Physique — Guido Burmeister

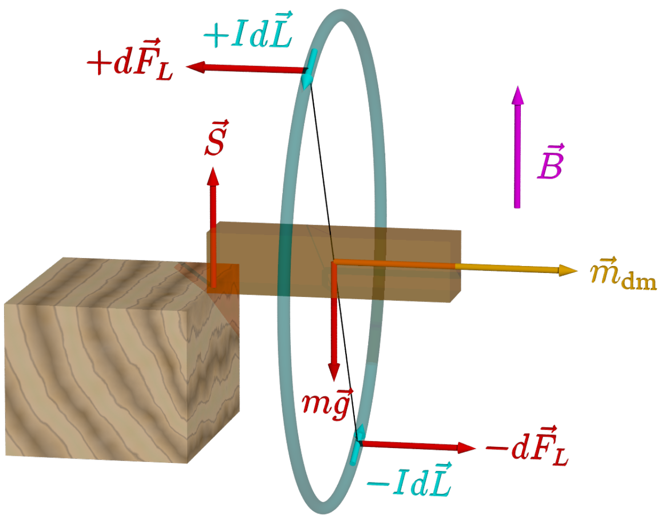
Semestre de printemps 2025

https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15142

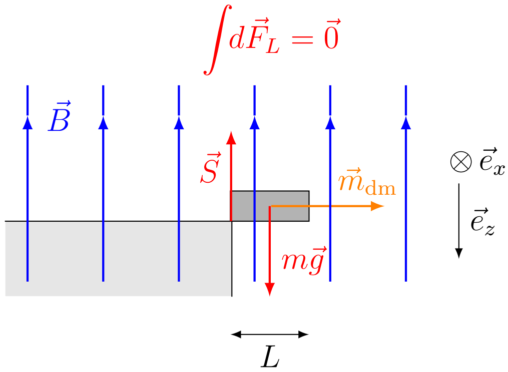
Corrigé 12

Exercice 1

Nous allons étudier l'objet “aimant” du point de vue de la translation et de la rotation. Les forces s'exerçant sur l'objet “aimant” sont : son poids, le soutien du sol et les forces de Laplace :



Nous savons que l'aimant possède un moment dipolaire magnétique $\vec{m}_{\mathrm{dm}}$. Il peut ainsi être identifié à une boucle de courant s'orientant dans le champ magnétique $\vec{B}$: le vecteur $\vec{m}_{\mathrm{dm}}$ tend à s'aligner sur le champ $\vec{B}$ et est à l'origine d'un moment de force $\vec{M}_L$ ayant pour effet de redresser l'aimant posé sur le sol. Par rapport au centre de masse de l'aimant, ce moment s'écrit $\vec{M}_L = \vec{m}_{\mathrm{dm}} \wedge \vec{B}$. Ainsi, en supposant que le vecteur $\vec{m}_{\mathrm{dm}}$ est vers la droite, le champ magnétique vertical $\vec{B}$ doit être vers le haut pour que l'aimant puisse être à l'équilibre (du point de vue de la rotation) :



Remarquons que du point de vue de la translation (deuxième loi de Newton), nous pouvons écrire, en projetant selon le repère $\vec{e}_z$,

$$mg - S + 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = mg\,.$$

En effet, les forces de Laplace agissant sur chaque élément $d\vec{L}$ de la boucle de courant représentant l'aimant se compensent deux à deux. La résultante est donc nulle, alors que le moment résultant est différent de zéro :

$$\int d\vec{F}_L = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{m}_{\text{dm}} \wedge \vec{B} \neq \vec{0}\,.$$

L'équilibre de l'aimant pour la rotation par rapport à son centre de masse (qui est également le point où s'applique la force $m\vec{g}$) se traduit par la relation

$$\sum \vec{M}_{\text{CM}} = \vec{r}_S \wedge \vec{S} + \vec{m}_{\text{dm}} \wedge \vec{B} + \vec{0} = \vec{0}\,.$$

En projetant selon un repère entrant $\vec{e}_x$, il vient, avec $S = mg$,

$$\frac{L}{2}mg - m_{\text{dm}}B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_{\text{dm}}B = \frac{L}{2}mg\,.$$

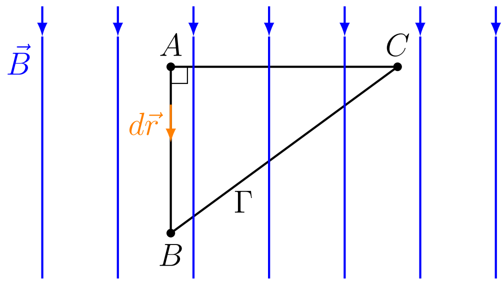
Le champ magnétique a donc pour intensité

$$B = \frac{Lmg}{2m_{\text{dm}}}\,.$$

Exercice 2

Nous allons calculer explicitement la circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long de chacun des côtés du triangle ABC.

