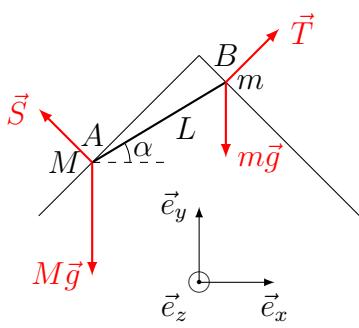


Physique

Semestre de printemps 2025

Guido Burmeister

<https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15142>**Corrigé 2****Exercice 1**

Objet : le cadre

Forces : poids, soutiens exercés par les plans

A l'équilibre, pour la translation,

$$M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{T} = \vec{0}$$

et pour la rotation par rapport à A,

$$\vec{M}_A = \vec{M}_A(M\vec{g}) + \vec{M}_A(m\vec{g}) + \vec{M}_A(\vec{S}) + \vec{M}_A(\vec{T}) = \vec{0}.$$

Pour la translation,

- selon \vec{e}_x :

$$-S \frac{1}{\sqrt{2}} + T \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S = T,$$

- selon \vec{e}_y :

$$-Mg - mg + S \frac{1}{\sqrt{2}} + T \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S = T = \frac{(M+m)g}{\sqrt{2}}.$$

Les quatre moments de force sont normaux au plan de vue :

- $\vec{M}_A(M\vec{g})$ et $\vec{M}_A(\vec{S})$ sont nuls (bras de levier nuls)
- $\vec{M}_A(m\vec{g})$ est entrant (bras de levier b)
- $\vec{M}_A(\vec{T})$ est sortant (bras de levier c)

$$\underbrace{\vec{M}_A(M\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_A(m\vec{g})}_{\otimes} + \underbrace{\vec{M}_A(\vec{S})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_A(\vec{T})}_{\odot} = \vec{0}.$$

Ainsi, selon $\odot \vec{e}_z$ (sortant),

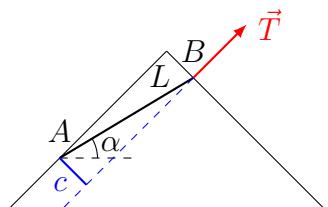
$$-bmg + cT = 0.$$

Déterminons les bras de levier :

- Bras de levier de $m\vec{g}$: projection de la tige sur l'horizontale (normale à $m\vec{g}$),

$$b = L \cos \alpha.$$

- Bras de levier de \vec{T} : projection de la tige sur la normale à \vec{T} ,



$$c = L \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}).$$

Finalement,

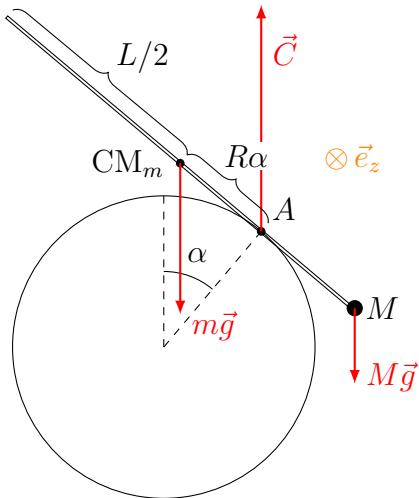
$$\begin{aligned}
 & bmg - cT = 0 \\
 \Leftrightarrow & Lmg \cos \alpha - L \frac{(M+m)g}{\sqrt{2}} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{2}m \cos \alpha - (M+m) (\cos \alpha \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin \alpha \sin(\frac{\pi}{4})) = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2m \cos \alpha - (M+m)(\cos \alpha - \sin \alpha) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (M+m) \sin \alpha - (M-m) \cos \alpha = 0 \\
 \Leftrightarrow & \tan \alpha = \frac{M-m}{M+m}.
 \end{aligned}$$

Discussion: considérons les cas limites pour

$$\tan \alpha = \frac{M-m}{M+m} = \frac{1 - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}}.$$

- $\frac{m}{M} = 1$: $\tan \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Le cadre est horizontal.
- $\frac{m}{M} = 0$: $\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$. Le cadre est parallèle au plan de gauche.
- $\frac{m}{M} \rightarrow \infty$: $\tan \alpha \rightarrow -1 \Rightarrow \alpha \rightarrow -\frac{\pi}{4}$. Le cadre est parallèle au plan de droite.

