Physique
Semestre de printemps 2025

Guido Burmeister

https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15142

Corrigé 3

Exercice 1

Comme le courant ne circule que pendant une seconde, il faut différencier deux cas.

Lorsque le moteur est en fonction (c'est-à-dire lorsque le courant circule), le rotor voit sa vitesse angulaire augmenter. Le moment de force $\vec{M}$ est parallèle et de même signe que la vitesse angulaire du rotor $\vec{\omega}$. Ainsi,

$$M = I\dot{\omega}\,,$$

où M est le moment du couple. Ce moment est constant et non nul dans la première seconde après l'enclenchement ($0 < t < 1\,\mathrm{s}$). Ensuite (pour $t > 1\,\mathrm{s}$), il est nul. Il convient donc de procéder en deux étapes.

Pour $0 < t < 1\,\mathrm{s}$, le moment du couple est non nul et provoque une accélération angulaire

$$\dot{\omega} = \frac{M}{I} = \text{constante}\,.$$

La vitesse angulaire est alors donnée par

$$\omega(t) = \frac{M}{I}t + \omega_0\,,$$

où $\omega_0 = \omega(0) = 0\,\mathrm{s}^{-1}$ car le moteur est initialement immobile. L'angle parcouru par le rotor a quant à lui pour expression

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\frac{M}{I}t^2 + \varphi_0\,,$$

où l'on va poser $\varphi_0 = \varphi(0) = 0\,.$

On a donc en particulier,

$$\omega(1\,\mathrm{s}) = \frac{2}{0.1} = 20\,\mathrm{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \varphi(1\,\mathrm{s}) = \frac{1}{2}\frac{2}{0.1} = 10\,.$$

Pour $t > 1\,\mathrm{s}$, le moment du couple est nul. Il n'y a donc pas d'accélération angulaire et la vitesse angulaire du rotor est constante :

$$\dot{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \omega(1\,\mathrm{s}) = \omega_1 = \text{constante}\,.$$

L'angle parcouru par le rotor est ainsi donné par

$$\varphi(t) = \varphi(1\,\mathrm{s}) + \omega_1(t - 1\,\mathrm{s})\,.$$

Ainsi,

$$\varphi(2\,\mathrm{s}) = 10 + 20(2 - 1) = 30$$

et le nombre de tours correspondant est

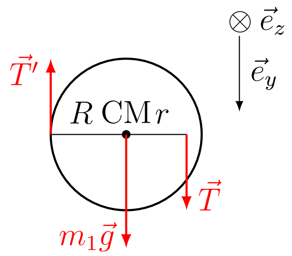
$$n(2\,\mathrm{s}) = \frac{\varphi(2\,\mathrm{s})}{2\pi} \cong 4.77\,.$$

Exercice 2

Il n'est pas judicieux de choisir comme objet cylindre et contrepoids, ces deux parties ne bougeant pas de la même manière. Ainsi,

- on considère tour à tour le cylindre et la masse
- on établit la liaison géométrique entre leurs mouvements.

a) Cylindre



Objet : cylindre

Forces : poids, tensions

Le CM est accéléré :

$$m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{T}' = m_1\vec{a}_1\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$m_1 g + T - T' = m_1 a_1\,.$$

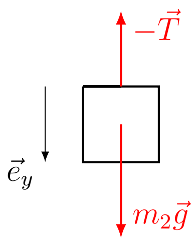
Rotation autour du CM :

$$\vec{M}_{\text{CM}} = \underbrace{\vec{M}_{\text{CM}}(m_1\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\text{CM}}(\vec{T})}_{\otimes} + \underbrace{\vec{M}_{\text{CM}}(\vec{T}')}_{\otimes} = I_{\text{CM}}\dot{\vec{\omega}}_{\text{CM}}$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$rT + RT' = I_{\text{CM}}\dot{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

b) Masse (contrepoids)



Objet : contrepoids

Forces : poids, tension

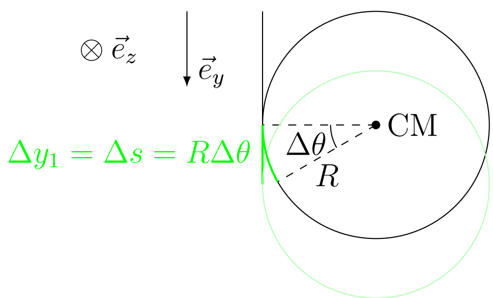
$$m_2\vec{g} - \vec{T} = m_2\vec{a}_2$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$m_2 g - T = m_2 a_2\,.$$

c) Liaison géométrique

Pour établir les équations de liaison, on peut considérer un petit angle de rotation du cylindre et déterminer le mouvement correspondant du CM du cylindre et celui du contrepoids.

