Mouvements amortis et forcés

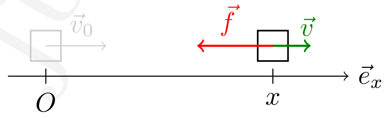
EPFL - CMS/MAN - Physique, Burmeister 2 juin 2022

1 Freinage proportionnel à la vitesse

1.1 Modèle

Considérons un objet glissant sur le sol et soumis à une force de frottement de la forme

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v}\,.$$



Newton : $-\lambda \vec{v} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}}\,.$

Pour un choix des origines du temps et de l'espace, il passe à l'instant $t = 0$ en $x = 0$ avec la vitesse $\vec{v}_0$ (conditions initiales).

Selon $\vec{e}_x$: $-\lambda v = m\dot{v}$, $v(0) = v_0$ et $x(0) = 0$. Posons $\boxed{\gamma = \frac{\lambda}{m}}$:

$$\boxed{\dot{v} + \gamma v = 0 \quad \forall t \qquad \text{avec } v(0) = v_0 \text{ et } x(0) = 0\,.} \tag{1}$$

Nous cherchons les fonctions du temps $v(t)$ vérifiant (1).

1.2 Solution

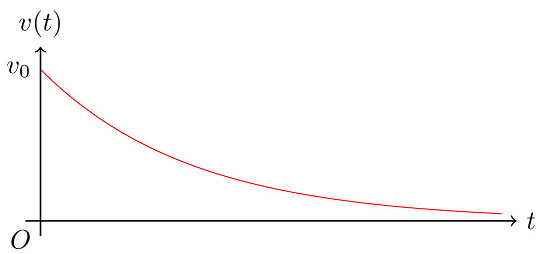
Soit $f(t) = e^{-\gamma t}$. Alors $\dot{f} = -\gamma e^{-\gamma t} = -\gamma f$ et f vérifie

$$\dot{f} + \gamma f = 0 \quad \forall t\,.$$

On peut montrer que toute solution à (1) est multiple de $f(t)$. Ainsi $\boxed{v(t) = Ae^{-\gamma t}\,.}$

Avec la condition initiale $v(0) = A = v_0$,

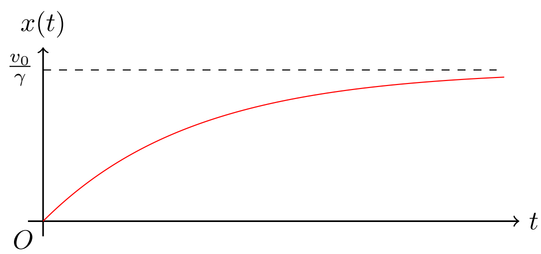
$$\boxed{v(t) = v_0 e^{-\gamma t}\,.} \tag{2}$$



Il suit (primitive) que $x(t) = -\frac{v_0}{\gamma} e^{-\gamma t} + B\,.$

Avec la condition initiale $x(0) = -\frac{v_0}{\gamma} + B = 0$,

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})\,.} \tag{3}$$



Remarque : pour $t \to \infty$, nous avons bien $v \to 0$ (l'objet s'arrête) et la position finale est $x \to \frac{v_0}{\gamma}$.

1.3 Evolution semblable : décroissance de la radioactivité

Dans un morceau de matière radioactive, notons N le nombre de noyaux non désintégrés. Pendant un intervalle de temps dt, chacun a une probabilité de se désintégrer donnée par

$$p = \lambda dt \,,$$

et leur nombre change de $dN = -pN = -\lambda N dt$:

$$\dot{N} + \lambda N = 0 \,.$$

Avec un nombre initial $N_0 = N(0)$ de noyaux non désintégrés, l'évolution temporelle est ainsi

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \,.$$

On appelle demie-vie T d'un élément radioactif le temps de diviser le nombre de noyaux non désintégrés par deux :

$$N(T) = N_0 e^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda} \,.$$

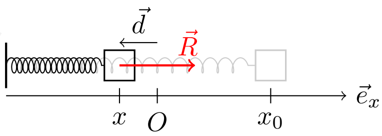
Remarque : $\tau = 1/\lambda$ est également la durée de vie moyenne d'un noyau non désintégré.

2 Oscillateur harmonique

2.1 Modèle

Considérons un objet glissant sur le sol et soumis à une force de rappel

$$\vec{R} = -k\vec{d} = -kx\vec{e}_x \,.$$



Equation de Newton : $-k\vec{d} = m\vec{a}$.

A l'instant $t = 0$, il est lâché en $x = x_0$ à vitesse v_0 (conditions initiales).
Selon $\vec{e}_x$: $-kx = m\ddot{x}$, $v(0) = v_0$ et $x(0) = x_0$. Posons $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \forall t \qquad \text{avec } v(0) = v_0 \text{ et } x(0) = x_0 \,.} \tag{4}$$

Nous cherchons les fonctions du temps $x(t)$ vérifiant (4).