Exercice 2



Objet : barre m et masse M

Forces : poids, contact (soutien et frottement)

Newton :

$$m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{C} = \vec{0}.$$

Rem. : la somme des forces étant nulle, le contact est vertical.

Rotation p.r. à A :

$$\underbrace{\vec{M}_A(m\vec{g})}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_A(M\vec{g})}_{\otimes} + \underbrace{\vec{M}_A(\vec{C})}_{\vec{0}} = \vec{0}.$$

Selon e_z :

$$-R\alpha \cos \alpha mg + \left(\frac{L}{2} - R\alpha \right) \cos \alpha Mg = 0.$$

Comme $\cos \alpha = 0$ est impossible,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{L}{2} - R\alpha \right) M &= R\alpha m \\
 \alpha &= \frac{L}{2R} \frac{M}{M+m}.
 \end{aligned}$$

Remarque : le CM de l'objet est nécessairement sur le point de contact A . En effet, le moment de \vec{C} par rapport à A étant nul, celui du poids total l'est également : le CM du tout doit être à la verticale de A . Comme il est aussi sur la barre, il est en A . En

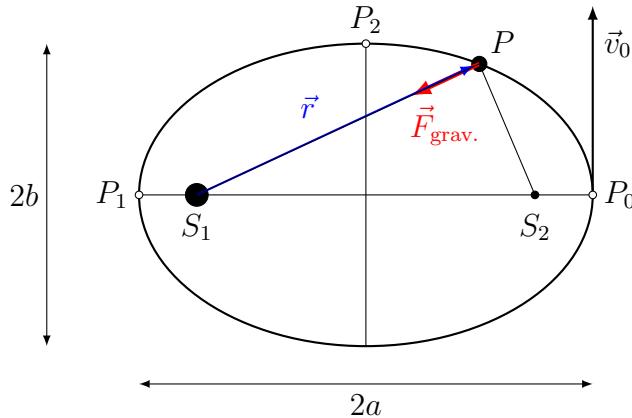
choisissez l'origine en A , la position du centre de masse du tout est le vecteur nul. Avec un repère \vec{e}_s parallèle à la barre,

$$(m + M)s_{\text{CM}} = Ra\alpha m - \left(\frac{L}{2} - Ra \right) M = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{L}{2R} \frac{M}{M + m}.$$

Exercice 3

Nous allons exploiter le théorème du moment cinétique. La démarche est analogue à celle qui conduit à la deuxième loi de Kepler affirmant que la vitesse aréolaire d'une planète est constante.

Nous allons faire l'hypothèse que la planète ne subit qu'une seule force : la force de gravitation $\vec{F}_{\text{grav.}}$ exercée par l'astre. Cette force est dirigée de la planète vers l'astre :



La force de gravitation $\vec{F}_{\text{grav.}}$ est une force centrale : elle est toujours dirigée vers le même point S_1 . En choisissant comme origine le point S_1 , les vecteurs position \vec{r} et force $\vec{F}_{\text{grav.}}$ sont en tout temps parallèles.

Ainsi, le moment de la force est toujours nul :

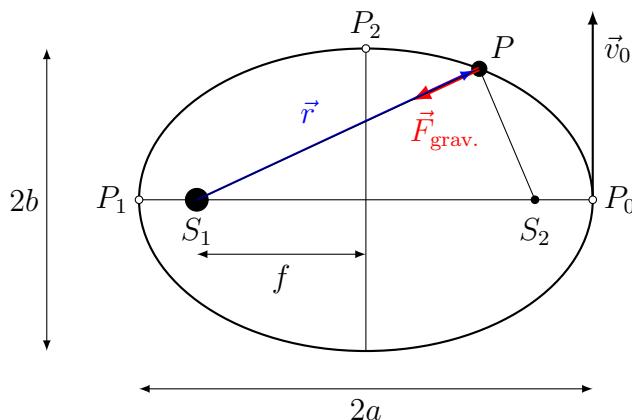
$$\vec{M}_{S_1} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{grav.}} = \vec{0}.$$

Le théorème du moment cinétique permet alors d'affirmer que

$$\dot{\vec{L}}_{S_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L}_{S_1} = \vec{r} \times m\vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}},$$

où m est la masse de la planète.

