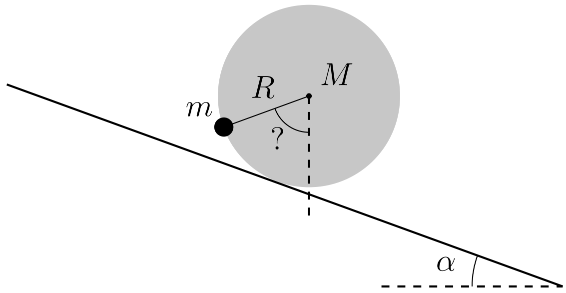
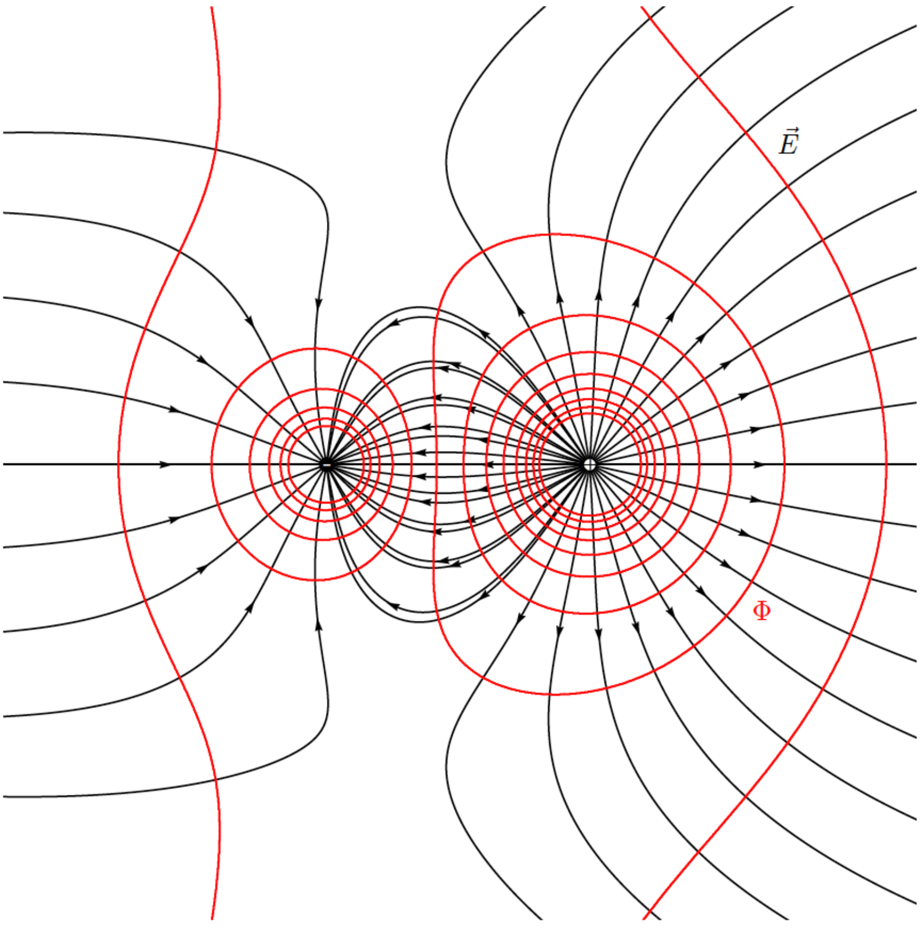
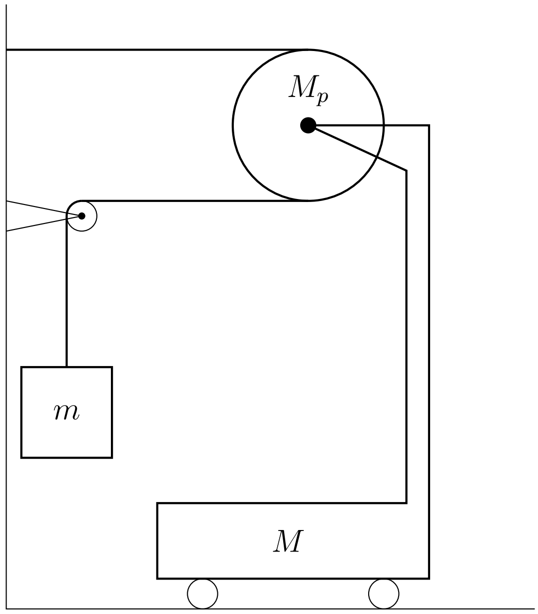
CMS - Cours de Physique

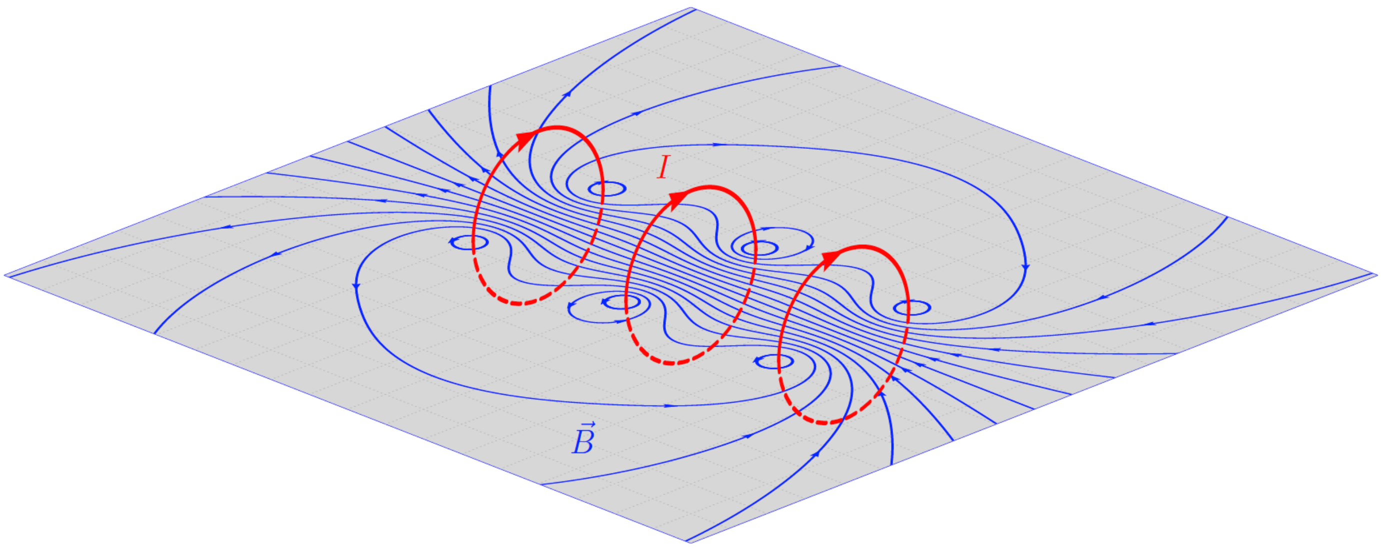
Semestre de printemps

2016 – 2017









20 février 2017/GB,RS

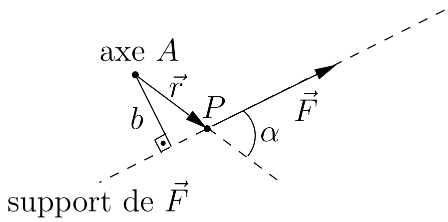
Table des matières

8 Rotation en deux dimensions

8.1 Moment d'une force (rotation autour d'un axe)

Si on veut mettre un objet en mouvement autour d'un axe fixe A, on doit appliquer une force $\vec{F}$ en un point P.

La mise en rotation est donnée par



$$M_A = b\,||\vec{F}||\,,$$

où

$$b = ||\vec{r}||\,|\sin\alpha|$$

est le **bras de levier**.

Moment de la force $\vec{F}$ par rapport à A :

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}\,, \qquad \text{unité : N m}\,,$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$. Le sens de la rotation induite par $\vec{M}_A$ est donné par la règle du tire-bouchon. Dans le cas de la figure ci-dessus, le moment de force est sortant : $\odot\vec{M}_A$.

Si plusieurs forces $\vec{F}_i$ sont appliquées sur l'objet considéré en des points P_i,

$$\vec{M}_A = \sum_i \vec{M}_{A,i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i\,, \qquad \text{avec} \;\; \vec{r}_i = \overrightarrow{AP_i}\,.$$

8.2 Statique

Relativement à un référentiel d'inertie, un objet au repos pour la translation et la rotation vérifie les relations

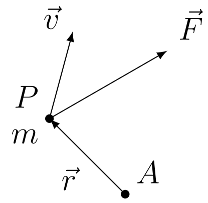
$$\vec{F}^{\,\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\,\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{M}_A^{\,\text{ext}} = \sum_i \vec{M}_{A,i}^{\,\text{ext}} = \vec{0}\,, \;\; \forall A\,.$$

La somme des forces extérieures et la somme des moments des forces extérieures par rapport à n'importe quel point fixe A sont nulles.

8.3 Théorème du moment cinétique

8.3.1 Cas d'une masse ponctuelle

On considère un point A fixe dans un référentiel d'inertie et une masse ponctuelle m se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ et soumise à une force $\vec{F}$.



