Physique — Guido Burmeister

Semestre de printemps 2025

https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15142

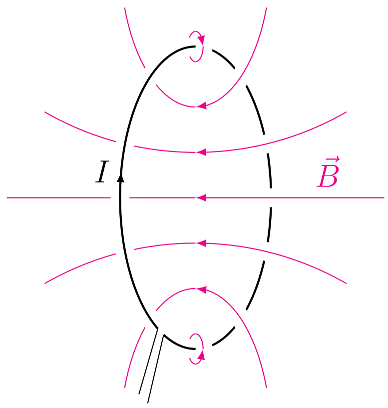
Corrigé 10

Exercice 1

Une spire étant formé d'un fil, on peut adapter la situation du fil rectiligne à celle d'un fil courbé.

Considérons la spire comme formée de petits bouts de fils traversés par le courant. Le champ magnétique est la superposition des champs dus à chacun de ces petits bouts. Son sens est déterminé en appliquant la règle du tire-bouchon.

Dans la spire, tous les champs individuels sont de même sens : selon la règle du tire-bouchon, pour le cas où la partie gauche de la spire est en avant, les lignes de champ traversent la spire de la droite vers la gauche (voir esquisse en page suivante).

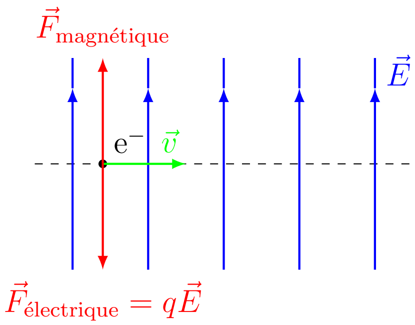


Hors de la spire, les champs individuels se compensent partiellement. Le champ dû aux bouts de fil les plus proches est dominant.
Selon la règle du tire-bouchon, pour le cas où la partie gauche de la spire est en avant, les lignes de champ se referment hors de la spire, de gauche à droite dans le plan de la spire.

Exercice 2

Comme d'habitude, il convient de faire un dessin et de répertorier les forces s'exerçant sur l'électron ainsi que les caractéristiques de ces dernières.
Nous allons négliger la force de la gravitation.

Supposons que le champ électrique est dirigé vers le haut. La force électrique que ressent l'électron pousse ce dernier vers le bas (un électron est chargé négativement : $q = -e$). La force magnétique doit donc être dirigée vers le haut :

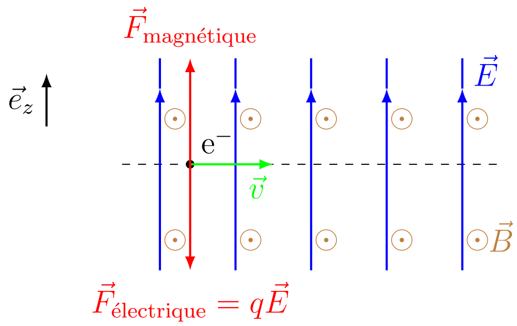


L'électron suit alors une trajectoire rectiligne (mouvement rectiligne uniforme à vitesse constante $\vec{v}$).

La force magnétique (force de Lorentz) que ressent l'électron a pour expression :

$$\vec{F}_{\text{magnétique}} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}\,.$$

Par conséquent, si la vitesse $\vec{v}$ de l'électron est dirigée vers la droite, le champ magnétique $\vec{B}$ doit être perpendiculaire au plan de la feuille et sortant : $\odot\vec{B}$



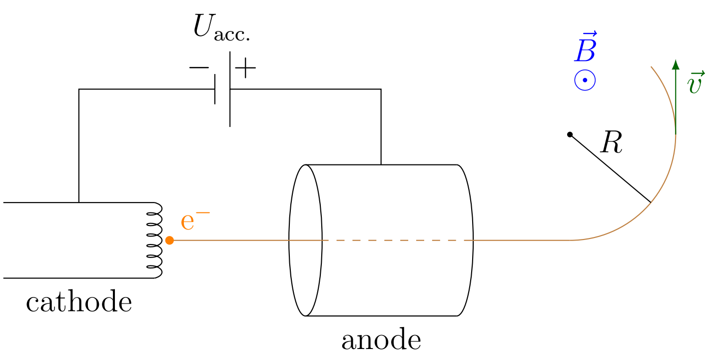
L'intensité $B = ||\vec{B}||$ du champ magnétique est donnée par la deuxième loi de Newton projetée selon la verticale $\vec{e}_z$:

$$q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{E}{v}\,.$$

Exercice 3

Nous allons commencer par faire un dessin. Nous pourrons alors décrire la phase d'accélération des électrons, avant de nous intéresser à celle durant laquelle le faisceau est dévié.

