Physique

Guido Burmeister

Semestre de printemps 2025

https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15142

Corrigé 6

Exercice 1

(a) Pour compenser le champ uniforme, le champ dû à la charge Q doit être vers la gauche, soit sur l'axe Ox, à gauche de O. Notons N ce point : $x_N < 0$ et $y_N = 0$.

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_Q(\vec{r}_N) = \vec{0}$$

Selon $\vec{e}_x = (1,0)$:

$$E_0 - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2 x_N^2} = 0 \Leftrightarrow E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{1}{x_N^2}$$

$$\Leftrightarrow 1\,\mathrm{V\,m^{-1}} = 4\,\mathrm{V\,m^{-1}}\frac{1}{x_N^2} \Leftrightarrow x_N = -2\,.$$

(b) Champ uniforme :

$$\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x = 1\,\mathrm{V\,m^{-1}}(1,0)$$

Champ de la charge Q :

$$\vec{E}_Q(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2(x^2+y^2)}\vec{e}_r = \frac{4\,\mathrm{V\,m^{-1}}}{x^2+y^2}\vec{e}_r$$

En $P(0,2)$,

$$\vec{E}_Q(\vec{r}_P) = \frac{4\,\mathrm{V\,m^{-1}}}{4}(0,1) = 1\,\mathrm{V\,m^{-1}}(0,1)$$

Champ résultant

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \vec{E}_0 + \vec{E}_Q(\vec{r}_P) = 1\,\mathrm{V\,m^{-1}}(1,1)\,.$$

Le champ résultant fait un angle de $\pi/4$ par rapport à Ox.

(c) Champ uniforme :

$$\Phi_0(\vec{r}) = -E_0 a x = 1\,\mathrm{V}\,x$$

En $P(0,2)$,

$$\Phi_0(\vec{r}_P) = 0$$

Champ de la charge Q :

$$\Phi_Q(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4\,\mathrm{V}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

En $P(0,2)$,

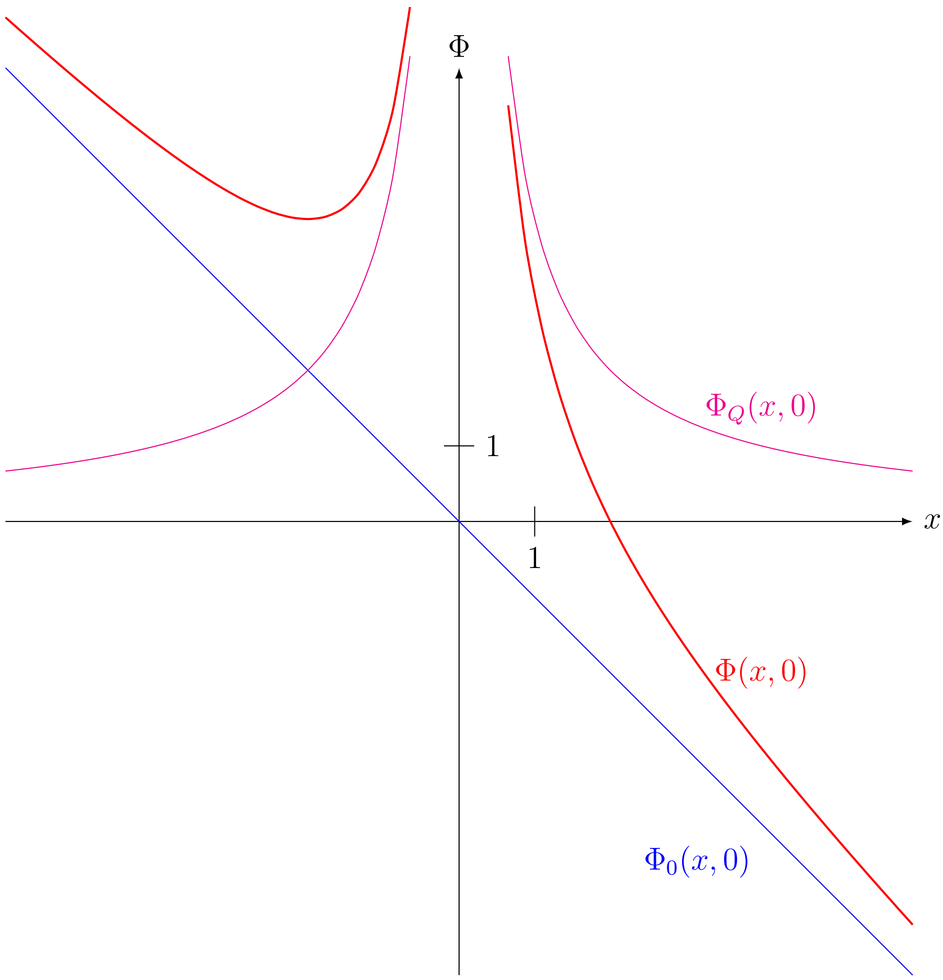
$$\Phi_Q(\vec{r}_P) = \frac{4\,\mathrm{V}}{2} = 2\,\mathrm{V}$$