Moment cinétique de m par rapport à A :

$$\vec{L}_A = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\,\vec{v}\,, \qquad \text{unité : kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}.$$

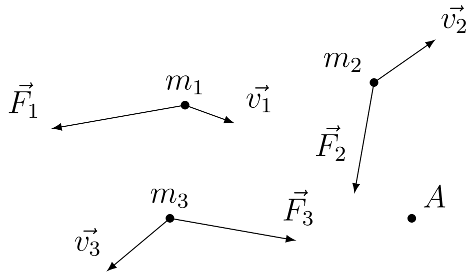
Théorème du moment cinétique :

$$\vec{M}_A = \frac{d}{dt}\vec{L}_A \equiv \dot{\vec{L}}_A\,.$$

8.3.2 Cas d'un système de plusieurs masses

On considère un point A et un système formé de plusieurs masses m_i subissant chacune une force (résultante) $\vec{F}_i$.
Pour chaque masse m_i,

$$\vec{M}_{A,i} = \dot{\vec{L}}_{A,i}\,.$$



Moment cinétique du système par rapport à A :

$$\vec{L}_A = \sum_i \vec{L}_{A,i}\,.$$

Selon la troisième loi de Newton (action=réaction),

$$\vec{M}_A = \sum_i \vec{M}_{A,i} = \sum_i \vec{M}^{\text{ext}}_{A,i}\,.$$

Seules les forces externes et leur moment interviennent donc dans la dynamique du système.

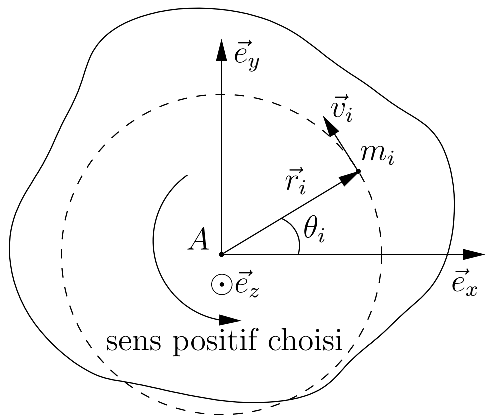
Théorème du moment cinétique :

$$\vec{M}^{\text{ext}}_A = \dot{\vec{L}}_A\,.$$

8.3.3 Cas d'un solide

Dans un solide, les positions relatives des masses m_i ne changent pas au cours du temps.

Imaginons un solide en rotation autour d'un axe passant par A et choisissons un sens positif de rotation. Selon la règle du tire-bouchon, ce sens positif de rotation est décrit par un vecteur $\vec{e}_z$ parallèle à l'axe de rotation et donc normal au plan (x, y).
La rotation du solide est alors complètement donnée par le **vecteur vitesse angulaire**



$$\vec{\omega}_A = \omega_A \, \vec{e}_z \, .$$

La vitesse scalaire, définie en page 13 du polycopié du semestre d'automne, s'écrit ainsi

$$v_i = r_i \, \dot{\theta}_i = r_i \, \omega_A \, .$$

Le moment cinétique du solide par rapport à A a pour expression

$$\vec{L}_A = L_A \, \vec{e}_z \, ,$$

avec

$$L_A = \sum_i L_{A,i} = \sum_i r_i \, m_i \, v_i = \sum_i \omega_A \, m_i \, r_i^2 = \Big(\sum_i m_i \, r_i^2\Big)\omega_A = I_A \, \omega_A \, ,$$

où

$$I_A = \sum_i m_i \, r_i^2 \, , \qquad \text{unité : kg m}^2 \, ,$$

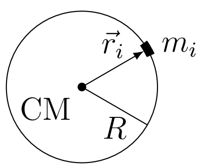
est le **moment d'inertie** du solide par rapport à A.
Vectoriellement, on peut écrire

$$\vec{L}_A = I_A \, \vec{\omega}_A \quad \text{et} \quad \vec{M}_A^{\text{ext}} = \dot{\vec{L}}_A = I_A \, \dot{\vec{\omega}}_A \, ,$$

où $\dot{\vec{\omega}}_A$ est **l'accélération angulaire** du solide.

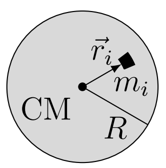
Moment d'inertie pour quelques solides homogènes de masse m :

1) Cerceau (cercle) ou cylindre creux, p.r. à l'axe de symétrie passant par le CM



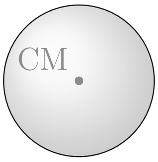
$$I_{\text{CM}} = mR^2 \, .$$

2) Disque ou cylindre plein, p.r. à l'axe de symétrie passant par le CM



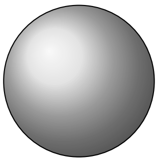
$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{2} mR^2 \, .$$

3) Sphère, p.r. à un axe passant par le CM



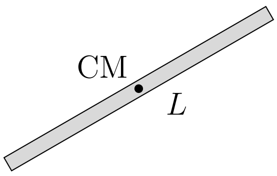
$$I_{\rm CM} = \frac{2}{3} m R^2\,.$$

4) Boule, p.r. à un axe passant par le CM



$$I_{\rm CM} = \frac{2}{5} m R^2\,.$$

5) Tige mince, p.r. à un axe normal à la tige et passant par le CM

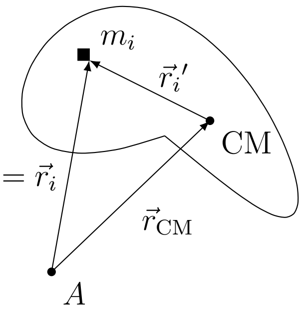


$$I_{\rm CM} = \frac{1}{12} m L^2\,.$$

Règle de Steiner :
Connaissant $I_{\rm CM}$ p.r. à un axe passant par le CM, on a I_A p.r. à un axe parallèle passant par A :

$$I_A = m\, d^2 + I_{\rm CM}\,,$$

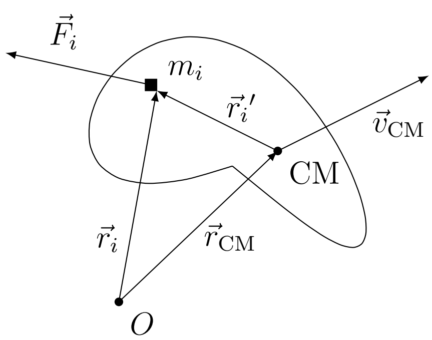
avec $d = ||\vec r_{\rm CM}||$ et $I_{\rm CM} = \sum_i m_i\, {r_i'}^2\,.$ $\quad \vec r_{\rm CM} + \vec r_i{}' = \vec r_i$



8.3.4 Référentiel du CM

Dans le référentiel lié au CM d'un objet constitué de masses ponctuelles m_i, on a

$$\begin{aligned}
\underbrace{\vec r_i}_{\text{rel. à } O} &= \underbrace{\vec r_{\rm CM}}_{\text{rel. à } O} + \underbrace{\vec r_i{}'}_{\text{rel. au CM}} \\
\vec v_i &= \vec v_{\rm CM} + \vec v_i{}' \\
\vec a_i &= \vec a_{\rm CM} + \vec a_i{}'\,.
\end{aligned}$$



Le CM est immobile par rapport à lui-même :

$$\vec r_{\rm CM}{}' = \vec 0\,, \quad \vec v_{\rm CM}{}' = \vec 0 \quad \text{et} \quad \vec a_{\rm CM}{}' = \vec 0\,.$$

La deuxième loi de Newton reste valable si l'on ajoute la "force" d'inertie $-m_i\, \vec a_{\rm CM}$:

$$\vec F_i - m_i\, \vec a_{\rm CM} = m_i\, \vec a_i{}'\,.$$

Remarque :
En sommant sur les m_i, il vient

$$\vec{F} - m\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{0}\,.$$

Le théorème du moment cinétique $\vec{M}_A^{\mathrm{ext}} = \dot{\vec{L}}_A$ reste valable relativement au référentiel du CM :

$$\vec{M}_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{ext}} = \dot{\vec{L}}_{\mathrm{CM}}\,,$$

et ce, même si le CM est accéléré !

8.4 Théorème de l'énergie cinétique et énergie cinétique de rotation d'un solide

Rappel : pour une masse ponctuelle m_i : $m_i\,\vec{a}_i = \vec{F}_i\,.$
On peut s'intéresser à l'énergie du CM, ou à celle de toutes les parties du solide.

8.4.1 Energie cinétique du CM de l'objet

Avec $E_{\mathrm{cin,CM}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{CM}}^2\,,$

$$E_{\mathrm{cin,CM}}(2) - E_{\mathrm{cin,CM}}(1) = W_{1\to 2}^{\mathrm{ext}} = \int_1^2 \vec{F}^{\mathrm{ext}} \cdot d\vec{r}_{\mathrm{CM}}\,.$$

La variation de l'énergie cinétique du CM de l'objet est donnée par le travail des forces extérieures sur le CM.

8.4.2 Energie cinétique de l'objet

Produit scalaire avec $\vec{v}_i$, somme sur i : avec $E_{\mathrm{cin}} = \sum_i E_{\mathrm{cin},i} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2\,,$

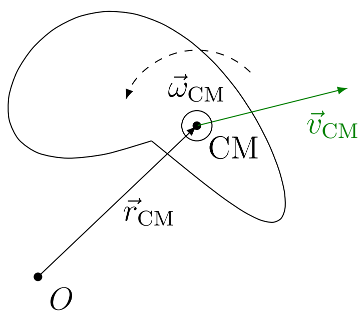
$$E_{\mathrm{cin}}(2) - E_{\mathrm{cin}}(1) = W_{1\to 2}^{\mathrm{ext}} + W_{1\to 2}^{\mathrm{int}}\,.$$

La variation de l'énergie cinétique (totale) de l'objet est donnée par le travail des forces extérieures et intérieures sur leur point d'application.

