.$$

Considérons la surface fermée Σ formée d'un cylindre de même axe que le conducteur cylindrique, de rayon r et de hauteur L et fermé en haut et en bas par deux disques :



Le flux du champ électrique à travers la surface Σ choisie est ainsi

$$\Psi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\overrightarrow{d\Sigma} = E\,2\pi r L\,.$$

Selon la loi de Gauss,

$$\Psi_\Sigma = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\,2\pi R L}{\epsilon_0}\,,$$

d'où

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r = \frac{1}{2\pi r L}\frac{\sigma\,2\pi R L}{\epsilon_0}\,\vec{e}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{R}{r}\,\vec{e}_r\,, \quad \text{avec} \quad r > R\,.$$

A l'intérieur du conducteur, le champ est nul (pas de déplacement de charges (pas de courant).

Remarque

La tension entre un point A ($r_A > R$) et un point B ($r_B > R$) s'écrit

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_{r_A}^{r_B} E(r)\, dr = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A} = \Phi(r_A) - \Phi(r_B)\,, \end{aligned}$$

où

$$\Phi(r) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}\,, \quad r > R\,.$$

Le potentiel nul est choisi à la surface du conducteur cylindrique.

Exercice 4

La capacité d'un condensateur est le rapport entre sa charge et la tension entre ses armatures :

$$C = \frac{Q}{U}\,.$$

Nous allons donc nous intéresser à la tension existant entre les deux armatures d'un condensateur cylindrique portant une charge Q.

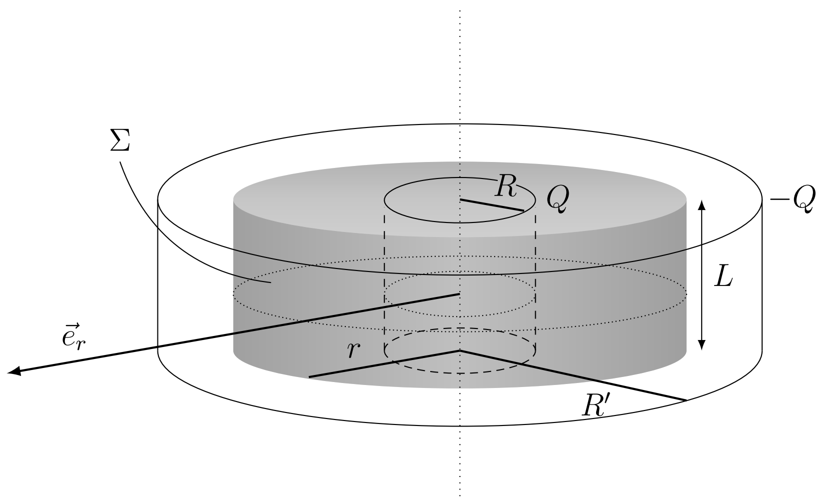
L'expression du champ électrique à l'intérieur du condensateur, donnée dans l'énoncé, peut être obtenue en mettant à profit la loi de Gauss

$$\oint_{\text{surface fermée } \Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{intérieur de } \Sigma}\,.$$

Nous allons choisir la surface fermée la plus appropriée à notre problème. Par symétrie, le champ électrique doit être axial et ne dépendre que de la distance à l'axe du condensateur :

$$\vec{E} = E(r)\, \vec{e}_r\,.$$

Considérons la surface fermée Σ formée d'un cylindre de même axe, de rayon r et de longueur L et fermé en haut et en bas par deux disques :



Le flux du champ électrique à travers la surface Σ choisie est ainsi

$$\Psi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = E\, 2\pi r L\,.$$

Selon la loi de Gauss,

$$\Psi_\Sigma = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}\,,$$

d'où

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r = \frac{1}{2\pi r L}\frac{Q}{\epsilon_0}\,\vec{e}_r = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\frac{1}{r}\,\vec{e}_r\,, \quad \text{avec} \quad R' > r > R\,.$$

Nous allons déterminer la tension entre les armatures en suivant un chemin axial Γ (dont la direction est donnée par $\vec{e}_r$) :

$$\begin{aligned} U_{RR'} &= \int_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\frac{1}{r}\,\vec{e}_r\cdot d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\int_R^{R'}\frac{1}{r}\,dr \\ &= = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\ln r\Big|_R^{R'} = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\ln\frac{R'}{R}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, la capacité C du condensateur a pour expression :

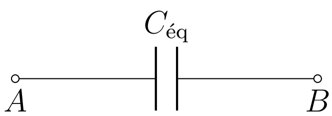
$$C = \frac{Q}{U_{RR'}} = \frac{2\pi L\epsilon_0}{\ln\frac{R'}{R}}\,.$$

Remarque : connaissant l'expression du potentiel, $\Phi(r) = -\dfrac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\ln\dfrac{r}{\text{cte}}$, nous pouvons également écrire

$$U_{RR'} = \Phi(R) - \Phi(R') = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\ln\frac{R'}{R}\,.$$

Exercice 5

(a)



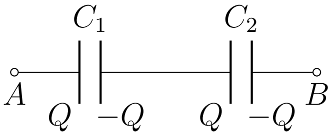
C_1 et C_2 sont branchés en série :

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} = \frac{3}{2C} \Rightarrow C_{\text{éq}} = \frac{2}{3}C\,.$$

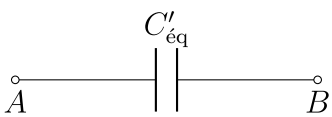
La charge portée par le condensateur équivalent est

$$Q = C_{\text{éq}}U_{AB} = \frac{2}{3}CU_{AB}\,.$$

Cette charge se trouve sur chacun des condensateurs :



(b)



C_1 et C_2 sont branchés en parallèle :

$$C'_{\text{éq}} = C_1 + C_2 = 3C\,.$$

La charge portée par le condensateur équivalent est la somme des charges des deux condensateurs :

$$Q' = 2Q = C'_{\text{éq}} U'_{AB} \Rightarrow U'_{AB} = \frac{2Q}{C'_{\text{éq}}} = \frac{2 \cdot 2\, C U_{AB}}{3 \cdot 3\, C} = \frac{4}{9}\, U_{AB}\,.$$