Potentiel résultant

$$\Phi(\vec{r}_P) = \Phi_0(\vec{r}_P) + \Phi_2(\vec{r}_P) = 2\,\mathrm{V}$$

(d) Avec $y = 0$, le potentiel résultant vaut

$$\Phi(x,0) = -E_0 a x + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a|x|} = -1\,\mathrm{V}\,x + \frac{4\,\mathrm{V}}{|x|}$$



Remarque : le potentiel possède un minimum en $x_N = -2$, endroit où le champ électrique est nul.

(e) Le potentiel résultant en $\vec{r}$ est

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) = -E_0 a x + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{x^2+y^2}} = -1\,\mathrm{V}\,x + \frac{4\,\mathrm{V}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Le potentiel résultant est nul sur l'équipotentielle donnée par

$$-1\,\mathrm{V}\,x + \frac{4\,\mathrm{V}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,\mathrm{V}$$

ou encore

$$x = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Cela impose que $x > 0$.

De manière équivalente,

$$x^2(x^2+y^2) = 4^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{4^2}{x^2} - x^2 \geq 0\,.$$

Cela impose que $x \leq 2$.

Explicitement, l'équipotentielle est donc donnée par

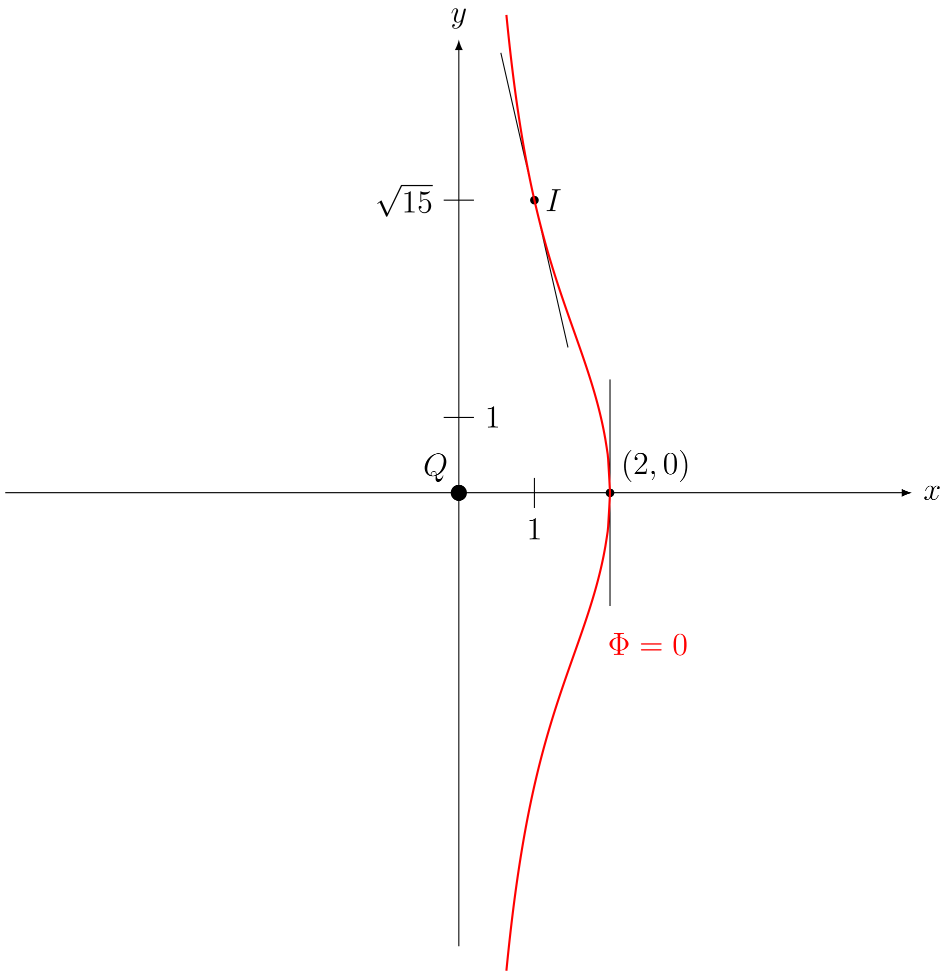
$$\Gamma : \quad y = \pm\sqrt{\frac{4^2}{x^2} - x^2} \qquad 0 < x \leq 2\,.$$