- 

Si, pendant Δt, le cylindre tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_z$, le fil à gauche se déroule de

$$\Delta s = R\Delta\theta$$

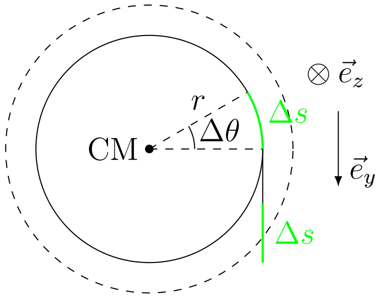
et le CM du cylindre se déplace de

$$\Delta y_1 = \Delta s = R\Delta\theta$$

dans le sens donné par $\vec{e}_y$.

Les variations temporelles (dérivées) donnent alors

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad\Leftrightarrow\quad v_1 = R\omega_{\text{CM}} \quad\Rightarrow\quad a_1 = R\dot{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

- 

Si, pendant Δt, le cylindre tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_z$, le fil se déroule et le contrepoids se déplace de $\Delta s = r\Delta\theta$ **par rapport au cylindre** dans le sens donné par $\vec{e}_y$.
Donc par rapport au plafond, m_2 se déplace de

$$\Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta s = (R + r)\Delta\theta$$

dans le sens donné par $\vec{e}_y$.

Les variations temporelles (dérivées) donnent alors

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta t} = (R + r) \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = (R + r)\omega_{\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad a_2 = (R + r)\dot{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

d) Résolution du système

$$\begin{cases} m_1 g + T - T' &= m_1 a_1 \\ rT + RT' &= I_{\text{CM}}\dot{\omega}_{\text{CM}} \\ m_2 g - T &= m_2 a_2 \\ a_1 &= R\dot{\omega}_{\text{CM}} \\ a_2 &= (R + r)\dot{\omega}_{\text{CM}}\,. \end{cases}$$

Il est souvent plus simple de d'abord exprimer les accélérations en fonction de $\dot{\omega}_{\text{CM}}$ et de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} m_1 g + T - T' &=& m_1 R\dot{\omega}_{\text{CM}} & \cdot R \\ rT + RT' &=& I_{\text{CM}}\dot{\omega}_{\text{CM}} & \cdot 1 \\ m_2 g - T &=& m_2(R + r)\dot{\omega}_{\text{CM}} & \cdot (R + r) \end{array}\right.$$

en amplifiant les équations respectivement par R, 1 et $2R$, de sorte que l'addition membre à membre fasse tomber les termes en T et T', inconnues non recherchées. On obtient alors

$$m_1 gR + m_2 g(R + r) = (m_1 R^2 + I_{\text{CM}} + m_2(R + r)^2)\dot{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

Il vient alors (avec $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}m_1 R^2$ pour un cylindre plein)

$$\dot{\omega}_{\text{CM}} = \frac{m_1 gR + m_2 g(R + r)}{\frac{3}{2}m_1 R^2 + m_2(R + r)^2} = \frac{2m_1 + 2m_2(1 + p)}{3m_1 + 2m_2(1 + p)^2}\frac{g}{R}$$

et donc

$$\begin{aligned} a_1 &= R\dot{\omega}_{\text{CM}} = \frac{2m_1 + 2m_2(1 + p)}{3m_1 + 2m_2(1 + p)^2}\, g \\ a_2 &= R(1 + p)\dot{\omega}_{\text{CM}} = \frac{2m_1(1 + p) + 2m_2(1 + p)^2}{3m_1 + 2m_2(1 + p)^2}\, g\,. \end{aligned}$$

Discussion

- Comme $2m_1 < 3m_1$ et $2m_2(1 + p) < 2m_2(1 + p)^2$, on a $0 < a_1 < g$. Le CM du cylindre accélère vers le bas et moins fortement qu'en chute libre.