8.4.3 Cas d'un solide

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit

$$E_{\mathrm{cin}} = E_{\mathrm{cin,CM}} + E_{\mathrm{cin,rot.}}\,,$$



avec les définitions

Energie cinétique de translation :

$$E_{\mathrm{cin,CM}} = \frac{1}{2}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2$$

Energie cinétique de rotation par rapport au CM :

$$E_{\mathrm{cin,rot.}} = \frac{1}{2}\, I_{\mathrm{CM}}\, \omega_{\mathrm{CM}}^2 \,.$$

La variation de l'énergie cinétique d'un solide ne dépend que des forces extérieures :

$$E_{\mathrm{cin}}(2) - E_{\mathrm{cin}}(1) = W_{1\to 2}^{\mathrm{ext}} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{\mathrm{ext}} \cdot d\vec{r}_i \,.$$

Par ailleurs, les dérivées par rapport au temps s'écrivent

$$\dot{E}_{\mathrm{cin,CM}} = \vec{F}^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} \quad \text{et} \quad \dot{E}_{\mathrm{cin,rot.}} = \vec{M}_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{ext}} \cdot \vec{\omega}_{\mathrm{CM}} \,.$$

9 Electrostatique

L'électrostatique est l'étude des phénomènes électriques relatifs à des charges immobiles.

9.1 Force, charge et champ électriques

9.1.1 Electrisation par frottements, attraction, répulsion (expérience)

Il existe deux types de charges : **positives** et **négatives**. Deux charges de même signe se repoussent alors que deux charges de signe contraire s'attirent.
Un objet portant autant de charges positives que de charges négatives est dit **neutre**.

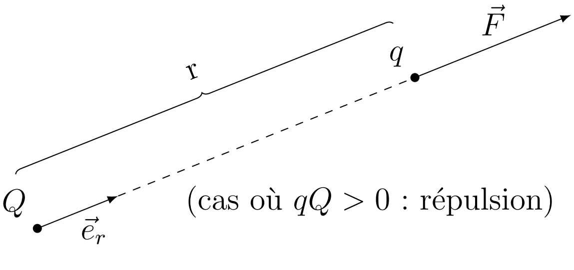
9.1.2 Charge élémentaire

La charge d'un système est toujours un multiple entier positif ou négatif d'une charge élémentaire e (quantification de la charge) : $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.
Unité de la charge : Le Coulomb C.
La charge électrique totale d'un système isolé est une grandeur conservée.

9.1.3 Force de Coulomb

Force de Coulomb exercée sur une charge q par une autre charge Q :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\,Q}{r^2} \vec{e}_r \,.$$



La constante $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ $\mathrm{N^{-1} m^{-2} C^2}$ est appelée **permittivité du vide**.

9.1.4 Champ électrique $\vec{E}$

La force exercée sur une charge q par une autre charge Q peut donc s'écrire :

$$\vec{F} = q\vec{E}\,,$$

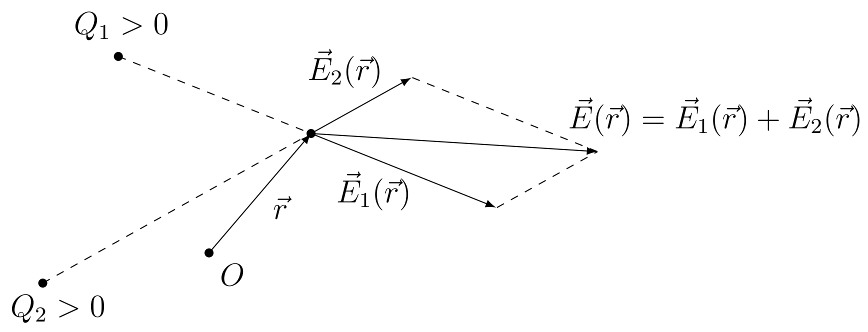
avec

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{e}_r\,, \qquad \text{unité : } \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,,$$

où $\vec{E}$ est le **champ électrique** produit par la charge Q à l'endroit où se trouve q. Le volt V est une unité introduite à la section 9.2.

Principe de superposition :
Le champ $\vec{E}$ dû à N charges $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ est

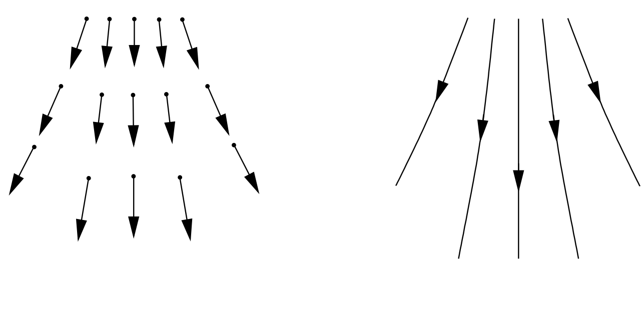
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \cdots + \vec{E}_N(\vec{r})\,.$$



La force électrique excercée sur une charge q située dans le champ électrique est ainsi donnée par

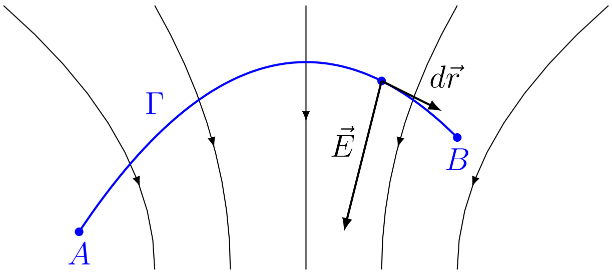
$$\vec{F} = q\,\vec{E}\,.$$

Lignes de champ :
Un vecteur $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ est associé à chaque position $\vec{r}$ et on peut représenter graphiquement ce champ vectoriel en traçant un ensemble de vecteurs dont les modules et les directions correspondent aux valeurs de $\vec{E}$ aux points d'origine des vecteurs dessinés. Une autre représentation possible d'un champ de vecteurs consiste à tracer des lignes qui sont tangentes à la direction de $\vec{E}$ en tout point. On parle alors de **lignes de champ**. Ces dernières ne peuvent pas se croiser et vont toujours des charges positives aux charges négatives.



9.2 Tension et potentiel électrique

Considérons une région où règne un champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ et un chemin Γ d'un point A vers un point B.



Une charge q suivant Γ subirait la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$.

La force électrique est conservative : son travail s'exprime aussi comme une différence d'énergie potentielle. De plus, la charge q peut être mise en évidence :

$$\begin{aligned} W_{A\to B}(\vec{F}) &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = E_{\text{pot}}(A) - E_{\text{pot}}(B) \\ &= q\,U_{AB} = q\,\Phi_A - q\,\Phi_B\,. \end{aligned}$$

Potentiel électrique :

$$\Phi(\vec{r})\,, \quad \text{unité : V (“volt”).}$$

Le potentiel électrique à la position $\vec{r}$ dans le champ électrique est l'énergie potentielle électrique par unité de charge (“hauteur dans le champ électrique”).
C'est un nombre défini, à une constante arbitraire près, en tout point de l'espace (champ scalaire).

Tension électrique entre A et B :

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \Phi_A - \Phi_B\,.$$

La tension électrique est le travail de la force électrique par unité de charge ou encore la différence de potentiel (“différence de hauteur dans le champ électrique”).

Surface équipotentielle :
L'ensemble des points de l'espace au même potentiel est une surface appelée équipotentielle.

Propriétés :

1) U_{AB} est un nombre réel (positif, négatif ou nul).
2) U_{AB} est indépendante du chemin de A à B : $\vec{E}$ est conservatif.
3) U_{AB} ne dépend que de A et de B.
4) $U_{BA} = -U_{AB}$ (chemin inverse).
5) $U_{AA} = 0\,\text{V}$ (chemin fermé).
6) $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$.
7) En électrostatique, le champ $\vec{E}$ est normal aux équipotentielles.
8) Le potentiel diminue lorsqu'on parcourt une ligne de champ dans le sens de $\vec{E}$.

Une charge q suivant un chemin de A vers B dans un champ électrique reçoit de l'énergie sous forme de travail de la force électrique

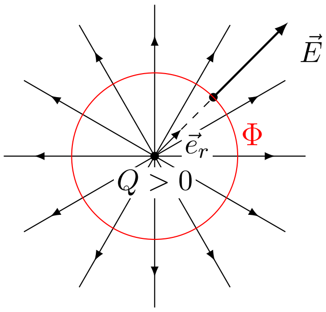
$$W_{AB} = q\,U_{AB}\,.$$

L'électron-volt est une unité d'énergie définie par l'énergie électrique reçue par une charge élémentaire sous une tension de 1 V :

$$1\,e\mathrm{V} = 1.602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Cas particuliers :

a) Charge ponctuelle Q



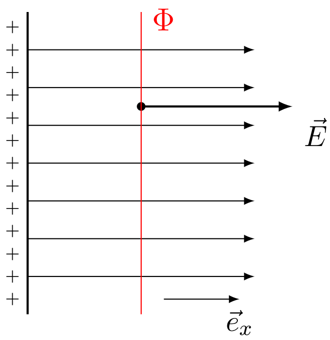
$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}\,\vec{e}_r\\ \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r} + \mathrm{cte}\end{aligned}$$

Alors

$$U_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

Les équipotentielles sont des sphères centrées sur Q.

b) Plaque infinie



$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x\\ \Phi(\vec{r}) &= -E_0 x + \mathrm{cte}\end{aligned}$$

Alors

$$U_{AB} = \vec{E}_0 \cdot \overrightarrow{AB} = E_0(x_B - x_A)\,.$$

Les équipotentielles sont des plans parallèles à la plaque.