Pour tracer cette équipotentielle, on peut s'aider des éléments suivants.

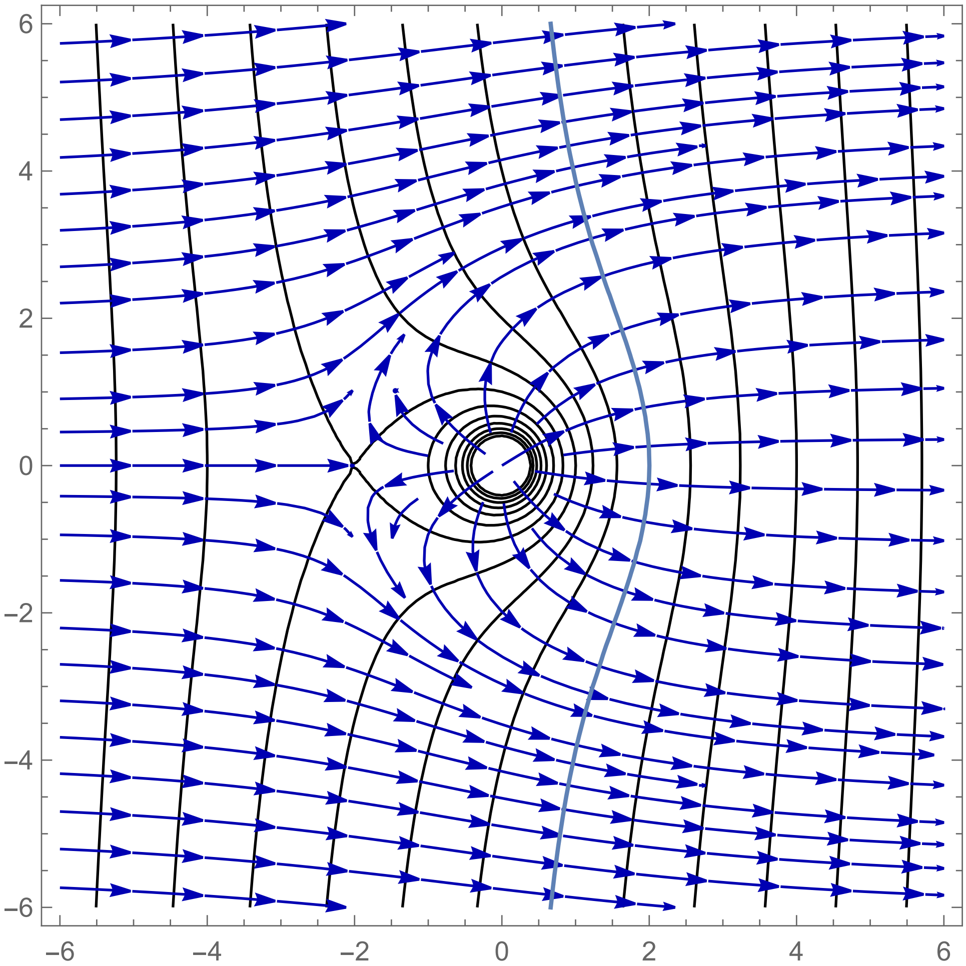
- Comme toute la situation, Γ est symétrique par rapport à l'axe Ox .
- Γ passe par le point $(2,0)$. Comme le champ $\vec{E}$ y est horizontal, elle y admet une tangente verticale.
- Pour $x \to 0^+$, $y^2 \to \infty$. Γ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- Un point intermédiaire I peut par exemple être choisi avec $x_I = 1$. Alors $y_I^2 = 15$ et $I(1, \sqrt{15})$. La pente m de la tangente est donnée par le nombre dérivé $m = y'$ en I . Par dérivée implicite,