Les électrons sont accélérés par une tension $U_{\text{acc.}}$ entre l'anode et la cathode, avant d'être dévié par un champ magnétique $\vec{B}$:



Nous allons utiliser le théorème de l'énergie cinétique en supposant que les électrons ont initialement une vitesse nulle et que la seule force intervenant est la force électrique :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_{\text{acc.}}(\vec{F}_{\text{él.}}) = e\,U_{\text{acc.}}\,,$$

où v est la vitesse des électrons après la phase d'accélération. Cette vitesse est donc donnée par

$$v = \sqrt{\frac{2eU_{\text{acc.}}}{m}}\,.$$

Dans le champ magnétique $\vec{B}$ (ici perpendiculaire au faisceau), les électrons subissent la force de Lorentz

$$\vec{F}_{\text{Lor.}} = -e\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

qui est perpendiculaire à la vitesse. L'accélération des électrons est donc normale à la trajectoire :

$$\vec{F}_{\text{Lor.}} = m\vec{a} = m\vec{a}_n\,.$$

En projetant cette équation selon la normale à la trajectoire, il vient

$$evB = m\frac{v^2}{R}\,,$$

si bien que le champ magnétique a finalement pour expression

$$\begin{aligned} B &= \frac{mv}{eR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2m\,U_{\text{acc.}}}{e}} \\ &\cong \frac{1}{0.1}\sqrt{\frac{2 \cdot 9.1095 \cdot 10^{-31} \cdot 1200}{1.6022 \cdot 10^{-19}}} \cong 1.17 \cdot 10^{-3}\,\text{T}. \end{aligned}$$

Exercice 4

Dans ce problème, il convient de distinguer deux phases :

- la phase d'accélération des particules durant laquelle la norme de la vitesse change (sous l'effet de la force électrique) ;
- la phase durant laquelle les particules décrivent un mouvement circulaire uniforme (sous l'effet du champ magnétique uniforme perpendiculaire à la vitesse).

(a) L'énergie cinétique acquise par une particule de masse m et de charge q, initialement immobile, sous une tension d'accélération $U_{\text{acc.}}$ est

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\,U_{\text{acc.}}\,.$$

Autrement dit, la vitesse de la particule après la phase d'accélération est donnée par

$$v = \sqrt{\frac{2eU_{\text{acc.}}}{m}}\,.$$

Cette vitesse ne sera pas modifiée par la présence du champ magnétique (la force de Lorentz ne travaille pas).

Dans le cas d'un électron et d'un proton, nous avons donc, numériquement,

$$\begin{aligned} v_e &= \sqrt{\frac{2eU_{\text{acc.}}}{m_e}} \cong \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 2000}{9.1095 \cdot 10^{-31}}} \cong 2.65 \cdot 10^7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}\,; \\ v_p &= \sqrt{\frac{2eU_{\text{acc.}}}{m_p}} \cong \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 2000}{1.6726 \cdot 10^{-27}}} \cong 6.19 \cdot 10^5\,\text{m}\,\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Une particule de masse m et de charge q lancée perpendiculairement aux lignes d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ avec une vitesse $\vec{v}$ aura un mouvement circulaire uniforme de rayon

$$R = \frac{mv}{|q|B}\,,$$

où $v = ||\vec{v}||$ et $B = ||\vec{B}||$.

Dans le cas de l'électron et du proton évoqués au point (a), nous avons donc, numériquement,

$$
\begin{aligned}
R_e &= \frac{m_e v_e}{eB} \cong \frac{9.1095 \cdot 10^{-31} \cdot 2.65 \cdot 10^{7}}{1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 0.5} \cong 3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}\,; \\
R_p &= \frac{m_p v_p}{eB} \cong \frac{1.6726 \cdot 10^{-27} \cdot 6.19 \cdot 10^{5}}{1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 0.5} \cong 1.3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\,.
\end{aligned}
$$

(c) Nous avons rappelé au point (b) que, dans le cas où la vitesse des particules est perpendiculaire au champ magnétique (mouvement circulaire uniforme), le rayon de courbure R et l'intensité B sont reliés par la relation

$$
R = \frac{mv}{|q|B} \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{mv}{|q|R}\,.
$$

En imposant un rayon de courbure $R = 1\,\mathrm{m}$, il vient, dans le cas de l'électron et du proton évoqués au point (a),

$$
\begin{aligned}
B_e &= \frac{m_e v_e}{eR} \cong \frac{9.1095 \cdot 10^{-31} \cdot 2.65 \cdot 10^{7}}{1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 1} \cong 1.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T} \\
B_p &= \frac{m_p v_p}{eR} \cong \frac{1.6726 \cdot 10^{-27} \cdot 6.19 \cdot 10^{5}}{1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 1} \cong 6.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}.
\end{aligned}
$$

Exercice 5

Nous allons considérer l'objet "électron" et étudier séparément les différents étapes du parcours de cet objet.