9.3 Conducteurs

9.3.1 Champ électrique dans un conducteur

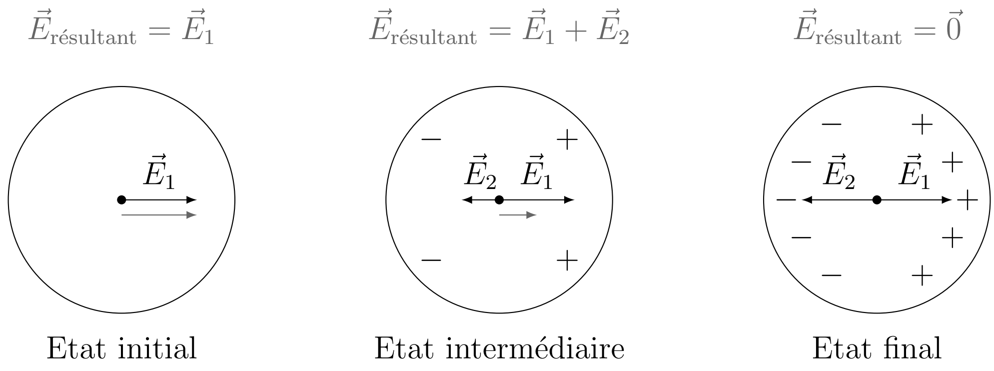
Un corps est dit **conducteur** si les charges peuvent facilement y circuler. Dans le cas contraire, il est dit **isolant**. Dans un conducteur, il existe des particules chargées susceptibles de se déplacer.
En électrostatique, le champ électrique est nul à l'intérieur des conducteurs. Deux points quelconques d'un même conducteur peuvent toujours être joints par un chemin sur lequel le champ est partout nul. Par conséquent,

- La tension entre deux points d'un conducteur est toujours nulle.
- Tous les points d'un conducteur sont au même potentiel.

Remarque :
En électrostatique, les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface des conducteurs (celle-ci étant une équipotentielle).

9.3.2 Phénomène d'influence

Plaçons un conducteur (sphère métallique) dans un champ électrique $\vec{E}_1$:



Les charges se séparent de telle manière que $\vec{E}_{\text{résultant}} = \vec{0}$ (électrostatique).

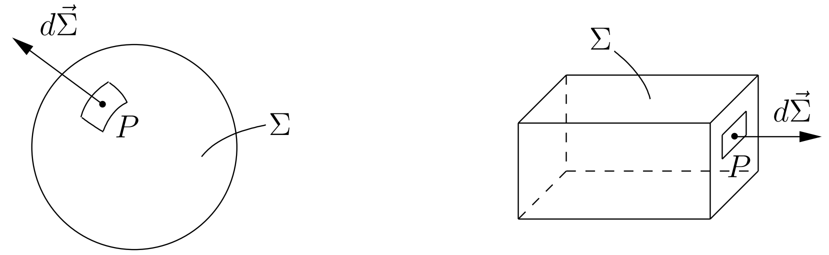
9.3.3 Effet de pointe

Plus la courbure de la surface du conducteur est forte (c'est-à-dire plus le rayon de courbure est petit), plus le champ électrique en son voisinage est important.

9.4 Théorème de Gauss

Surface fermée Σ : Surface enfermant une région (un volume) de l'espace.

Deux exemples : Sphère et parallélépipède fermé



Elément de surface $d\vec{\Sigma}$: Vecteur ...

- associé à un point P de Σ ;
- normal à Σ ;
- pointant vers l'extérieur de Σ ;
- dont la norme correspond à l'aire de l'élément de surface.

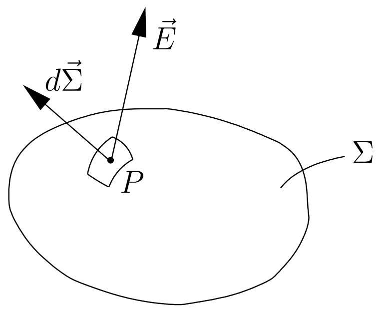
Remarque :
Si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à Σ en P, pointant vers l'extérieur, on peut écrire (somme sur la surface fermée)

$$\oint_{\Sigma \text{ fermée}} \vec{n} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_{\Sigma \text{ fermée}} d\Sigma = \text{aire de } \Sigma \,.$$

Flux de $\vec{E}$ à travers $d\vec{\Sigma}$:

Soit Σ une surface fermée dans un champ électrique $\vec{E}$, le flux $d\Psi$ de $\vec{E}$ à travers $d\vec{\Sigma}$ s'écrit

$$d\Psi = \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}\,.$$



Remarque :

- Si $\vec{E} \perp d\vec{\Sigma}$, alors $d\Psi = 0$;
- Si $\vec{E}$ et $d\vec{\Sigma}$ pointent du même côté, $d\Psi > 0$;
- Si $\vec{E}$ et $d\vec{\Sigma}$ pointent du côté opposé, $d\Psi < 0$.

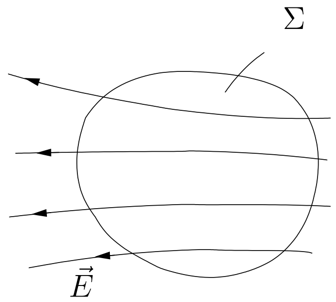
Flux de $\vec{E}$ à travers Σ :

En sommant les éléments de flux, on obtient le flux de $\vec{E}$ à travers la surface fermée Σ :

$$\Psi = \oint_{\Sigma \text{ fermée}} d\Psi = \oint_{\Sigma \text{ fermée}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}\,.$$

On peut distinguer trois cas.

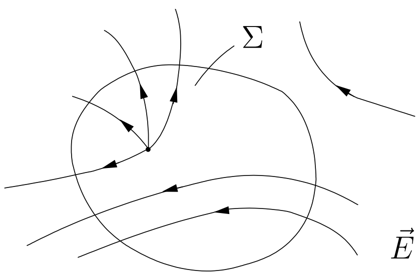
1) Tout ce qui entre ressort :



Il n'y a pas de source ou de puits de $\vec{E}$ à l'intérieur de Σ :

$$\Psi = 0\,.$$

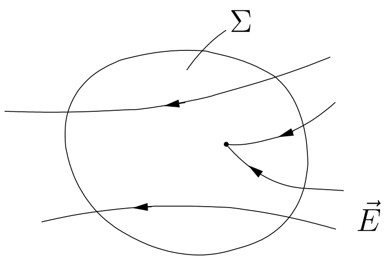
2) Il sort davantage qu'il n'entre :



Une source est présente dans Σ :

$$\Psi > 0\,.$$

3) Il entre davantage qu'il ne sort :



Un puits, une perte est présente dans Σ :

$$\Psi < 0\,.$$

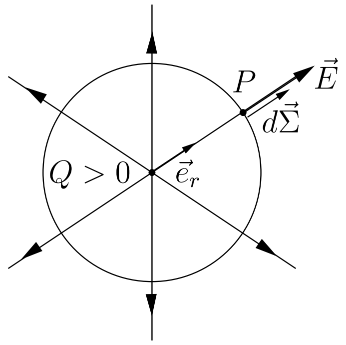
La source du champ électrique $\vec{E}$ est la charge électrique. Expérimentalement, on constate que le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée Σ est proportionnel à la somme des charges se trouvant à l'intérieur de Σ :

$$\Psi = \oint_{\Sigma \text{ fermée}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0}, \quad \text{(théorème de Gauss ou loi de Gauss)}$$

où $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{CV^{-1}m^{-1}}$.

Applications :

1) Champ électrique $\vec{E}$ d'une charge ponctuelle Q :



Par invariance de rotation (par symétrie), le champ est radial et sa norme ne dépend que de la distance r à la charge : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

Choix de Σ : sphère centrée sur Q.

Elément de flux : $d\Psi = \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = E d\Sigma$.