- Comme $a_2 > 0$, m_2 accélère bien vers le bas. Mais elle ne peut pas le faire aussi fortement qu'en chute libre (la tension ne peut pas pousser m_2 vers le bas). La relation est donc correcte seulement si $a_2 < g$, soit si $1 + p < 1 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$!
  Si $p > \frac{1}{2}$, le fil est détendu et m_2 est en chute libre. En effet, le calcul de T donne

$$\begin{aligned} T = m_2(g - a_2) &= \left(1 - \frac{2m_1(1+p) + 2m_2(1+p)^2}{3m_1 + 2m_2(1+p)^2}\right) m_2 g \\ &= \left(\frac{3m_1 + 2m_2(1+p)^2 - 2m_1(1+p) - 2m_2(1+p)^2}{3m_1 + 2m_2(1+p)^2}\right) m_2 g \\ &= \left(\frac{m_1(1-2p)}{3m_1 + 2m_2(1+p)^2}\right) m_2 g \end{aligned}$$

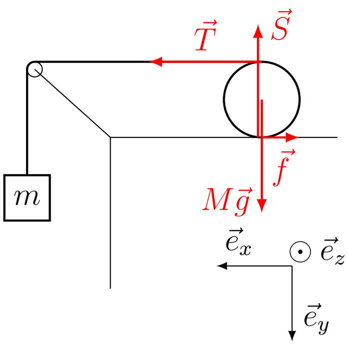
  d'où la condition $T > 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$.

Exercice 3

Comme dans l'exercice 1,

- on considère tour à tour le cylindre et la masse
- on établit la liaison géométrique entre leurs mouvements.

a) Cylindre



Objet : cylindre

Forces : poids, soutien, tension, frottement

Le CM est accéléré :

$$M\vec{g} + \vec{S} + \vec{T} + \vec{f} = M\vec{a}_M\,.$$

Selon $\vec{e}_x$,

$$T - f = Ma_M \quad (a_{M,y} = 0)\,.$$

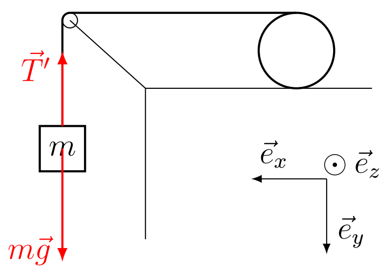
Rotation autour du CM :

$$\vec{M}_{\text{CM}} = \underbrace{\vec{M}_{\text{CM}}(M\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\text{CM}}(\vec{S})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\text{CM}}(\vec{T})}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_{\text{CM}}(\vec{f})}_{\odot} = I_{\text{CM}}\dot{\vec{\omega}}_{\text{CM}}$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$RT + Rf = I_{\text{CM}}\dot{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

b) Masse (contrepoids)



Objet : contrepoids

Forces : poids, tension

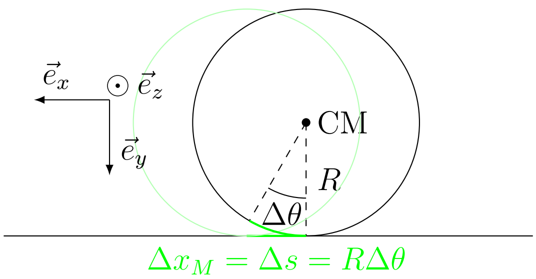
$$m\vec{g} + \vec{T}' = m\vec{a}_m$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$mg - T = ma_m\,.$$

c) Liaison géométrique

Pour établir les équations de liaison, on peut considérer un petit angle de rotation du cylindre et déterminer le mouvement correspondant du CM du cylindre et celui du contrepoids.

- 

  Si, pendant Δt, le cylindre tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_z$, il “enroule” sur le sol une longueur

$$\Delta s = R\Delta\theta$$

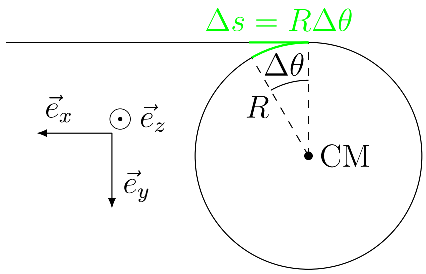
  et le CM du cylindre se déplace de

$$\Delta x_M = \Delta s = R\Delta\theta$$

  dans le sens donné par $\vec{e}_x$.

Les variations temporelles (dérivées) donnent alors

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x_M}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad\Leftrightarrow\quad v_M = R\omega_{\text{CM}} \quad\Rightarrow\quad a_M = R\dot{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

- 

  Si, pendant Δt, le cylindre tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_z$, le fil se déroule et le contrepoids se déplace de $\Delta s = R\Delta\theta$ **par rapport au cylindre** dans le sens donné par $\vec{e}_y$. Comme le cylindre avance de Δx_M, m se déplace de

$$\Delta y_m = \Delta x_M + \Delta s = 2R\Delta\theta$$

  dans le sens donné par $\vec{e}_y$.