$$x^2(x^2+y^2) = 4^2 \Rightarrow 2x(x^2+y^2) + x^2(2x+2yy') = 0$$

$$\Rightarrow x\frac{16}{x^2} + x^2(x+yy') = 0 \Rightarrow 16 + 1 + \sqrt{15}m = 0 \Rightarrow m = -\frac{17}{\sqrt{15}}\,.$$

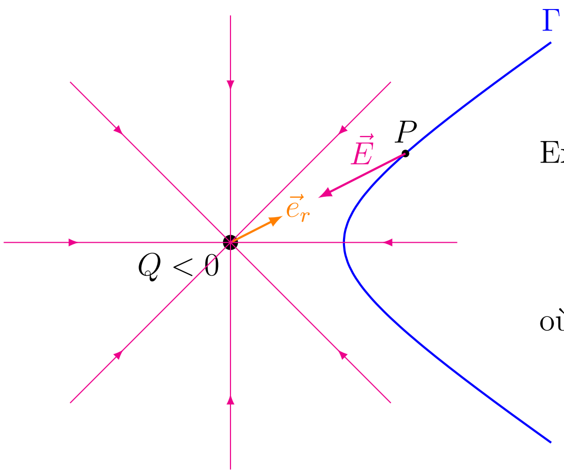


(f) Loin de Q , les équipotentielles sont des plans normaux à $\vec{E}_0$.
A proximité de Q , les équipotentielles sont des sphère concentriques.



Exercice 2

(a) Nous savons que le champ électrique produit par la charge ponctuelle Q est radial et dirigé vers $Q < 0$:

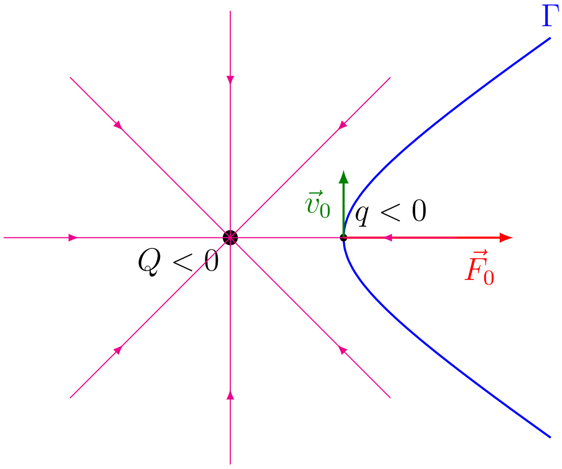


Expression de $\vec{E}$ au point P :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \,,$$

où r est la distance de la charge au point P.

(b) Intéressons-nous à la trajectoire de l'électron au voisinage de la charge :

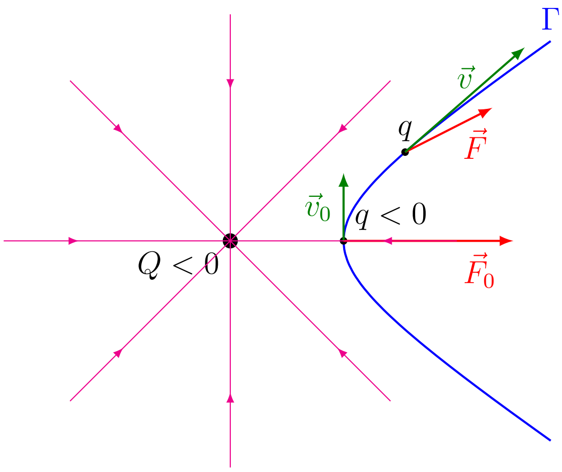


Au plus près de la charge, la vitesse de l'électron est normale au rayon vecteur :

$$\vec{v_0} \perp \vec{r_0}\,.$$

L'électron étant négatif, il est repoussé par la charge Q. Comme effet de la force de Coulomb, la vitesse tend à s'aligner sur le champ électrique (on peut montrer que la trajectoire est une hyperbole).