Pour pouvoir exploiter la conservation du moment cinétique durant le mouvement de la planète autour de l'astre, il est nécessaire de déterminer les vecteurs positions aux points P_1 et P_2 . En particulier, nous allons avoir besoin de la distance f séparant l'astre du centre de l'ellipse.



En utilisant la contrainte $\overline{S_1P} + \overline{S_2P} = 2a$ définissant l'ellipse pour le point P_2 , on constate que

$$f^2 + b^2 = a^2 \implies f = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

La conservation du moment cinétique permet alors d'écrire, selon la direction perpendiculaire au plan du mouvement,

$$(a + f)mv_0 = (a - f)mv_1 = bm v_2.$$

Ainsi, les vitesses aux points P_1 (périhélie) et P_2 sont, respectivement, données par

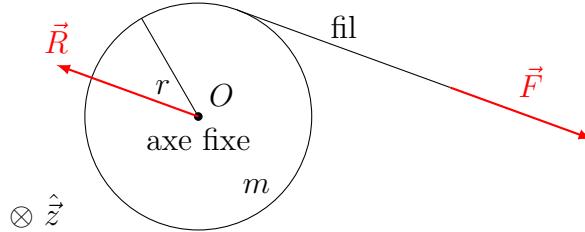
$$v_1 = \frac{a + f}{a - f} v_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} v_0 \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{a + f}{b} v_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} v_0.$$

Numériquement, dans le cas de la Terre en orbite autour du Soleil, on obtient

$$v_1 = 30.29 \text{ km/s} \quad \text{et} \quad v_2 = 29.78 \text{ km/s}.$$

Exercice 4

On commence par faire un schéma de la situation :



On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Le CM du cerceau ne se déplace pas et la somme des forces exercées sur le cerceau est donc nulle : le poids du cerceau (de masse m et de rayon r) est compensé par une force de soutien au niveau de l'axe et \vec{F} par un second soutien \vec{R} horizontal.

Nous pouvons alors écrire, pour le cerceau par rapport à son centre O ,

$$\vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha},$$

où $\alpha \equiv \dot{\omega}$ est l'accélération angulaire. Selon \hat{z} , on a donc

$$\tau_O = rF = I_O\alpha,$$

où $F = \|\vec{F}\|$ et $I_O = mr^2$. L'accélération angulaire α est constante et vaut

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{rF}{I_O} = \frac{rF}{mr^2} = \frac{F}{mr} = 200 \text{ s}^{-2}.$$

Comme l'accélération angulaire est constante, on peut s'inspirer des équations du mouvement uniformément accéléré pour trouver l'expression de la vitesse angulaire :

$$\omega(t) = \alpha_0 t + \omega_0 = \frac{F}{mr} t,$$

où l'on a tenu compte de la condition initiale $\omega(t = 0) = 0$ pour fixer ω_0 : $\omega_0 = 0 \text{ s}^{-1}$. La vitesse angulaire après un temps t_1 est donc

$$\omega_1 = \omega(t_1) = \frac{F}{mr} t_1 = 1000 \text{ s}^{-1}.$$

L'angle de rotation au temps t pour la condition initiale $\theta(t = 0) = 0$ est donné par

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{F}{mr}}_{=\dot{\omega}=\text{cste}} t^2.$$

L'angle après un temps t_1 est ainsi

$$\theta_1 = \theta(t_1) = \frac{Ft_1^2}{2mr} = 2500,$$

ce qui correspond à un nombre de tours

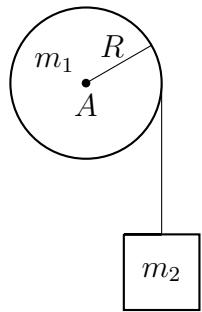
$$n_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{Ft_1^2}{4\pi mr} \cong 398 \text{ tours}.$$

Exercice 5

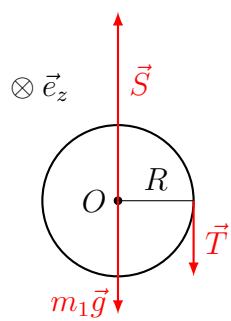
Il n'est pas judicieux de choisir comme objet “cylindre et contrepoids”, ces deux parties ne bougeant pas de la même manière. Ainsi,

- on considère tour à tour le cylindre et la masse ;
- on établit la liaison géométrique entre leurs mouvements.