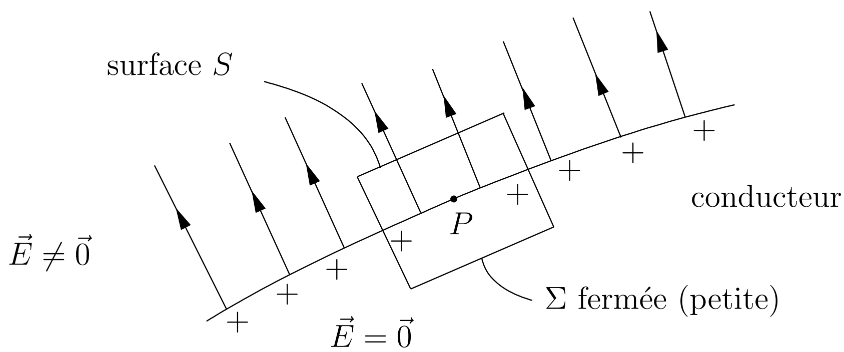
Le flux total s'écrit alors

$$\Psi = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_\Sigma E\, d\Sigma = E \oint_\Sigma d\Sigma = E\, 4\pi r^2 \overset{\text{Gauss}}{=} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

(r : rayon de la sphère). D'où

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \,.$$

2) En électrostatique, les charges en excès d'un conducteur sont à la surface.
3) En électrostatique, le champ est nul dans la cavité d'un conducteur.
4) La paroi interne de la cavité d'un conducteur est chargée par influence si la cavité renferme une charge.
5) A la surface d'un conducteur, le champ est proportionnel à la densité superficielle de charges :



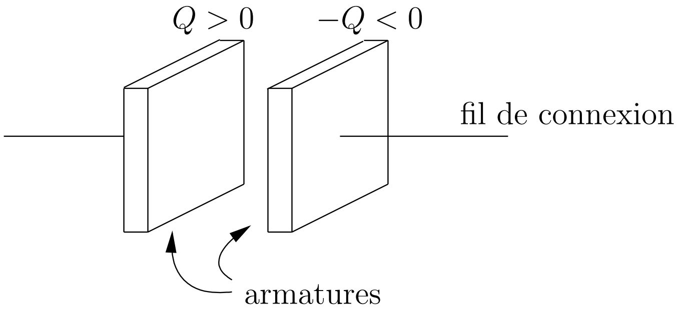
$$\Psi = ES \overset{\text{Gauss}}{=} \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \,,$$

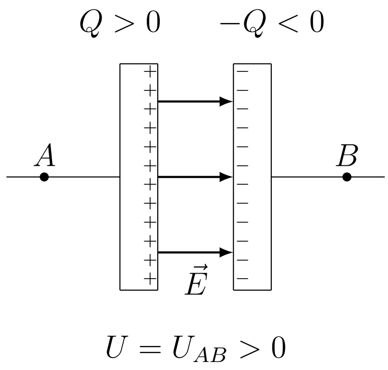
avec la densité superficielle de charges $\sigma = \dfrac{Q_{\text{int.}}}{S}$ (unité : $\mathrm{Cm^{-2}}$).

9.5 Condensateurs

Un condensateur est un ensemble formé de deux conducteurs isolés, se faisant face. Si l'une des armatures est chargée, l'autre possède une charge de signe contraire.

Exemple : Condensateur formé de deux plaques (vues de profil et en coupe)





Dans un condensateur, i) on crée un champ $\vec{E}$, ii) on stocke des charges.

Conventions :

- La charge d'un condensateur est celle de l'armature positive.
- La tension d'un condensateur U est celle du + au −, donc positive.

La tension et la charge sont liées par la relation

$$Q = CU\,,$$

où C est la capacité du condensateur dont l'unité est $\mathrm{CV}^{-1} = \mathrm{F}$ ("farad"). C'est une caractéristique du condensateur : à tension donnée, plus C est grande, plus la charge du condensateur est grande. C dépend de la géométrie (distance entre les armatures, surface, etc.).

Exemples :

a) Condensateur plan :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}\,,$$

où S est la surface d'une des plaques et d la distance entre les plaques (supposées identiques).

b) Condensateur sphérique :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^{-1},$$

où r_1 et r_2 sont les rayons des deux sphères concentriques ($r_2 > r_1$).

c) Condensateur cylindrique :

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \,,$$

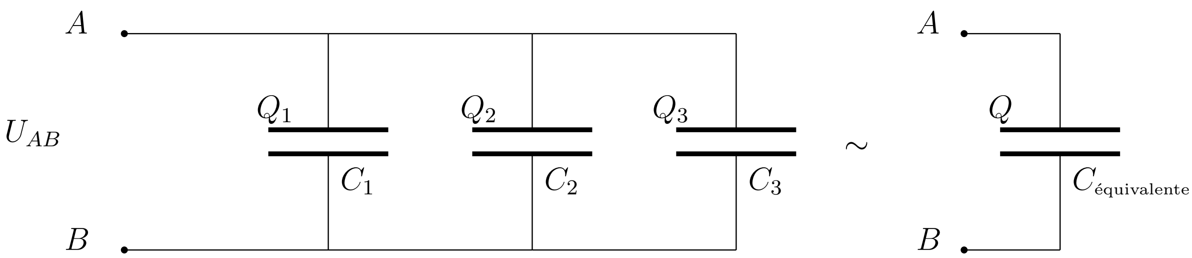
où r_1 et r_2 sont les rayons des deux cylindres et h la hauteur de ces derniers ($r_2 > r_1$ et $h \gg r_2$).

Des unités telles que le μF (10^{-6} F, microfarad), nF (10^{-9} F, nanofarad) ou le pF (10^{-12} F, picofarad) sont souvent utilisées.

9.5.1 Groupement de condensateurs

On cherche à regrouper plusieurs condensateurs pour obtenir un condensateur équivalent.

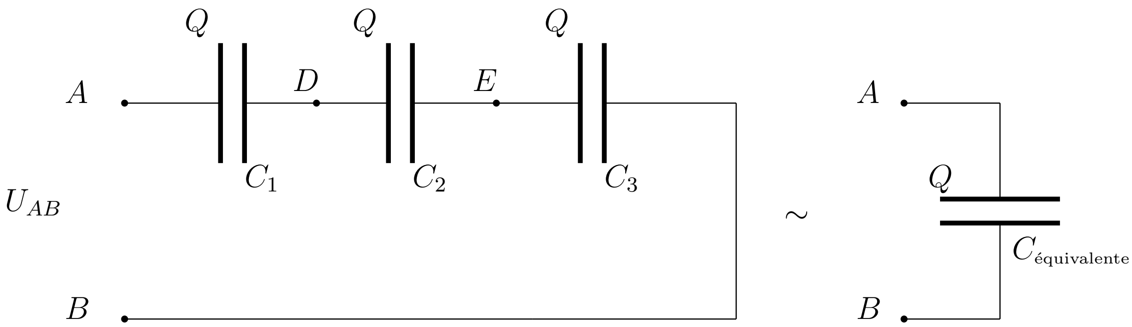
1) Branchement en parallèle de trois condensateurs :



$$C_{\text{équivalente}} = C_1 + C_2 + C_3 \,.$$

Le branchement en parallèle augmente donc la capacité.

2) Branchement en série de trois condensateurs :



$$\frac{1}{C_{\text{équivalente}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \,.$$

Le branchement en série diminue donc la capacité.

9.5.2 Energie stockée dans un condensateur

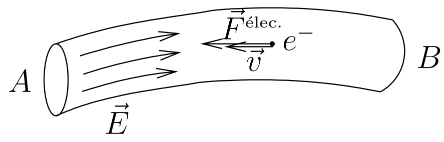
L'énergie stockée dans un condensateur correspond au travail à fournir pour charger ce dernier avec un certain nombre de charges élémentaires :

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \,.$$

10 Circuits à courant continu

10.1 Origine du courant dans un conducteur

Lorsqu'une tension U_{AB} est établie aux bornes d'un conducteur, il règne un champ $\vec{E}$ à l'intérieur de ce dernier. Les porteurs de charges (électrons) subissent alors une force électrique $\vec{F}^{\text{élec.}}$ et se déplacent collectivement à une vitesse $\vec{v}$, créant un courant :



Remarques :

- les lignes de champ suivent le conducteur ;
- le conducteur reste neutre ;
- les électrons subissent également un frottement (résistance).

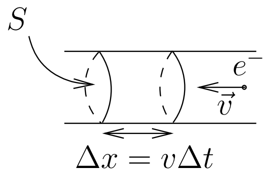
10.2 Courant électrique

Le courant électrique I est la quantité de charges traversant la section d'un conducteur par unité de temps :

$$I = \frac{dq}{dt}\,, \qquad \text{unité : Cs}^{-1} = \text{A (“ampère”)}.$$

Convention : le sens du courant est celui des charges positives.

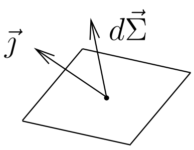
Exemple : Courant traversant un fil de section S



$$\Delta Q = enS\Delta x = enSv\Delta t \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = enSv\,,$$

où v est la vitesse des électrons et n la densité électronique (nombre d'électrons de conduction par unité de volume).

Remarque : Plus généralement, le courant est décrit par la densité de courant $\vec{\jmath}$ (courant par unité de surface). Le vecteur $\vec{\jmath} = \vec{\jmath}(\vec{x})$ est un champ vectoriel.



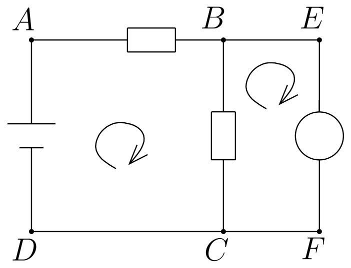
Courant à travers l'élément de surface $d\vec{\Sigma}$:

$$dI = \vec{\jmath} \cdot d\vec{\Sigma}\,.$$

10.3 Règles de Kirchhoff

1) Sur un chemin fermé, la somme des tensions est nulle.

   Exemple de circuit :



Dans toute **maille** (chemin fermé), la somme des tensions est nulle :

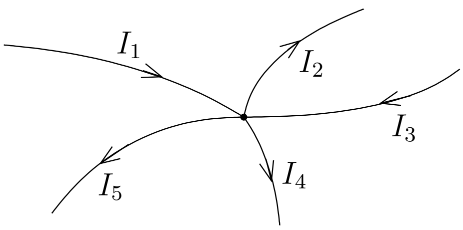
1) $U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0\,\mathrm{V}$.