Les variations temporelles (dérivées) donnent alors

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y_m}{\Delta t} = 2R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad\Leftrightarrow\quad v_m = 2R\omega_{\text{CM}} \quad\Rightarrow\quad a_m = 2R\dot{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

d) Résolution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} T - f &=& Ma_M \\ RT + Rf &=& I_{\text{CM}}\dot{\omega}_{\text{CM}} \\ mg - T &=& ma_m \\ a_M &=& R\dot{\omega}_{\text{CM}} \\ a_m &=& 2R\dot{\omega}_{\text{CM}}\,. \end{array}\right.$$

Il est souvent plus simple de d'abord exprimer les accélérations en fonction de $\dot{\omega}_{\text{CM}}$ et de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} T - f &=& MR\dot{\omega}_{\text{CM}} & \cdot R \\ RT + Rf &=& I_{\text{CM}}\dot{\omega}_{\text{CM}} & \cdot 1 \\ mg - T &=& m2R\dot{\omega}_{\text{CM}} & \cdot 2R \end{array}\right.$$

en amplifiant les équations respectivement par R, 1 et $2R$, de sorte que l'addition membre à membre fasse tomber les termes en T et f, inconnues non recherchées. On obtient alors

$$2mgR = (MR^2 + I_{\text{CM}} + 4mR^2)\dot{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

Avec $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}MR^2$ pour un cylindre plein, il vient

$$\dot{\omega}_{\text{CM}} = \frac{2mgR}{MR^2 + I_{\text{CM}} + 4mR^2} = \frac{4mg}{(3M + 8m)R}$$

et donc

$$\begin{aligned} a_M &= R\dot{\omega}_{\text{CM}} = \frac{4m}{3M+8m}\, g > 0 \\ a_m &= 2R\dot{\omega}_{\text{CM}} = \frac{8m}{3M+8m}\, g > 0\,. \end{aligned}$$

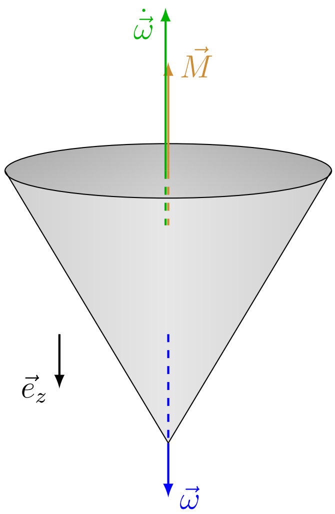
Le cylindre accélère vers la gauche et la masse vers le bas.

Exercice 4

Nous allons exploiter le théorème du moment cinétique pour étudier la dynamique de la rotation de la toupie.
Nous allons supposer que le couple de freinage est mesuré par rapport au centre de la toupie (axe de rotation). Par hypothèse, ce couple, que nous allons noter $\vec{M}$, est supposé constant. Il s'oppose à la rotation de la toupie et conduit à une décélération de celle-ci :

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}}\,.$$

Imaginons que la toupie tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$) et choisissons un repère dans le même sens ($\vec{\omega} = k\vec{e}_z$, avec $k > 0$).



La projection de l'équation ci-dessus fournit alors

$$-M = I\dot{\omega}\,.$$

Le signe traduit le fait que $\vec{M}$ s'oppose à $\vec{\omega}$.
Ainsi, l'accélération angulaire s'écrit

$$\dot{\omega} = -\frac{M}{I} = \text{constante}\,.$$

On devine alors que la vitesse angulaire est de la forme

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M}{I}t\,,$$

où ω_0 est une constante.
La constante ω_0 correspond à la vitesse de rotation initiale de la toupie :

$$\omega(t = 0\,\text{s}) = \omega_0 = 50 \cdot 2\pi \cong 314.159\,\text{s}^{-1}\,.$$

Nous savons que la toupie tombe après 30 secondes car sa vitesse angulaire est devenue négligeable ($\omega \cong 0\,\mathrm{s}^{-1}$). Ainsi,

$$\begin{aligned} \omega(t_1 = 30\,\mathrm{s}) &= \omega_0 - \frac{M}{I} t_1 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Cette équation permet de déterminer le couple de freinage :

$$M = \frac{I\omega_0}{t_1} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 100\pi}{30} \cong 2.09 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N\,m}\,.$$