Il est primordial (comme toujours) de faire un dessin convenable de la situation :



Notons que l'axe de rotation A du cylindre est fixe.



Objet : cylindre

Forces : poids, soutien, tension

Comme le CM est au repos, il n'est pas nécessaire de considérer la translation.

Rotation autour de O :

$$\vec{M}_O = \underbrace{\vec{M}_O(m_1\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{S})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{T})}_{\otimes} = I_O \dot{\vec{\omega}}$$

Selon \vec{e}_z :

$$RT = I_0 \dot{\omega}.$$

Objet : contrepoids

Forces : poids, tension

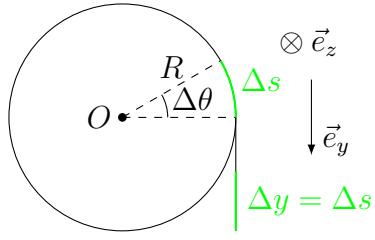
$$m_2\vec{g} - \vec{T} = m_2\vec{a}_2$$

Selon \vec{e}_y :

$$m_2g - T = m_2a_2.$$

Pour établir les équations de liaison, on peut considérer un petit angle de rotation du cylindre et déterminer le mouvement correspondant du contrepoids :

-



Si la poulie tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par \vec{e}_z , le fil se déroule et le contrepoids se déplace de $\Delta y = R\Delta\theta$ dans le sens donné par \vec{e}_y .

- La variation par rapport au temps (dérivée) donne alors la liaison entre les vitesses :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Leftrightarrow v_2 = R\omega.$$

- La variation des vitesses par rapport au temps (dérivée) donne ensuite la liaison entre les accélérations :

$$a_2 = R\dot{\omega}.$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} RT = I_O\dot{\omega} \\ m_2g - T = m_2a_2 \\ a_2 = R\dot{\omega}. \end{cases}$$

Il est souvent plus simple de d'abord exprimer les accélérations en fonction de $\dot{\omega}$ ($a_2 = R\dot{\omega}$) et de résoudre le système

$$\left. \begin{cases} RT = I_O\dot{\omega} \\ m_2g - T = m_2R\dot{\omega} \end{cases} \right| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot R \end{array}$$

en amplifiant les équations respectivement par 1 et par R , de sorte que l'addition membre à membre fasse tomber les termes en T , inconnue non recherchée. On obtient alors

$$m_2gR = (I_O + m_2R^2)\dot{\omega}.$$

Avec $I_O = \frac{1}{2}m_1R^2$ pour un cylindre plein, il vient

$$\dot{\omega} = \frac{m_2gR}{I_O + m_2R^2} = \frac{2m_2g}{(m_1 + 2m_2)R}$$

et donc

$$a_2 = R\dot{\omega} = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g > 0.$$

Le contrepoids accélère vers le bas avec une accélération inférieure à g :

$$a_2 = R\dot{\omega} = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g = \frac{1}{\frac{m_1}{2m_2} + 1} g < g.$$

Remarque : on est libre de choisir les repères comme on veut. Par exemple, avec le même choix de \vec{e}_z entrant et le choix (différent) de \vec{e}_y vers le haut, les projections et équations de liaison sont modifiées comme suit.

$$\begin{cases} RT = I_O\dot{\omega} & (\text{inchangée}) \\ -m_2g + T = m_2a_2 & (\text{modifiée}) \\ a_2 = -R\dot{\omega} & (\text{modifiée}). \end{cases}$$

Avec $a_2 = -R\dot{\omega}$, il vient

$$\left. \begin{cases} RT = I_O\dot{\omega} \\ -m_2g + T = -m_2R\dot{\omega} \end{cases} \right| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-R) \end{array}$$

En amplifiant les équations respectivement par 1 et par $-R$, de sorte que l'addition membre à membre fasse tomber les termes en T , inconnue non recherchée, on obtient alors

$$m_2 g R = (I_O + m_2 R^2) \dot{\omega}$$

et donc, comme ci-dessus,

$$\dot{\omega} = \frac{m_2 g R}{I_O + m_2 R^2}$$

mais

$$a_2 = -R\dot{\omega} = -\frac{m_2 R^2}{I_O + m_2 R^2} g < 0.$$

Toutefois, le contrepoids accélère bien vers le bas, \vec{e}_y étant orienté vers le haut.