2.2 Solution

Rappel : les dérivées de la fonction $u(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, sont multiples de $u(t)$:

$$u^{(n)}(t) = \lambda^n u(t) \qquad n \in \mathbb{N} \,.$$

En mettant une telle fonction dans l'équation de l'OH (4), on obtient le polynôme caractéristique et ses racines

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega_0 \,.$$

Les solutions complexes à (4) sont alors $u_1(t) = e^{+i\omega_0 t}$ et $u_2(t) = e^{-i\omega_0 t}$.
Toute solution à (4) est combinaison linéaire de $u_1(t)$ et de $u_2(t)$.
Ainsi $x(t) = A_1 u_1(t) + A_2 u_2(t)$ $(A_1, A_2 \in \mathbb{C})$ et

$$x(0) = A_1 u_1(0) + A_2 u_2(0) = A_1 + A_2 = x_0 \,.$$

De plus, $v(t) = \dot{x}(t) = A_1 \dot{u}_1 + A_2 \dot{u}_2 = i\omega A_1 u_1 - i\omega A_2 u_2$ et

$$v(0) = i\omega(A_1 - A_2) = v_0 \,.$$

Les constantes A_1 et A_2 valent alors

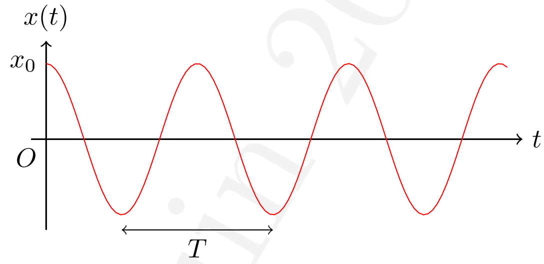
$$A_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{i\omega_0}\right) \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{i\omega_0}\right)$$

et la solution s'écrit donc

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,.} \tag{5}$$

Dans le cas d'un lâcher à vitesse nulle,

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)\,.} \tag{6}$$



3 Oscillateur harmonique amorti

3.1 Modèle

Considérons un objet glissant sur le sol et soumis à une force de rappel et à un frottement proportionnel à la vitesse

$$\vec{f} = -\mu\vec{v} = -\mu\dot{x}\vec{e}_x\,.$$

A l'instant $t = 0$, il est lâché en $x = x_0$ à vitesse v_0 (conditions initiales).
Selon $\vec{e}_x$: $-\mu\dot{x} - kx = m\ddot{x}$, $v(0) = v_0$ et $x(0) = x_0$. Posons $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ et $\boxed{2\nu = \frac{\mu}{m}}$:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \forall t \qquad \text{avec } v(0) = v_0 \text{ et } x(0) = x_0\,.} \tag{7}$$

Nous cherchons les fonctions du temps $x(t)$ vérifiant (7).

3.2 Solution

Rappel : les dérivées de la fonction $u(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, sont multiples de $u(t)$:

$$u^{(n)}(t) = \lambda^n u(t) \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Les racines du polynôme caractéristique sont données par

$$\lambda^2 + 2\nu\lambda + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \omega_0^2}\,.$$

Supposons que l'amortissement est faible ($\nu^2 < \omega_0^2$) et posons $\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \nu^2 > 0}$. Les solutions complexes sont alors

$$u_1(t) = e^{-\nu t + i\omega t} \qquad u_2(t) = e^{-\nu t - i\omega t}$$

Toute solution à (7) est combinaison linéaire de $u_1(t)$ et de $u_2(t)$.
Ainsi $x(t) = A_1 u_1(t) + A_2 u_2(t)$ $(A_1, A_2 \in \mathbb{C})$ et

$$x(0) = A_1 u_1(0) + A_2 u_2(0) = A_1 + A_2 = x_0\,.$$

De plus, $v(t) = \dot{x}(t) = A_1\dot{u}_1 + A_2\dot{u}_2 = (-\nu + i\omega)A_1 u_1 + (-\nu - i\omega)A_2 u_2$ et

$$v(0) = (-\nu + i\omega)A_1 + (-\nu - i\omega)A_2 = v_0\,.$$

Les constantes A_1 et A_2 valent alors

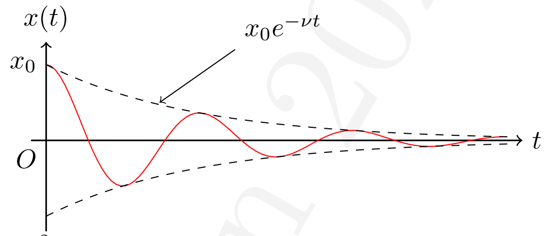
$$A_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0 + \nu x_0}{i\omega}\right) \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0 + \nu x_0}{i\omega}\right)$$

et la solution s'écrit donc

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \nu x_0}{\omega} \sin(\omega t)\right) e^{-\nu t} .} \tag{8}$$