(a) Nous commençons par appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre la cathode (où l'électron a une vitesse quasiment nulle) et la sortie de l'anode (l'électron a alors une vitesse de norme $v_0 = ||\vec{v}_0||$). Si l'on néglige la force de gravitation, seule la force électrique intervient et le travail des forces extérieures entre la cathode et la sortie de l'anode s'écrit

$$W_{\mathrm{c}\to\mathrm{a}}(\vec{F}^{\mathrm{ext}}) = W_{\mathrm{c}\to\mathrm{a}}(\vec{F}_{\text{élec.}}) = (-e)(-U_{\mathrm{acc.}}) = e\,U_{\mathrm{acc.}}\,,$$

où $U_{\mathrm{acc.}} > 0$ est la tension d'accélération cherchée.

Ainsi, nous obtenons

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = e\,U_{\mathrm{acc}}\,,$$

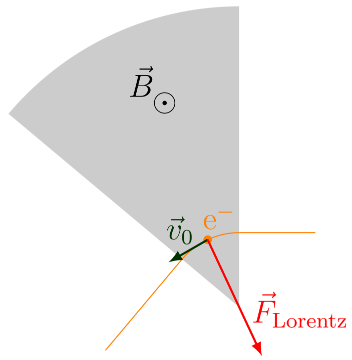
et

$$U_{\mathrm{acc.}} = \frac{mv_0^2}{2e}\,.$$

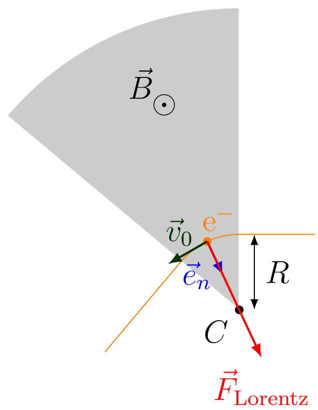
(b) Si l'on néglige la gravitation, les électrons ne sont déviés que par la force de Lorentz

$$\vec{F} = -e\,\vec{v} \wedge \vec{B}\,.$$

Pour obtenir la trajectoire représentée sur la figure, le champ magnétique $\vec{B}$ doit pointer hors du plan ($\odot\vec{B}$), de manière à ce que la force de Lorentz soit dirigée vers l'intérieur du virage :



(c) Dans la région où règne un champ magnétique $\vec{B}$, la trajectoire de l'électron est un cercle de rayon R centré au point C :



Selon la deuxième loi de Newton,

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = -e\,\vec{v} \wedge \vec{B} = m\,\vec{a}\,.$$

La force de Lorentz étant normale à la trajectoire, l'accélération tangentielle est nulle et la projection de l'équation vectorielle ci-dessus selon un repère $\vec{e}_n$ dirigé vers le centre C de la trajectoire fournit

$$e\,vB = ma_n = m\frac{v_0^2}{R}\,.$$

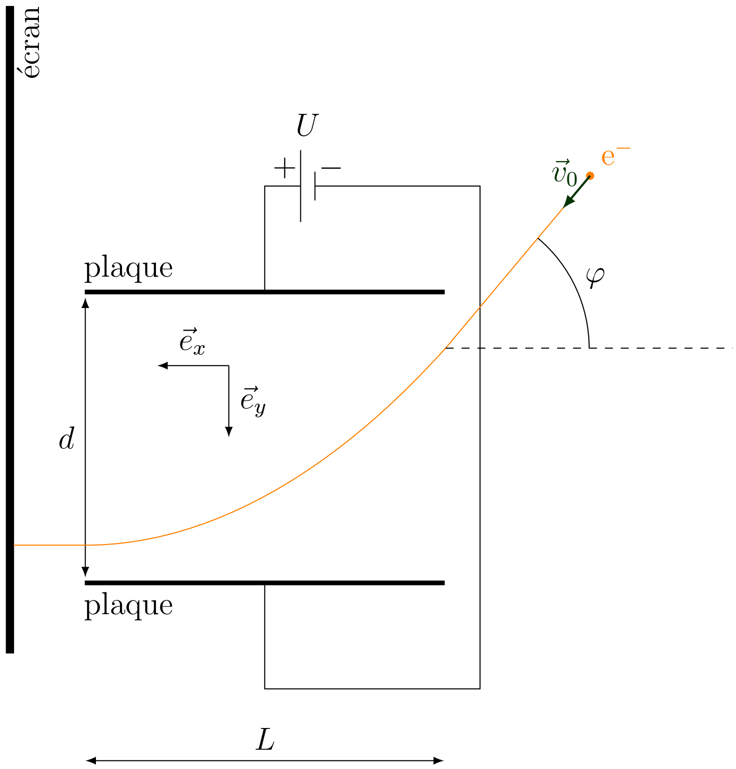
Le rayon de courbure a donc pour expression

$$R = \frac{mv_0}{eB}\,.$$

(d) Entre les plaques de déflexion, le champ est uniforme et la tension est donnée par

$$U = Ed\,.$$

L'électron entre dans le champ électrique avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle φ avec l'horizontale :