Il est possible d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre le point au plus près de Q et un point atteint ultérieurement :



Pour le point initial à la distance r_0 de Q et un autre point à la distance r, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

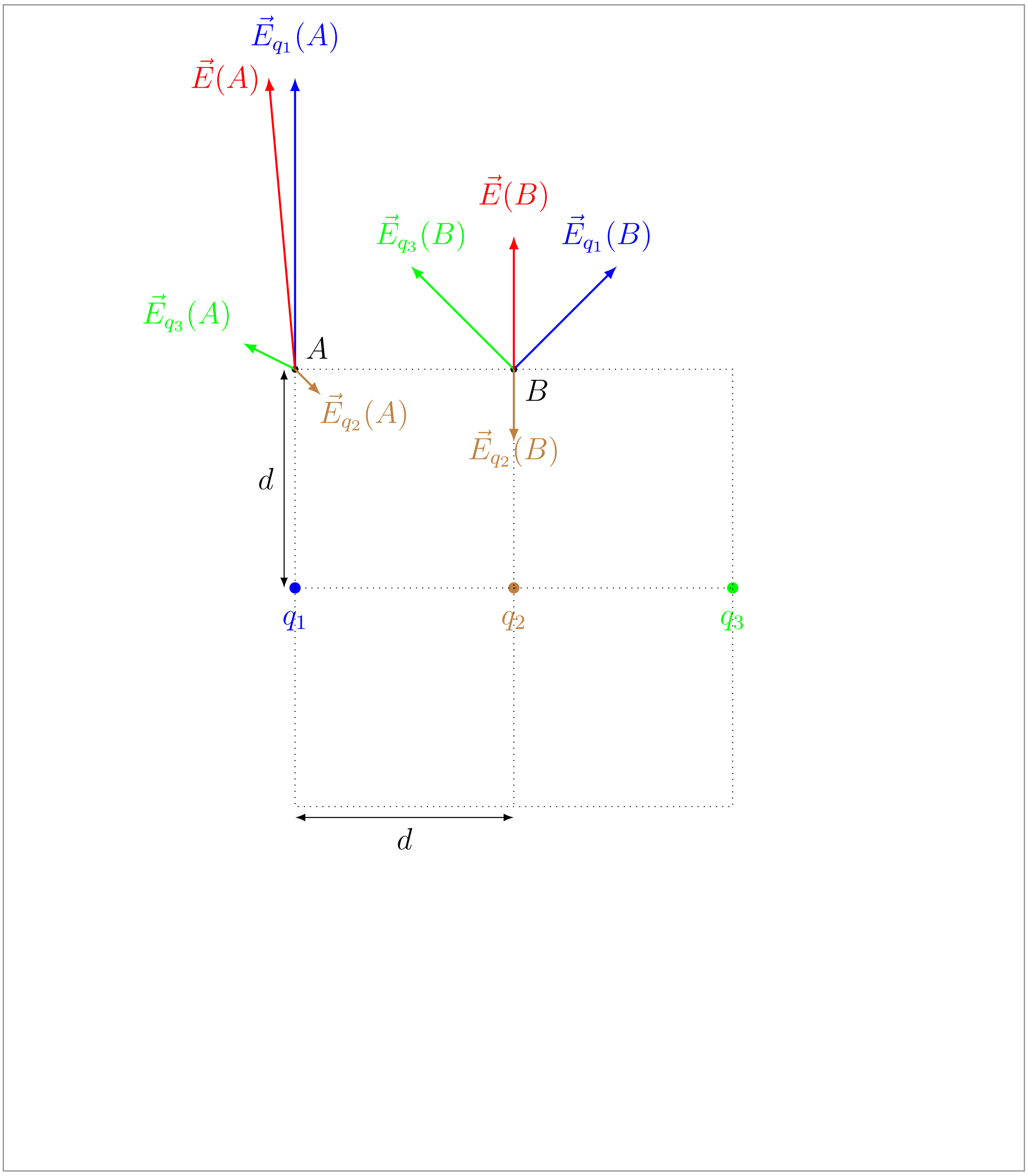
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= qU_{r_0r} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + \frac{qQ}{2m\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) > v_0^2$$