2) $U_{BE} + U_{EF} + U_{FC} + U_{CB} = 0\,\mathrm{V}$.

3) $U_{AE} + U_{EC} + U_{CA} = 0\,\mathrm{V}$.

2) La charge est conservée.

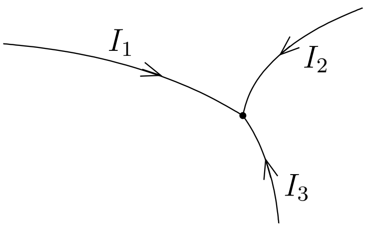
   Cas d'un noeud dans un circuit :



$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5\,.$$

La somme des courants entrant est égale à la somme des courants sortant.

Remarque :
Si on ne connaît pas le sens d'un courant, on choisit un sens positif et I peut alors être positif ou négatif.



$$I_1 + I_2 + I_3 = 0\,.$$

10.4 Puissance électrique

La puissance électrique est une variation d'énergie par unité de temps :

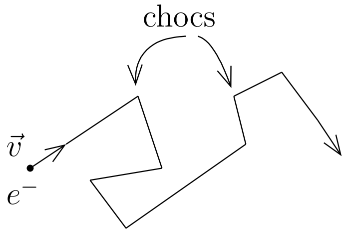
$$P = \frac{dE}{dt}\,, \qquad \text{unité : J}\,\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{W}\ (\text{“Watt”}).$$

La puissance électrique fournie à un dispositif de bornes A et B (ex. : circuit électrique, ampoule, moteur) est l'énergie par unité de temps permettant d'avoir un courant électrique I entre A et B.

$$P = U_{AB}\,I\,.$$

10.5 Résistance d'un conducteur

Dans un conducteur, un électron accéléré par une force $\vec{F}^{\text{élec.}} = q\vec{E}$ est freiné à cause des chocs avec les atomes et les autres électrons.



L'électron avance avec une vitesse moyenne d'environ 0.5 $\text{mm}\,\text{s}^{-1}$.

10.5.1 Loi d'Ohm

L'expérience montre que dans la plupart des conducteurs le courant est proportionnel à la tension

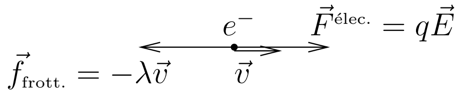
$$U = RI\,, \qquad \text{(loi d'Ohm)}$$

où U est la tension aux bornes du conducteur, I est le courant traversant ce dernier, et R est la **résistance du conducteur** (unité : $\text{VA}^{-1} = \Omega$, "ohm")

Remarque : Plus la résistance est faible, plus les électrons se déplacent facilement et plus le courant est élevé.

10.5.2 Modèle de la résistance d'un conducteur

On suppose une force de frottement proportionnelle à la vitesse des électrons :



En admettant une vitesse des électrons constante (et donc une accélération nulle),

$$-\lambda\vec{v} - e\vec{E} \cong \vec{0}\,,$$

il vient, en norme,

$$v = uE\,, \qquad \text{où } u = \frac{e}{\lambda} \text{ est } \textbf{la mobilité}.$$

Dans un fil conducteur, on peut donc écrire $I = enSv = enSuE$. D'autre part, pour une longueur L et un champ électrique $||\vec{E}|| = E = \text{cste}$, on a $U = EL$, de sorte que

$$U = \frac{L}{enSu} I\,,$$

d'où

$$R = \underbrace{\frac{1}{enu}}_{\rho} \frac{L}{S} = \rho\frac{L}{S}\,.$$

Résistivité :

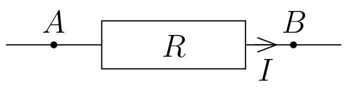
$$\rho = \frac{1}{enu}\,, \quad \text{unité : } \Omega\,\text{m}.$$

Remarques :

- Plus le conducteur est long, plus sa résistance est grande.
- Plus le conducteur est épais, plus sa résistance est faible.

10.5.3 Effet Joule

En raison de la résistance, la puissance électrique fournie au conducteur est dissipée en chaleur :

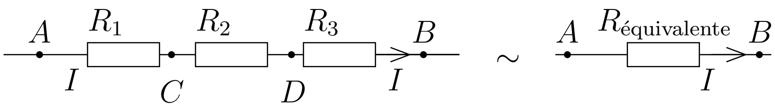


$$P_{\text{Joule}} = RI^2.$$

10.5.4 Groupement de résistances

On cherche à regrouper plusieurs résistances pour obtenir une résistance équivalente.

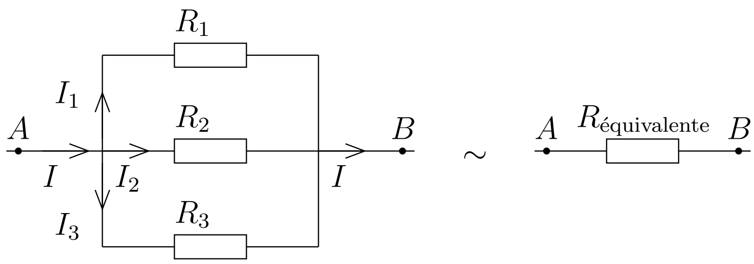
1) Branchement en série de trois résistances :



$$R_{\text{équivalente}} = R_1 + R_2 + R_3 \,.$$

Le branchement en série augmente donc la résistance.

2) Branchement en parallèle de trois résistances :



$$\frac{1}{R_{\text{équivalente}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \,.$$

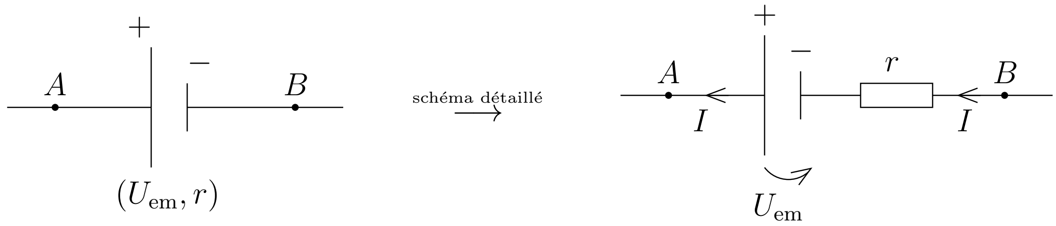
Le branchement en parallèle diminue donc la résistance.

10.6 Générateur électrique

Un générateur électrique est un appareil qui permet de transformer de l'énergie en énergie électrique (et en énergie thermique). Il possède deux bornes : une positive (portant des charges positives) et une négative. Lorsque le générateur alimente un circuit, il est traversé par un courant.

La tension U_{AB} aux bornes dépend de

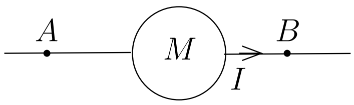
- la tension électromotrice U_{em} (tension maximale, sans courant) ;
- la résistance interne r.



$$U_{AB} = U_{\text{em}} - rI \,.$$

10.7 Moteur électrique

Un moteur électrique est un appareil qui permet de transformer de l'énergie électrique en énergie mécanique (et en énergie thermique).



$$\begin{aligned} P_{\text{fournie (électrique)}} &= P_{\text{méc.}} + P_{\text{therm.}} \,, \\ U_{AB}\, I &= P_{\text{méc.}} + rI^2 \,, \end{aligned}$$

où r est la résistance interne et $P_{\text{méc.}}$ est la puissance mécanique développée par le moteur.

En écrivant,

$$P_{\text{méc.}} = U_{\text{cem}}\, I \,,$$

on définit la tension contre-électromotrice, U_{cem}, qui est la tension utile.

$$\underbrace{U_{AB}}_{\text{bornes}} = \underbrace{U_{\text{cem}}}_{\text{utile}} + \underbrace{rI}_{\text{perte}} \,.$$

Remarques :

- Plus le moteur est sollicité, plus le courant est important.
- Si le moteur est bloqué, $P_{\text{méc.}} = 0$, $U_{\text{cem}} = 0$ et $U_{\text{em}} - rI = r'I$

  $$\Rightarrow \quad I = \frac{U_{\text{em}}}{r + r'} \,.$$

  Le courant est alors très important et le moteur chauffe.
- Si le moteur tourne à vide, $I \cong 0\,\text{A}$, et $U_{\text{em}} \cong U_{\text{cem}}$.

10.8 Rendement

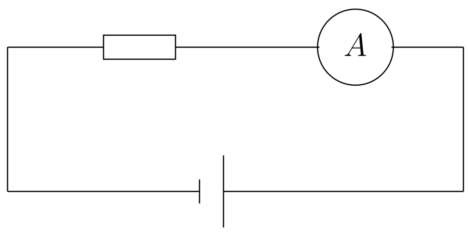
Le **rendement** est la puissance effectivement développée pour la fonction du dispositif divisée par la puissance fournie au dispositif :

$$\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}} \,, \qquad 0 \leq \eta \leq 1 \,, \qquad \text{unité : - .}$$

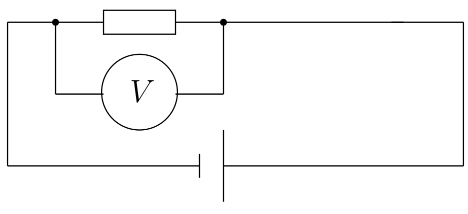
10.9 Ampèremètre et voltmètre

L'**ampèremètre** mesure des courants alors que le **voltmètre** mesure des tensions.