En négligeant la gravitation, la seule force s'exerçant sur l'électron est la force électrique. Selon la deuxième loi de Newton,

$$\vec{F}_{\text{élec.}} = -e\vec{E} = m\vec{a}\,.$$

En projetant cette relation vectorielle sur le vecteur horizontal $\vec{e}_x$, il vient

$$0 = ma_x \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = \text{constante} = v_0 \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 \cos\varphi\, t\,.$$

En particulier, le temps de séjour t_{s} de l'électron entre les plaques est donné par

$$L = v_0 \cos\varphi\, t_{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{s}} = \frac{L}{v_0 \cos\varphi}\,.$$

En projetant la deuxième loi de Newton sur le vecteur vertical $\vec{e}_y$, on obtient

$$-eE = ma_y \quad \Rightarrow \quad v_y(t) = v_0 \sin\varphi - \frac{eE}{m}t\,.$$

A la sortie des plaques, la vitesse verticale de l'électron doit être nulle. Autrement dit,

$$v_y(t_{\text{s}}) = 0 = v_0 \sin\varphi - \frac{eE}{m}t_{\text{s}}\,.$$

Le champ électrique a donc pour expression

$$E = \frac{mv_0 \sin\varphi}{e\,t_{\text{s}}} = \frac{mv_0^2 \cos\varphi \sin\varphi}{e\,L}\,.$$

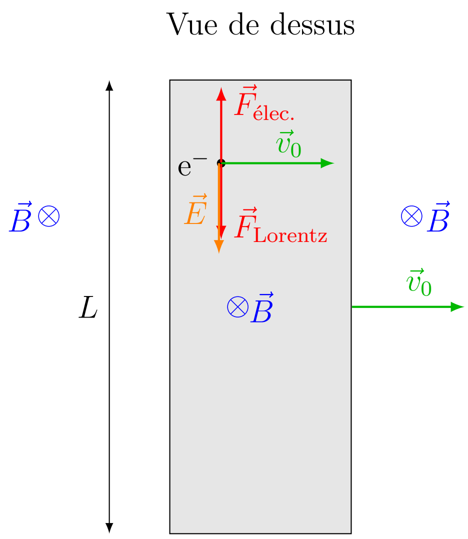
Finalement, la tension entre les plaques est donnée par

$$U = Ed = \frac{mv_0^2 d \cos\varphi \sin\varphi}{e\,L}\,.$$

Exercice 6

Nous allons étudier le mouvement d'un électron de conduction du barreau métallique.

Les électrons de conduction du barreau métallique se déplacent avec ce dernier à la vitesse $\vec{v}_0$, subissent la force de Lorentz et migrent vers une extrémité du barreau, créant un champ électrique. Ils ressentent dès lors également une force électrique. La migration prend fin lorsque les forces électrique et de Lorentz se compensent :

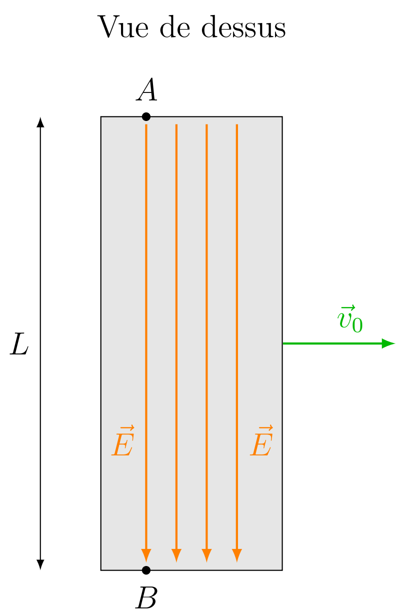


$$\vec{F}_{\text{élec.}} + \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\vec{E} + q\,\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}) = \vec{0}\,.$$

Ainsi, le champ électrique créé est lié au champ magnétique et à la vitesse du barreau par l'expression

$$\vec{E} = -\vec{v}_0 \wedge \vec{B}\,.$$

Selon l'énoncé, la vitesse du barreau et le champ magnétique sont supposés constants. Par conséquent, le champ électrique est uniforme.



La tension U_{AB} entre les extrémités du barreau a donc pour expression :

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = EL = v_0 B L \,,$$

où $v_0 = ||\vec{v}_0||$ et $B = ||\vec{B}||$.