La vitesse de l'électron augmente donc au fur et à mesure qu'il s'éloigne de Q.

Exercice 3

(a)



Intensité du champ produit par q_2 en B :

$$||\vec{E}_{q_2}(B)|| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 1\,\text{cm}\,.$$

- Point A

  Intensité du champ produit par q_1 en A :

$$||\vec{E}_{q_1}(A)|| = \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 4||\vec{E}_{q_2}(B)|| = 4\,\text{cm}\,.$$

  Intensité du champ produit par q_2 en A :

$$||\vec{E}_{q_2}(A)|| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}d)^2} = \frac{1}{2}||\vec{E}_{q_2}(B)|| = 0.5\,\text{cm}\,.$$

  Intensité du champ produit par q_3 en A :

$$||\vec{E}_{q_3}(A)|| = \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{5}d)^2} = \frac{4}{5}||\vec{E}_{q_2}(B)|| = 0.8\,\text{cm}\,.$$

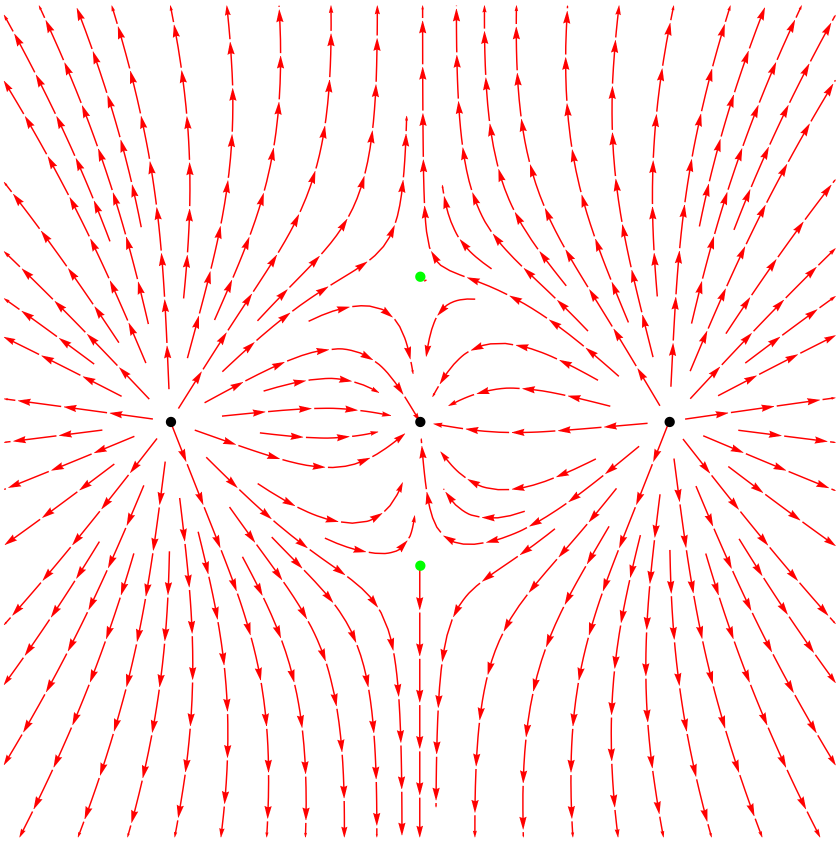
- Point B (n'est pas demandé)
  Intensité du champ produit par q_1 en B:

$$||\vec{E}_{q_1}(B)|| = \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}d)^2} = 2||\vec{E}_{q_2}(B)|| = 2\,\mathrm{cm}\,.$$