Connaissant l'accélération, on peut (en principe...) en déduire la vitesse et la position à chaque instant. On considère alors l'instant correspondant à la distance parcourue.

L'accélération du contrepoids est constante. On sait que la vitesse est linéaire dans le temps et la position quadratique (accélération = dérivée de la vitesse, vitesse = dérivée de la position). Pour le contrepoids, avec un choix de l'origine à l'endroit où la vitesse est nulle ($t_0 = 0$), nous obtenons l'évolution temporelle selon \vec{e}_y :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g = \text{cte} \\ v_2(t) &= a_2 t \quad \text{car } v_2(0) = 0 \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} a_2 t^2 \quad \text{car } y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Déterminons l'instant correspondant à une descente h . Notons t_h l'instant auquel le contrepoids a parcouru une distance verticale h :

$$y_2(t_h) = \frac{1}{2} a_2 t_h^2 = h \Rightarrow t_h = \sqrt{\frac{2h}{a_2}}.$$

Nous obtenons alors la vitesse à cet instant :

$$v_2(t_h) = a_2 t_h = \sqrt{2ha_2} = \sqrt{\frac{4hm_2g}{m_1 + 2m_2}}.$$

Autre méthode de résolution : comme nous cherchons une relation entre une position et une vitesse (sans être intéressés par le temps), nous pouvons imaginer exploiter le théorème de l'énergie cinétique pour les instants $t_0 = 0$ et t_h correspondant à un déplacement vertical h .

Intéressons-nous d'abord au contrepoids soumis à son poids et à la tension \vec{T} :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(t_h) - E_{\text{cin}}(t_0) &= W_{0 \rightarrow h}(m_2 \vec{g}) + W_{0 \rightarrow h}(-\vec{T}) \\ \frac{1}{2} m_2 v_h^2 - 0 &= m_2 gh + W_{0 \rightarrow h}(-\vec{T}). \end{aligned}$$

Comme le travail de la tension est inconnu, nous sommes amenés à considérer également la poulie soumise à son poids, au soutien et à la tension \vec{T} :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(t_h) - E_{\text{cin}}(t_0) &= W_{0 \rightarrow h}(m_1 \vec{g}) + W_{0 \rightarrow h}(\vec{S}) + W_{0 \rightarrow h}(\vec{T}) \\ \frac{1}{2} I_O \omega_h^2 - 0 &= W_{0 \rightarrow h}(\vec{T}). \end{aligned}$$

Les travaux de la tension sur le contrepoids et la poulie étant égaux et opposés, nous avons par addition

$$\frac{1}{2}m_2v_h^2 + \frac{1}{2}I_O\omega_h^2 = m_2gh.$$

Avec l'équation de liaison $v_2 = R\omega$, nous obtenons finalement

$$\frac{1}{2}m_2v_h^2 + \frac{1}{2}I_O\frac{v_h^2}{R^2} = \frac{1}{2}m_2v_h^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1R^2\frac{v_h^2}{R^2} = \left(\frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1\right)v_h^2 = m_2gh$$

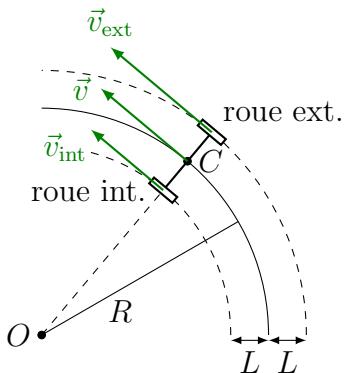
et donc

$$v_h = \sqrt{\frac{4m_2gh}{2m_2 + m_1}}.$$

Exercice 6

Pour bien comprendre l'exercice, il est nécessaire de visualiser sur des dessins le mouvement de la voiture et celui des roues.

La voiture fait un virage : l'axe des roues arrière effectue une rotation autour du centre du virage. Quel est le mouvement du centre de chacune des roues ?