L'expression de la vitesse angulaire de la toupie,

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M}{I} t\,,$$

permet de deviner l'angle parcouru par la toupie au cours du temps :

$$\theta(t) = \omega_0 t - \frac{M}{2I} t^2\,.$$

On en déduit le nombre de tours effectués par la toupie jusqu'à son arrêt :

$$\begin{aligned} n(t_1 = 30\,\mathrm{s}) &= \frac{\theta(t_1)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\omega_0 t_1 - \frac{M}{2I} {t_1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\omega_0 t_1 - \frac{\omega_0 t_1}{2}\right) = \frac{\omega_0 t_1}{4\pi} \\ &= \frac{100\pi \cdot 30}{4\pi} = 750\,. \end{aligned}$$

Exercice 5

Nous allons appliquer le théorème du moment cinétique aux masses en rotation m_1 et m_2. Il sera également nécessaire de décrire le mouvement des masses m_3 et m_4 se déplaçant verticalement.

Appelons $\vec{T}_3$, respectivement $\vec{T}_4$, la force qu'exerce m_3, respectivement m_4, sur les cylindres solidaires.

En choisissant $\vec{e}_z$ entrant, la projection du théorème du moment cinétique selon $\vec{e}_z$ s'écrit

$$r_1 T_3 + r_2 T_4 = (I_1 + I_2)\dot{\omega}\,,$$

où $\dot{\omega}$ est l'accélération angulaire des deux cylindres (ces derniers sont supposés solidaires). La deuxième loi de Newton appliquée aux masses m_3 et m_4 s'écrit

$$m_i \vec{g} + \vec{T}_i = m_i \vec{a}_i\,, \quad \text{où } i = 3, 4\,.$$

En projetant selon $\vec{e}_y$ dirigé vers le bas, nous obtenons les équations

$$m_3 g - T_3 = m_3 a_3 \quad \text{et} \quad m_4 g - T_4 = m_4 a_4\,.$$

Il convient maintenant de trouver la liaison entre le mouvement de rotation des cylindres et le mouvement de translation des deux masses m_3 et m_4.

Lorsque les cylindres tournent à une vitesse angulaire ω, les masses m_3 et m_4 descendent avec les vitesses respectives

$$v_3 = r_1\omega \quad \text{et} \quad v_4 = r_2\omega.$$

Par conséquent,

$$a_3 = r_1\dot{\omega} \quad \text{et} \quad a_4 = r_2\dot{\omega}.$$

En résumé, nous avons les équations

$$\begin{aligned} r_1T_3 + r_2T_4 &= (I_1 + I_2)\dot{\omega}\,, \\ m_3g - T_3 &= m_3a_3\,, \\ m_4g - T_4 &= m_4a_4\,, \\ a_3 &= r_1\dot{\omega}\,, \\ a_4 &= r_2\dot{\omega}\,. \end{aligned}$$

En éliminant T_3, T_4, a_3 et a_4, nous obtenons l'expression de l'accélération angulaire :

$$\dot{\omega} = \frac{(r_1m_3 + r_2m_4)}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}\,g\,.$$

Les accélérations verticales des deux masses m_3 et m_4 sont alors données par

$$a_3 = \frac{r_1(r_1m_3 + r_2m_4)}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}\,g$$

et

$$a_4 = \frac{r_2(r_1m_3 + r_2m_4)}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}\,g\,.$$

Quant aux tensions dans les fils, elles s'écrivent

$$\begin{aligned} T_3 &= m_3(g - a_3) = m_3g(1 - \frac{r_1(r_1m_3 + r_2m_4)}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}) \\ &= m_3g\frac{m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2 + m_4{r_2}^2 - r_1r_2m_4}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2} \end{aligned}$$

et

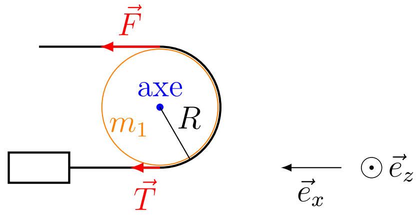
$$\begin{aligned} T_4 &= m_4(g - a_4) = m_4g(1 - \frac{r_2(r_1m_3 + r_2m_4)}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}) \\ &= m_4g\frac{m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2 + m_3{r_1}^2 - r_1r_2m_3}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}\,. \end{aligned}$$

Exercice 6

Nous allons appliquer le théorème du moment cinétique à la masse en rotation m_1. Il sera également nécessaire de décrire le mouvement de translation horizontal des deux masses m_1 et m_2.