  Intensité du champ produit par q_2 en B: $||\vec{E}_{q_2}(B)|| = 1\,\mathrm{cm}$.
  Intensité du champ produit par q_3 en B:

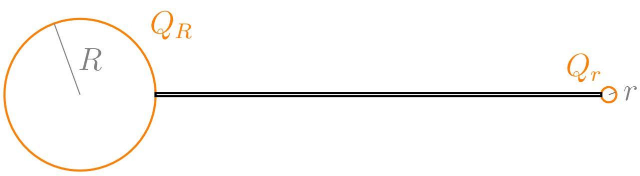
$$||\vec{E}_{q_3}(B)|| = \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}d)^2} = 2||\vec{E}_{q_2}(B)|| = 2\,\mathrm{cm}\,.$$

(b)



Exercice 4

Tout d'abord, on note que le système ne forme qu'un seul conducteur. Par conséquent, le potentiel électrique de la boule R est égal au potentiel électrique de la boule r, et ce même si les charges Q_R et Q_r qui se trouvent à la surface des deux boules sont différentes :



$$\Phi_R = \Phi_r = \Phi = \text{constante} \quad (\text{équipotentielle})\,.$$

En choisissant un potentiel nul à l'infini, on a

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_R}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_r}{r}\,.$$

Le champ électrique à la surface de la boule de rayon R s'écrit

$$E_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_R}{R^2} = \frac{\Phi_R}{R} = \frac{\Phi}{R}\,,$$

alors que celui au voisinage de la petite boule est

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_r}{r^2} = \frac{\Phi_r}{r} = \frac{\Phi}{r}\,,$$

Comme $R \gg r$, on en déduit que

$$E_r \gg E_R\,.$$

On vérifie donc bien que plus la courbure du conducteur est forte (en d'autres termes, plus le rayon de courbure est petit), plus le champ électrique est intense.

Exercice 5

Il convient de considérer les propriétés du champ électrique dans et au voisinage d'un conducteur en électrostatique.

(a) Faux.
La surface d'un conducteur est une équipotentielle et plus la courbure est forte, plus le champ électrique est intense et la densité superficielle de charge importante.

(b) Vrai.
Sinon les charges libres (électrons de conduction) subiraient une force et seraient accélérées.

(c) Faux.
La surface d'un conducteur est une équipotentielle et plus la courbure est forte, plus le champ électrique est intense (effet de pointe).

(d) Vrai.
La surface d'un conducteur est une équipotentielle : les lignes de champ (à l'extérieur) lui sont perpendiculaires.

(e) Faux.
Sinon le champ aurait plus d'une direction à l'endroit du croisement.

(f) Vrai.
La surface d'un conducteur est une équipotentielle.

(g) Vrai.
La surface d'un conducteur est une équipotentielle : la tension entre deux de ses points est nulle.

Exercice 6

On procède en deux étapes : on détermine tout d'abord la vitesse à l'entrée du condensateur avant de s'intéresser à l'angle de déflexion. Il est clair que plus la norme de la vitesse $\vec{v}_0$ des électrons à l'entrée du condensateur est grande, plus l'angle de déflexion φ sera faible.
Comme la force de gravitation agissant sur un électron est très petite en regard de la force électrique, nous allons la négliger.