La vitesse de rotation du centre de l'axe C autour du centre du virage O vaut

$$v = R\Omega \Leftrightarrow \Omega = \frac{v}{R}.$$

Les roues extérieure et intérieure (leurs centres) ne se déplacent pas à la même vitesse que C :

$$v_{\text{ext}} > v > v_{\text{int}}.$$

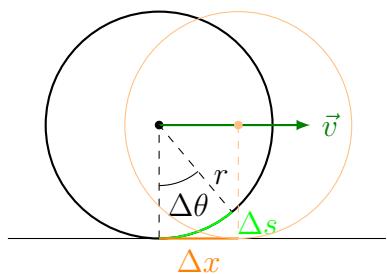
Le centre des roues se déplace sur un arc de cercle de rayon respectif

$$R_{\text{ext}} = R + L \quad \text{et} \quad R_{\text{int}} = R - L,$$

avec la même vitesse angulaire Ω que C . Ainsi

$$\begin{aligned} v_{\text{ext}} &= (R + L)\Omega = \frac{R + L}{R}v \\ v_{\text{int}} &= (R - L)\Omega = \frac{R - L}{R}v. \end{aligned}$$

D'autre part, la vitesse d'une roue roulant sans glisser est liée à la vitesse angulaire autour de son centre :



Si une roue de rayon r fait une rotation d'un angle $\Delta\theta$ autour de son axe pendant une durée Δt , elle "déroule" sur le sol la longueur d'arc $\Delta s = r\Delta\theta$ correspondante. Le centre de la roue avance donc d'autant :

$$\Delta x = \Delta s = r\Delta\theta.$$

Dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$, le quotient par Δt donne la relation entre vitesse (selon l'horizontale) et vitesse angulaire :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = r \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} v = r\omega.$$

Ainsi, pour les roues extérieure et intérieure,

$$\begin{aligned}\omega_{\text{ext}} &= \frac{v_{\text{ext}}}{r} = \frac{R+L}{Rr}v \\ &\text{et} \\ \omega_{\text{int}} &= \frac{v_{\text{int}}}{r} = \frac{R-L}{Rr}v.\end{aligned}$$

Le nombre de tours effectués par chacune des roues est donné par la distance parcourue par leur centre.

Sur le quart de tour, la distance parcourue par le centre des roues est

$$\begin{aligned}d_{\text{ext}} &= (R+L)\frac{\pi}{2} \\ d_{\text{int}} &= (R-L)\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

L'angle de rotation correspondant vaut

$$\begin{aligned}\theta_{\text{ext}} &= \frac{d_{\text{ext}}}{r} = \frac{R+L}{r}\frac{\pi}{2} \\ \theta_{\text{int}} &= \frac{d_{\text{int}}}{r} = \frac{R-L}{r}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Enfin, l'angle de rotation pour un tour étant 2π , le nombre de tours effectués est

$$\begin{aligned}n_{\text{ext}} &= \frac{\theta_{\text{ext}}}{2\pi} = \frac{R+L}{4r} \\ n_{\text{int}} &= \frac{\theta_{\text{int}}}{2\pi} = \frac{R-L}{4r}.\end{aligned}$$

Exercice 7

Nous allons exploiter le lien entre moment de force et accélération angulaire. En choisissant \hat{z} pointant dans le plan de la feuille ($\hat{z} \otimes$), nous pouvons écrire, par rapport à l'axe de rotation,

$$\begin{aligned}M &= -RF = -kR\omega \\ &= I\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha.\end{aligned}$$

Comme $\alpha = \alpha(t) = \dot{\omega}(t)$, on obtient alors l'équation différentielle

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{2k}{mR}\omega(t).$$

On devine que la vitesse angulaire $\omega(t)$ solution de cette équation différentielle est une fonction de type exponentielle. On va donc poser, dans le cas le plus général,

$$w(t) = Ae^{Bt},$$

où A et B sont des constantes.

L'accélération angulaire s'écrit alors

$$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = BAe^{Bt} = B\omega(t).$$

On obtient alors que $A = \omega(0) = \omega_0$ et $B = -\frac{2k}{mR}$.

L'évolution de la vitesse angulaire est ainsi donnée par

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{2k}{mR}t}.$$