Dynamique de l'objet "roue"

Appelons $\vec{T}$ la tension dans le fil entre la roue et la masse m_2.



Avec le choix de $\vec{e}_x$ dirigé vers la gauche et $\vec{e}_z$ sortant, la deuxième équation de Newton appliquée à la roue s'écrit

$$F + T = m_1 a_1 \, .$$

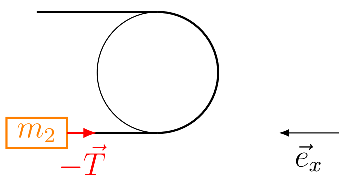
D'autre part, dans le référentiel du CM et par rapport à un axe passant par le CM, le théorème du moment cinétique fournit

$$R(F - T) = I\dot{\omega} \, ,$$

où R est le rayon de la roue.

Dynamique de la masse m_2

La masse ne tourne pas, mais subit une accélération dont l'expression est donnée par la deuxième loi de Newton projetée selon $\vec{e}_x$:

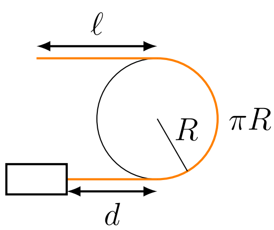


$$-T = m_2 a_2 \, .$$

(a) Nous avons obtenu un système de trois équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F + T & = & m_1 a_1 \, , \\ R(F - T) & = & I\dot{\omega} \, , \\ -T & = & m_2 a_2 \, . \end{array} \right.$$

Nous devons maintenant établir le lien entre a_1, a_2 et $\dot{\omega}$.
Si ℓ est la longueur du fil entre la roue et l'extrémité du fil et d la longueur du fil entre la roue et la masse, on a



$$\ell + \pi R + d = L \, .$$

Cela implique que

$$\dot{\ell} + \dot{d} = 0$$

(toute longueur prise sur l'un des morceaux se retrouve sur l'autre).

De plus, lorsque la roue tourne d'un angle φ, la longueur ℓ gagne $R\varphi$. Ainsi $\dot{\ell} = R\omega$.

Comme $d = x_2 - x_1$, x_2 et x_1 étant les positions respectives de m_2 et m_1, il vient

$$\ddot{\ell} + \ddot{d} = R\dot{\omega} + a_2 - a_1 = 0\,.$$

Notre système d'équations est donc finalement, avec $I = m_1 R^2$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} F+T &=& m_1 a_1\,, \\ F-T &=& m_1 R\dot{\omega}\,, \\ -T &=& m_2 a_2\,, \\ 0 &=& R\dot{\omega} + a_2 - a_1\,. \end{array}\right.$$

Résolution : variante I En éliminant T dans les deux premières équations, il vient

$$2F = m_1 a_1 + m_1 R\dot{\omega} = m_1(a_1 + R\dot{\omega})\,.$$

D'autre part, en réécrivant la deuxième équation à l'aide des deux dernières relations du système, on obtient

$$F + m_2 a_1 = (m_1 R + m_2 R)\,\dot{\omega}\,.$$

Les accélérations de translation et angulaire de la roue ont donc pour expression

$$a_1 = \frac{F}{m_1} \quad \text{et} \quad \dot{\omega} = \frac{F}{m_1 R}\,.$$

On remarque que $a_1 = R\dot{\omega}$, ce qui traduit bien le fait que la roue est entraînée par le fil lorsque ce dernier ne glisse pas sur celle-ci.
Finalement, l'accélération de la masse m_2 et la tension dans le fil sont quant à elles données par

$$a_2 = 0 \quad \text{et} \quad T = 0\,.$$

Résolution : variante II Eliminons pour commencer a_1, $\dot{\omega}$ et a_2 : multiplions l'éq. 1 par $\frac{1}{m_1}$, l'éq. 2 par $-\frac{1}{m_1}$, l'éq. 3 par $-\frac{1}{m_2}$ et additionnons les 4 équations. Il vient

$$\frac{1}{m_1}(F+T) - \frac{1}{m_1}(F-T) + \frac{1}{m_2}T = 0 \Rightarrow T = 0\,.$$

Ainsi

$$a_2 = 0 \qquad a_1 = R\dot{\omega} \qquad a_1 = \frac{F}{m_1} \qquad \dot{\omega} = \frac{F}{Rm_1}\,.$$