Pour mesurer le courant traversant un élément d'un circuit, on doit insérer l'ampèremètre en série avec cet élément. La résistance de l'ampèremètre doit être la plus petite possible.



Pour mesurer la tension aux bornes d'un élément d'un circuit, on doit insérer le voltmètre en parallèle avec cet élément. La résistance du voltmètre doit être la plus grande possible.



11 Magnétostatique

11.1 Force de Lorentz et champ magnétique

La force que subit une particule chargée en mouvement au voisinage d'un aimant ou d'un fil parcouru par un courant est appelée **force de Lorentz** :

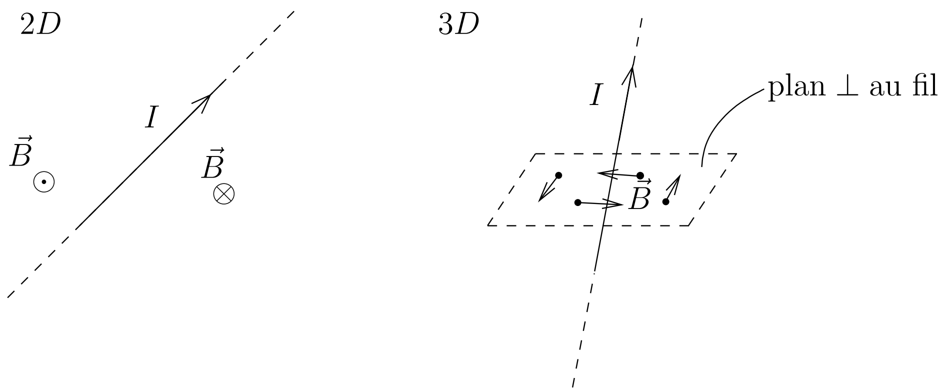
$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}\,,$$

où q est la charge de la particule, $\vec{v}$ sa vitesse et $\vec{B}$ un vecteur dépendant de l'aimant ou du courant dans le fil, ainsi que de l'endroit $\vec{r}$ où se trouve la charge q (voir section 11.5.1).

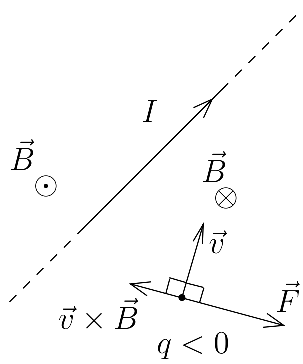
Remarque : La force de Lorentz ne travaille pas.

Le champ vectoriel $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ est le **champ magnétique** à l'endroit $\vec{r}$.
Unité : $\dfrac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T}$ ("tesla").

Exemple : Cas d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant I



Les lignes de champ sont dans ce cas des cercles perpendiculaires au fil et centrés sur ce dernier. Le sens de $\vec{B}$ est donné par la règle du tire-bouchon : en tournant dans le sens indiqué par $\vec{B}$, on avance selon I.
Pour une charge q à vitesse $\vec{v}$:



11.1.1 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

a) Cas d'un champ magnétique uniforme ($\vec{B} = \overrightarrow{\text{cste}}$)

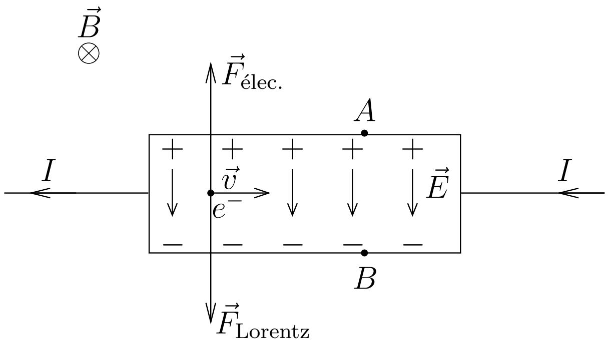
  i) Si $\vec{v} \perp \vec{B}$: mouvement circulaire uniforme de rayon $R = \dfrac{mv}{|q|B}$.

  ii) Si $\vec{v}$ est quelconque : trajectoire hélicoïdale, ayant comme axe une ligne du champ magnétique $\vec{B}$.

b) Cas d'un champ magnétique produit par un fil rectiligne infini
Si la vitesse de la particule est parallèle au plan formé par la particule et le fil rectiligne, cette dernière reste toujours dans le même plan et sa trajectoire a un rayon de courbure grand loin du fil et petit proche du fil.

11.1.2 Effet Hall

Un courant dans une feuille métallique plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ induit une tension transversale.



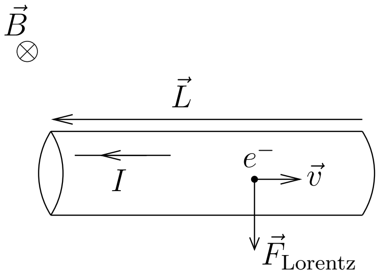
Sous l'effet de $\vec{F}_{\text{Lorentz}}$, les charges se séparent jusqu'à ce que $\vec{F}_{\text{élec.}}$ (due au champ électrique crée par les charges déplacées) compense exactement la force magnétique :

$$q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Il apparaît donc une tension transversale U_{AB}.

11.2 Force de Laplace

Considérons un fil de longueur $L = ||\vec{L}||$, parcouru par un courant I et plongé dans un champ $\vec{B}$.



Les électrons de conduction subissent $\vec{F}_{\text{Lorentz}}$ et appuient sur le fil. Ainsi, un fil parcouru par un courant dans un champ magnétique subit la **force de Laplace**

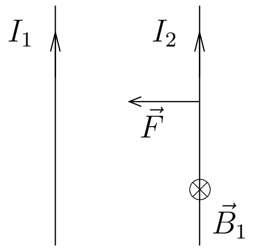
$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}\,,$$

où $\vec{L}$ est le vecteur donnant la longueur du fil et le sens du courant.

11.2.1 Deux fils parallèles parcourus par des courants

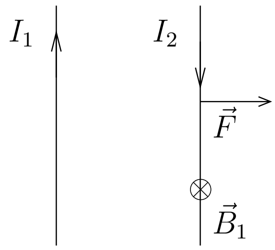
Le courant I_2 se trouve dans le champ $\vec{B}_1$ produit par le courant I_1.

a) Courants de même sens



Les fils se rapprochent.

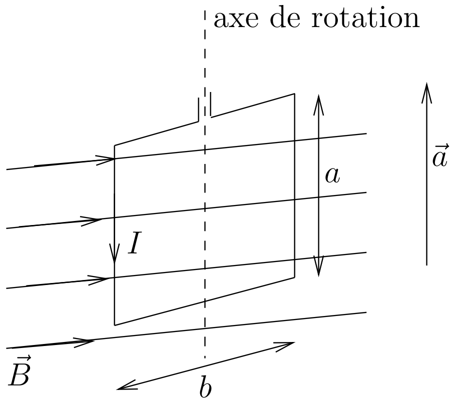
b) Courants de sens opposé



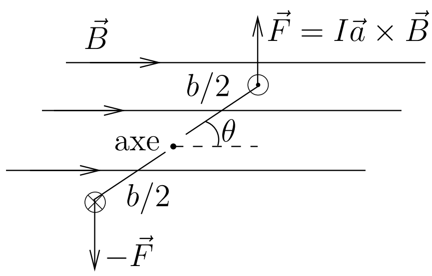
Les fils s'éloignent.

11.2.2 Galvanomètre, moteur électrique

Le **galvanomètre** est un cadre rectangulaire de côtés a et b, mobile autour d'un axe et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Lorsque le cadre est parcouru par un courant I, ce dernier subit un couple de forces de Laplace.



Vue de dessus



Lorsque le couple est compensé par un couple de rappel de constante C, la mesure de l'angle d'équilibre θ permet de déduire le courant traversant le cadre :

$$I = \frac{C\theta}{abB\cos\theta}\,.$$

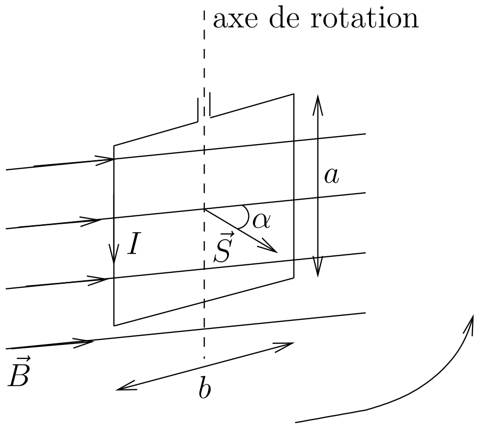
Le **moteur électrique à courant continu** est basé sur le même principe que le galvanomètre si ce n'est que le couple de rappel n'existe pas et que le sens du courant est inversé périodiquement de manière à ce que le couple soit toujours dans le même sens.

11.3 Moment dipolaire magnétique, aimants

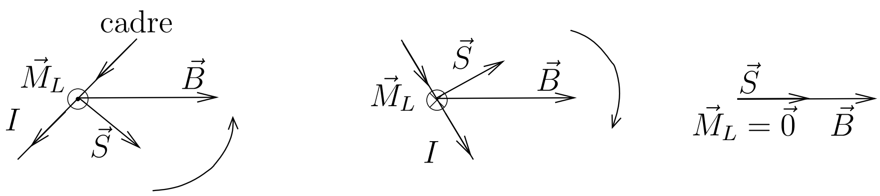
On définit le **moment dipolaire magnétique** d'un cadre par

$$\vec{m} = I\vec{S}\,,$$

où $\vec{S}$ est le vecteur normal au cadre, de norme ab (surface définie par le cadre) et de sens donné par la règle du tire-bouchon selon le sens du courant.