Nous considérons un triangle ABC dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$:



La circulation du champ magnétique le long de la courbe fermée Γ définie par le triangle ABC s'écrit

$$\begin{aligned} C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{r} &= \int_A^B \vec{B}\cdot d\vec{r} + \int_B^C \vec{B}\cdot d\vec{r} + \int_C^A \vec{B}\cdot d\vec{r} \\ &= \vec{B}\cdot\overrightarrow{AB} + \vec{B}\cdot\overrightarrow{BC} + \vec{B}\cdot\overrightarrow{CA}\,, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que le champ magnétique $\vec{B}$ est constant pour passer de la première ligne à la seconde.

On détermine séparément les trois termes intervenant le calcul de C_Γ :

- Comme le segment $\overrightarrow{AB}$ a la même direction que $\vec{B}$ et est de même sens, nous avons

  $$\vec{B}\cdot\overrightarrow{AB} = BL\,,$$

  où $L = ||\overrightarrow{AB}||$.

- Le produit scalaire $\vec{B} \cdot \overrightarrow{BC}$ peut être vu comme la projection de $\overrightarrow{BC}$ le long de $\vec{B}$, multipliée par la norme de $\vec{B}$. Autrement dit, le deuxième terme de la circulation s'écrit
$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{BC} = -BL\,.$$
- Comme le segment $\overrightarrow{CA}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, il vient
$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{CA} = 0\,.$$

Ainsi, la circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long du triangle ABC (c'est-à-dire le long de la courbe Γ) est nulle :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = BL - BL + 0 = 0\,.$$

Ce résultat n'est pas étonnant, dans la mesure où la courbe Γ n'enlace aucun courant.

Remarque
Comme le champ magnétique est uniforme, nous aurions pu directement écrire :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = \vec{B} \cdot \oint_\Gamma d\vec{r} = \vec{B} \cdot \vec{0} = 0\,.$$

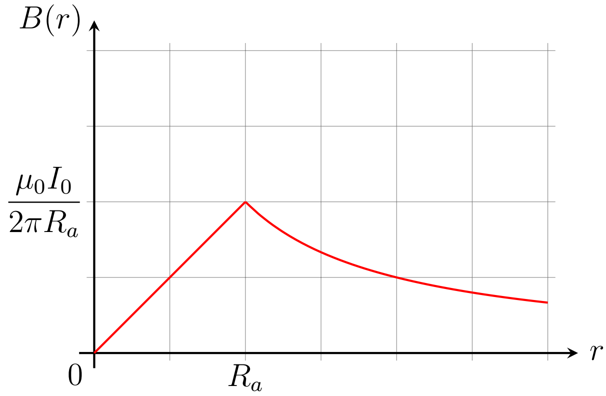
Exercice 3
Nous allons exploiter la loi d'Ampère en choisissant judicieusement une courbe fermée.

La symétrie axiale implique que les lignes de champ sont des cercles normaux au câble et centrés sur son axe. En écrivant la loi d'Ampère selon une ligne de champ de rayon r, il vient
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = B2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}\,.$$

(a)

- Pour $r > R_a$: le courant enlacé correspond à l'intégralité du courant qui circule dans le câble,
$$I_{\text{enlacé}} = I_0\,.$$
Le champ magnétique a alors pour expression
$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\,.$$
- Pour $0 \leq r \leq R_a$: le courant enlacé est proportionnel à la surface du disque de rayon r,
$$I_{\text{enlacé}} = I_0 \frac{\pi r^2}{\pi R_a^2}\,.$$
Dans ce cas, le champ magnétique s'écrit
$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{r}{R_a^2}\,.$$