(b) Nous avons obtenu un système de trois équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} F+T &=& m_1 a_1\,, \\ R(F-T) &=& I\dot{\omega}\,, \\ -T &=& m_2 a_2\,. \end{array}\right.$$

Lorsque le fil glisse sur la roue, cette dernière n'est pas entraînée par le fil et $\dot{\omega} = 0$. Ainsi,

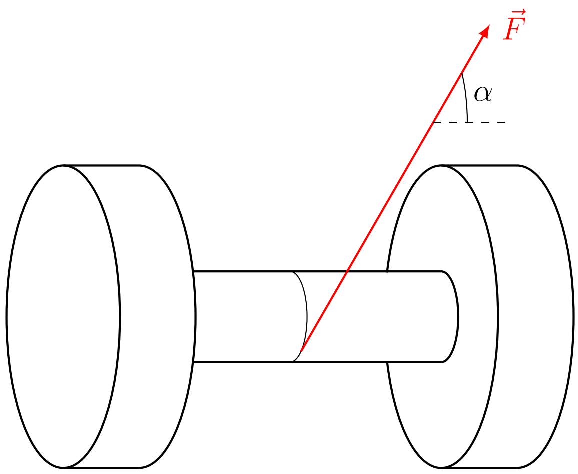
$$T = F\,.$$

Les accélérations de la roue m_1 et de la masse m_2 sont alors données par

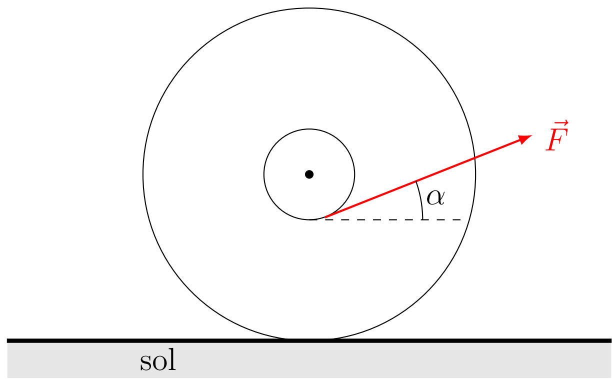
$$a_1 = \frac{2F}{m_1} \quad \text{et} \quad a_2 = -\frac{F}{m_2}\,.$$

Exercice 7

On considère l'objet "haltère" pour la **translation** (**deuxième loi de Newton**) et pour la **rotation** (**théorème du moment cinétique**).
Commençons par faire un dessin de l'haltère en trois dimensions :

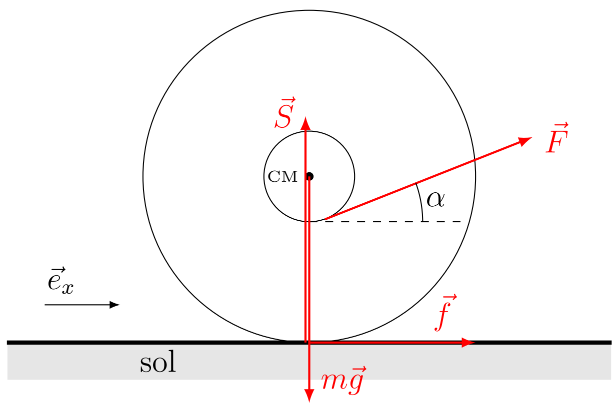


On peut également représenter l'haltère telle qu'elle apparaît perpendiculairement à son axe de rotation :



On note que le point de contact avec le support est plus éloigné du centre que le point de contact avec le fil.

Nous allons appliquer la **deuxième loi de Newton** à l'objet "haltère" :



Objet : haltère

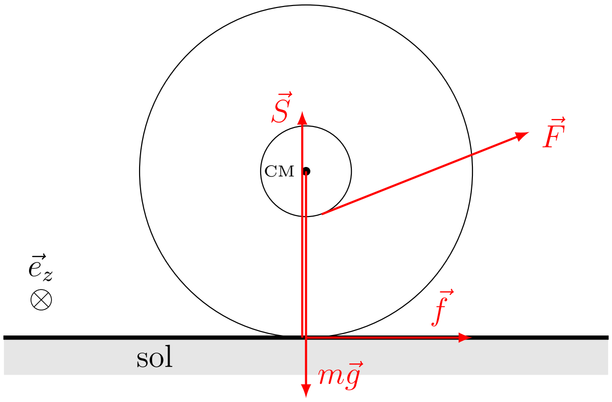
$$\vec{F} + \vec{f} + m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}_{\text{CM}} \,.$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$F\cos\alpha + f = ma_{\text{CM}} \,.$$

Il convient de remarquer que le sens de la force de frottement $\vec{f}$ n'est pas connu a priori. Dans l'équation ci-dessus, sa composante f selon $\vec{e}_x$ peut donc être positive ou négative.