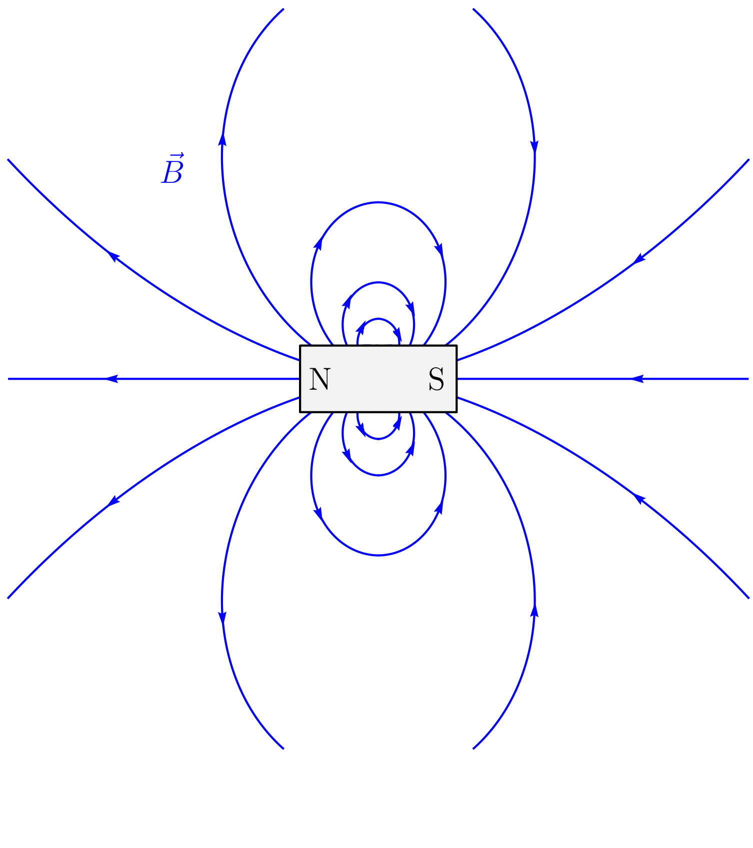


Rotation induite par $\vec{M}_L = \vec{m} \times \vec{B}$

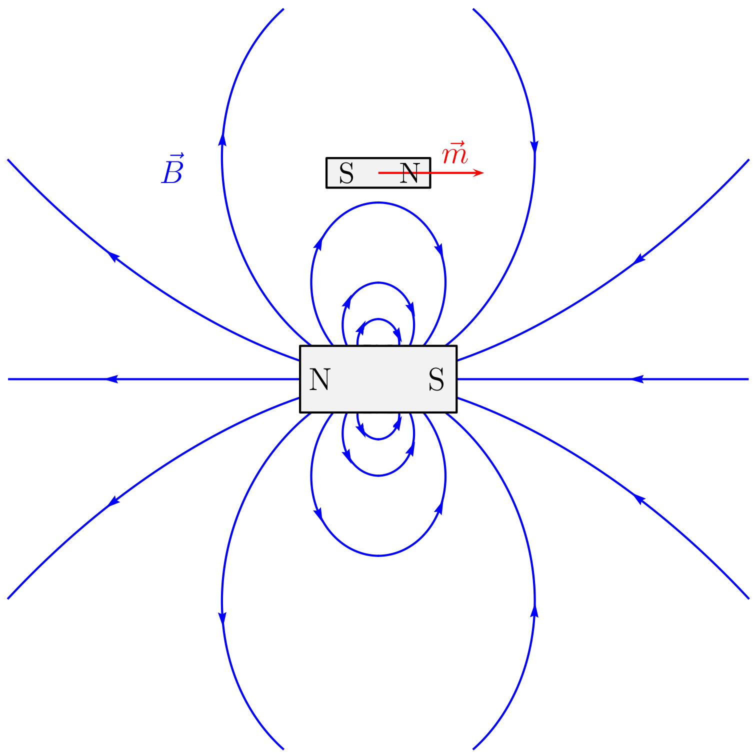


Le moment dipolaire $\vec{m}$ tend à s'aligner sur le champ $\vec{B}$.

Exemple :
Un **aimant** peut être vu comme formé de petits courants permanents : il crée un champ $\vec{B}$.



Un second aimant peut être vu comme un dipôle magnétique (moment dipolaire) $\vec{m}$ s'alignant sur le champ $\vec{B}$ produit par le premier aimant :



Un aimant possède toujours deux pôles. Deux pôles similaires se repoussent et deux pôles différents s'attirent.

11.4 Flux du champ magnétique

Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est toujours nul :

$$\psi = \oint_{\Sigma \text{ fermée}} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0\,.$$

Il n'existe donc pas de charge magnétique (le champ magnétique n'a ni sources, ni puits) et les lignes de champ sont toujours fermées.

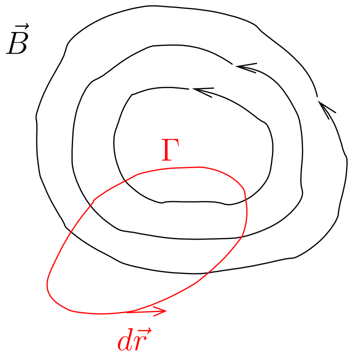
Pour rappel, en électrostatique, le flux du champ électrique s'écrit quant à lui (loi de Gauss)

$$\oint_{\Sigma \text{ fermée}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}\,,$$

ce qui traduit le fait que le champ électrique possède des sources (charges électriques).

11.5 Circulation du champ magnétique

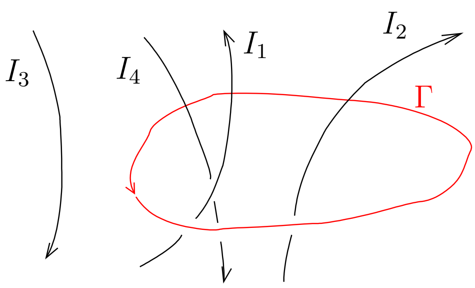
Considérons une courbe fermée Γ dans un champ $\vec{B}$:



La **circulation** de $\vec{B}$ le long de Γ est proportionnelle aux courants enlacés par Γ :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \, I_{\text{enlacé}} \qquad \text{(Loi d'ampère)}\,,$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{V\,s\,A^{-1}m^{-1}}$ est une constante appelée **perméabilité magnétique du vide**.

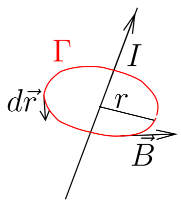


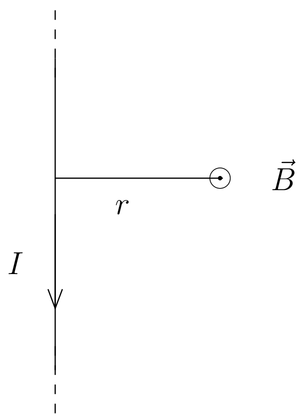
$I_{\text{enlacé}}$ est compté positif s'il a le sens de l'avancement du tire-bouchon tournant dans le sens du parcours :

$$I_{\text{enlacé}} = I_1 + I_2 - I_4\,.$$

11.5.1 Application : champ d'un courant rectiligne

Fil rectiligne infini





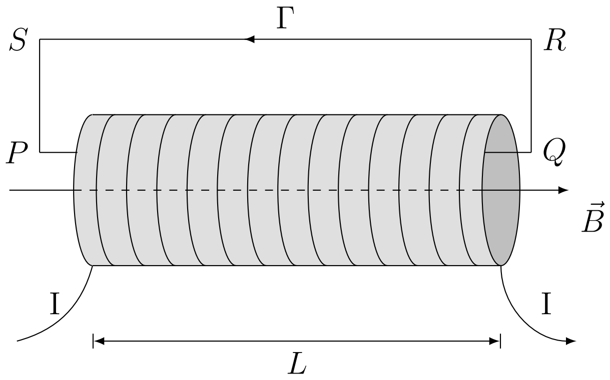
Par symétrie,

- $\vec{B}$ est perpendiculaire au fil ;
- les lignes de champ sont des cercles perpendiculaires au fil et centrés sur le fil ;
- $||\vec{B}||$ ne dépend que de r.

Choix de Γ : une ligne de champ (cercle de rayon r)
Alors,

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint_\Gamma B\,dr = B \oint_\Gamma dr = B2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,.$$

11.5.2 Application : champ dans un solénoïde



Hypothèse : $\vec{B}$ uniforme à l'intérieur, $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur
(bobine de longueur $\gg$ diamètre).

Choix de Γ : PQRS

- $P \to Q$: $\vec{B} \cdot d\vec{r} = B\,dr$, $B =$ constante ;
- $Q \to R$: $\vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$, car $\vec{B} \perp d\vec{r}$;
- $R \to S$: $\vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$, car $\vec{B} = \vec{0}$;
- $S \to P$: $\vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$, car $\vec{B} \perp d\vec{r}$.

Ainsi,

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_P^Q B\,dr = BL = \mu_0 N I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 N I}{L}\,,$$

où N est le nombre de spires.