La représentation graphique du champ $B(r)$ est donc



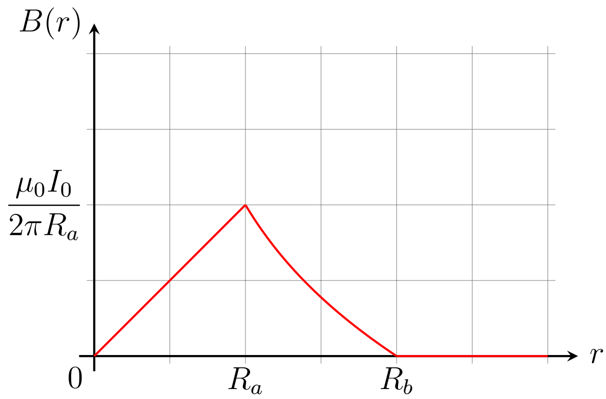
(b)

- Pour $0 \leq r \leq R_a$: le courant enlacé est proportionnel à la surface du disque de rayon r,
$$I_{\text{enlacé}} = I_0 \frac{\pi r^2}{\pi R_a^2} \, ,$$
si bien que le champ magnétique est proportionnel à r :
$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{r}{R_a^2} \, .$$

- Pour $R_a < r \leq R_b$: le courant enlacé est I_0, diminué d'un courant proportionnel à la surface de la couronne de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur r,
$$I_{\text{enlacé}} = I_0 - I_0 \frac{\pi(r^2 - R_a^2)}{\pi(R_b^2 - R_a^2)} \, ,$$
et le champ magnétique est donné par
$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{R_b^2 - r^2}{R_b^2 - R_a^2} \, .$$

- Pour $r > R_b$: le courant enlacé est nul,
$$I_{\text{enlacé}} = 0.$$
Il en va alors de même pour le champ magnétique :
$$B(r) = 0 \, .$$

La représentation graphique du champ $B(r)$ est ainsi



Exercice 4

Nous allons nous intéresser aux opérations sur le fil (symétries, translations, rotations, ...) laissant le champ magnétique invariant.

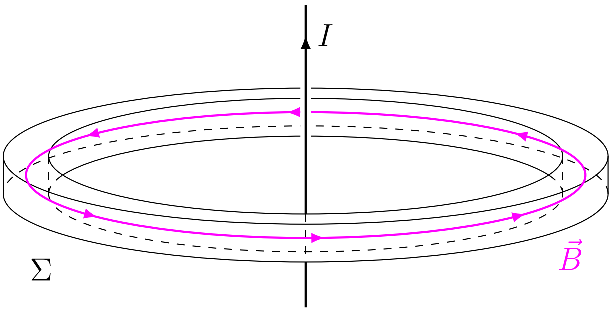
Les opérations laissant le champ magnétique invariant sont

- la translation parallèle au fil rectiligne infini,
- la rotation d'axe donné par le fil.

Il s'agit donc d'une symétrie axiale.

Les surfaces fermées ayant cette symétrie sont les cylindres et les couronnes d'axe donné par le fil.

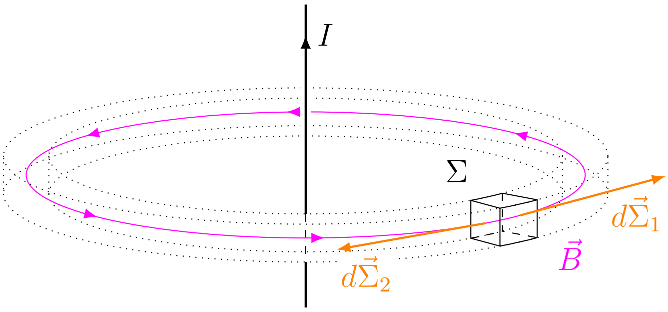
Considérons le cas d'une couronne :



Les lignes de champ sont circulaires : elles ne coupent pas Σ.
Le flux du champ magnétique à travers Σ est donc nul :

$$\Psi_\Sigma = \int_\Sigma d\Psi = \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0\,.$$

Nous pouvons également nous pencher sur le cas d'une portion de couronne :



Les lignes de champ ne coupent Σ que sur les faces Σ_1 ("arrière") et Σ_2 ("avant").

Le flux se calcule alors comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} &= \int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} + \int_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} \\ &= \int_{\Sigma_1} B\, d\Sigma - \int_{\Sigma_2} B\, d\Sigma \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

le champ $\vec{B}$ étant, pour le fil rectiligne et infini, de même intensité en tout point d'une ligne de champ.

Remarque
Toute surface fermée peut être divisée en petites portions de couronne comme ci-dessus. On en déduit que le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nulle. Ce résultat est général et ne dépend pas de la "forme" du champ $\vec{B}$.