Nous allons maintenant considérer le **théorème du moment cinétique** appliqué à l'objet "haltère" :



Rotation par rapport au CM :

$$\vec{M}_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}\dot{\vec{\omega}}\,.$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$-rF - Rf = I_{\text{CM}}\dot{\omega}\,.$$

Comme on suppose que le cylindre roule sans glisser, l'**équation de liaison** s'écrit :

$$a_{\text{CM}} = R\dot{\omega}\,.$$

On obtient le **sytème suivant** :

$$\left.\begin{array}{rcl} F\cos\alpha + f & = & mR\dot{\omega} \\ -rF - Rf & = & I_{\text{CM}}\dot{\omega} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad FR\cos\alpha - rF = mR^2\dot{\omega} + I_{\text{CM}}\dot{\omega}\,.$$

Ainsi,

$$F(R\cos\alpha - r) = (mR^2 + I_{\text{CM}})\dot{\omega}\,,$$

de sorte que l'accélération angulaire et l'accélération s'écrivent :

$$\dot{\omega} = \frac{R\cos\alpha - r}{mR^2 + I_{\text{CM}}}F \quad \text{et} \quad a_{\text{CM}} = R\dot{\omega} = \frac{R\cos\alpha - r}{mR^2 + I_{\text{CM}}}RF\,.$$

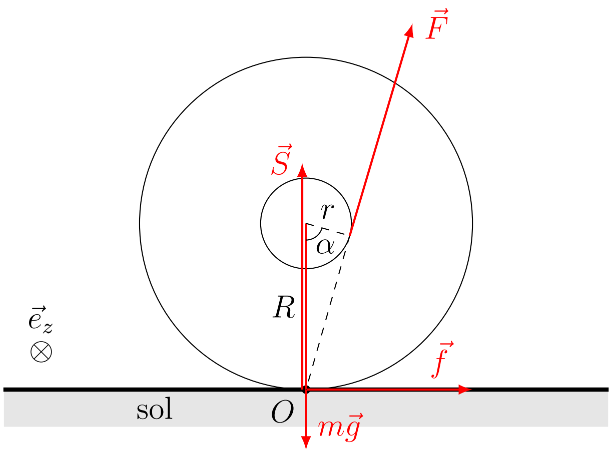
On peut alors trouver l'expression de la force de frottement :

$$\begin{aligned} f &= -\frac{rF}{R} - \frac{I_{\text{CM}}F}{R}\frac{R\cos\alpha - r}{mR^2 + I_{\text{CM}}} \\ &= -\frac{rmR + rI_{\text{CM}}/R + I_{\text{CM}}\cos\alpha - rI_{\text{CM}}/R}{mR^2 + I_{\text{CM}}}F \\ &= -\frac{rmR + I_{\text{CM}}\cos\alpha}{mR^2 + I_{\text{CM}}}F\,. \end{aligned}$$

Il est intéressant de discuter le signe de l'accélération de manière à caractériser complètement le mouvement de l'haltère :

- Si $R\cos\alpha - r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha > \frac{r}{R}$ (situation où $|\alpha|$ est petit), l'accélération est dirigée vers la droite et la force de frottement vers la gauche ($f < 0$).
- Si $R\cos\alpha - r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{r}{R}$, l'haltère est immobile et la force de frottement est vers la gauche ($f = -\frac{r}{R}F$).
- Si $R\cos\alpha - r < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha < \frac{r}{R}$ (situation où $|\alpha|$ est grand), l'accélération est dirigée vers la gauche et la force de frottement est vers la gauche ou la droite selon le moment d'inertie.

On se convainc facilement de l'existence de ces trois situations en considérant le moment des forces extérieures par rapport au point de contact O avec le support.



Le moment des forces $\vec{S}$, $m\vec{g}$ et $\vec{f}$ est toujours nul par rapport à ce point. A l'équilibre, le moment de $\vec{F}$ doit donc être nul, ce qui signifie que le support de $\vec{F}$ (tangent au cylindre intérieur) passe par O, d'où $\cos\alpha = \frac{r}{R}$.