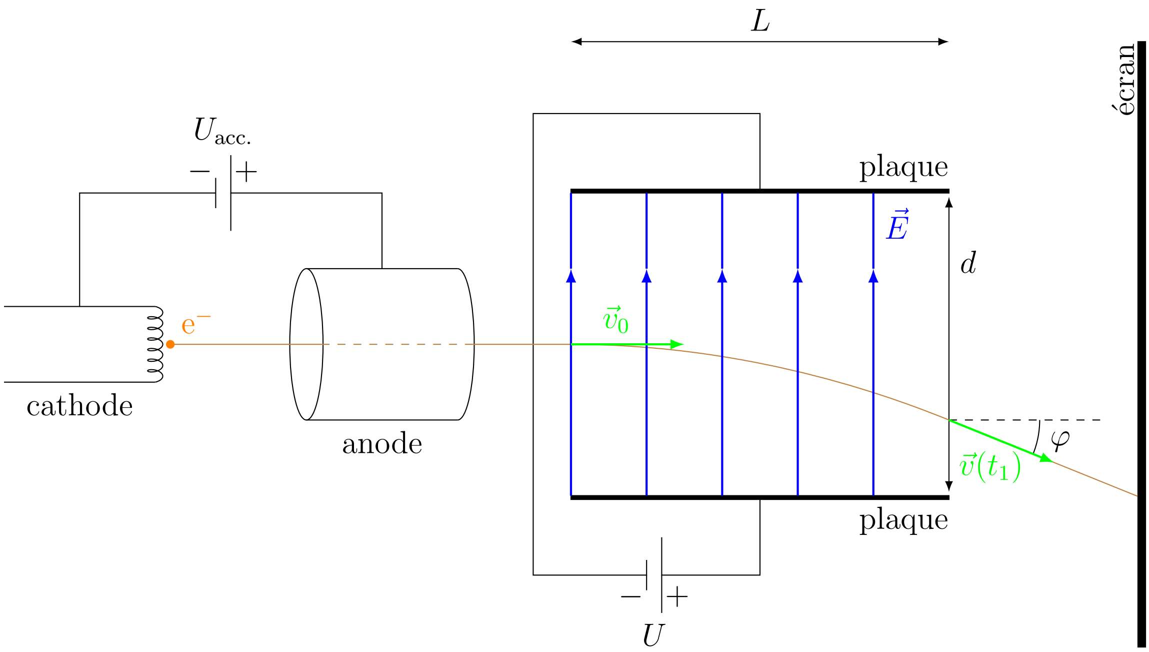
Phase d'accélération entre la cathode et l'anode

L'anode est une électrode positive attirant les anions (particules négatives). De la cathode à l'anode, les électrons suivent un chemin entre les extrémités duquel la tension est négative et vaut $-U_{\text{acc.}}$. Le théorème de l'énergie cinétique permet ainsi d'écrire :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = (-e)(-U_{\text{acc.}}) = e\,U_{\text{acc.}}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\,e\,U_{\text{acc.}}}{m}}\,.$$

Les électrons arrivent donc avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$ à l'entrée du condensateur.
Phase de déflexion entre les deux plaques du condensateur



Le champ électrique régnant entre les plaques est uniforme. Il est vertical, dirigé vers le haut (de la plaque positive à la plaque négative) et son intensité vaut

$$E = \frac{U}{d} = \text{C}^{\text{ste}}\,.$$

La force que subit un électron est $\vec{F} = (-e)\vec{E}$. Cette force est donc verticale et dirigée vers le bas et ne va pas modifier la vitesse horizontale. La deuxième loi de Newton permet alors d'écrire

$$\vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}\,.$$

L'accélération d'un électron est constante et sa vitesse a donc pour expression

$$\vec{v}(t) = \vec{a}\,t + \vec{v}_0\,.$$

L'origine du temps a été placée à l'instant où l'électron entre dans le condensateur. La composante v_x de la vitesse de ce dernier ne varie pas et est égale à v_0. Pour connaître la vitesse selon $\vec{e}_y$, il est nécessaire de déterminer le temps mis par la particule pour traverser le condensateur de longueur L, c'est-à-dire le temps durant lequel la force électrique due à la présence des plaques va défléchir la trajectoire du faisceau électronique en modifiant la composante v_y. Ce temps est donné par

$$t_1 = \frac{L}{v_0}\,,$$

de sorte que la vitesse de l'électron à la sortie du condensateur vaut

$$\vec{v}(t_1) \equiv \begin{pmatrix} v_x(t_1) \\ v_y(t_1) \end{pmatrix} = \vec{a}\,t_1 + \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ a\,t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'angle de déflexion est finalement donné par sa tangente :

$$\tan\varphi = \frac{v_y(t_1)}{v_x(t_1)} = \frac{a\,t_1}{v_0} = \frac{L}{2\,U_{\text{acc.}}\,d}\,U\,.$$