L'oscillation est amortie par le frottement.
Dans le cas d'un lâcher à vitesse nulle,

$$\boxed{x(t) = x_0 \left(\cos(\omega t) + \tfrac{\nu}{\omega} \sin(\omega t)\right) e^{-\nu t} .} \tag{9}$$



La période T de l'oscillation amortie est donnée par $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Comme $\omega < \omega_0$, la période de l'oscillateur amortie est plus grande que celle de l'oscillateur harmonique, conséquence du freinage.

4 Oscillateur harmonique amorti et forcé

4.1 Modèle

Considérons un objet glissant sur le sol et soumis à une force de rappel, à un frottement proportionnel à la vitesse et, en plus, à une force périodique de pulsation Ω (par exemple si l'objet porte une charge électrique et bouge parallèlement à un champ électrique alternatif). A l'instant $t = 0$, il est lâché en $x = x_0$ à vitesse v_0 (conditions initiales). Selon $\vec{e}_x$: $-\mu\dot{x} - kx + F\sin(\Omega t) = m\ddot{x}$, $v(0) = v_0$ et $x(0) = x_0$.
Posons $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$, $\boxed{2\nu = \frac{\mu}{m}}$ et $\boxed{p = \frac{F}{m}}$:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\Omega t) \quad \forall t \qquad \text{avec } v(0) = v_0 \text{ et } x(0) = x_0 .} \tag{10}$$

Nous cherchons les fonctions du temps $x(t)$ vérifiant (10).

4.2 Solution

On peut montrer que toute solution à l'équation différentielle (10) est une superposition (somme) de deux fonctions.

- L'une est une solution quelconque au « problème homogène » (sans second membre), équation différentielle (7). Cette solution est amortie, donc transitoire : $x_{\text{trans}}(t) = A_1 e^{-\nu t + i\omega t} + A_2 e^{-\nu t - i\omega t}$.
- La seconde est une solution particulière à l'équation différentielle (10). Cette solution n'est pas amortie, mais permanente : $x_{\text{perm}}(t)$.

Ainsi,

$$\boxed{x(t) = x_{\text{trans}}(t) + x_{\text{perm}}(t) \quad \forall t \qquad \text{avec } v(0) = v_0 \text{ et } x(0) = x_0 .} \tag{11}$$

4.3 Solution permanente

Nous pouvons nous attendre à ce que $x_{\text{perm}}(t)$ soit de même pulsation que l'excitation :

$$x_{\text{perm}}(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) .$$

En imposant que cette fonction soit solution à (10), nous déterminons les coefficients A et B .
Remarquons cependant que $\sin(\Omega t)$ est la partie imaginaire de $e^{i\Omega t}$. Comme (10) est une équation différentielle linéaire, il suffit de chercher la solution complexe $\tilde{x}(t)$ pour l'excitation complexe $pe^{i\Omega t}$ et d'en prendre la partie imaginaire.
Cherchons donc une solution $\tilde{x}(t) = He^{i\Omega t}$, de même pulsation que l'excitation. Avec

$$\tilde{x} = He^{i\Omega t} \qquad \dot{\tilde{x}} = i\Omega He^{i\Omega t} \qquad \ddot{\tilde{x}} = -\Omega^2 He^{i\Omega t} ,$$

(10) devient

$$(-\Omega^2 + i2\nu\Omega + \omega_0^2)He^{i\Omega t} = pe^{i\Omega t} \quad \forall t\,.$$

On en tire le coefficient $H(\Omega)$ (fonction de transfert) :

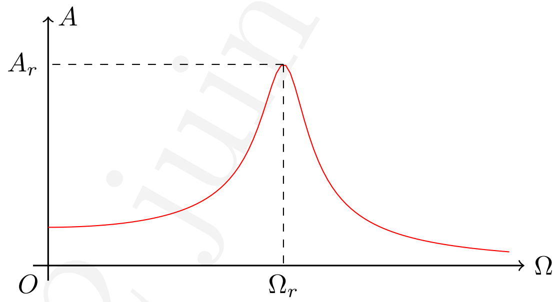
$$H(\Omega) = \frac{p}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\nu\Omega}$$

que l'on peut mettre sous forme trigonométrique $H(\Omega) = |H|e^{-i\varphi}$.
Ainsi

$$\boxed{x_{\text{perm}}(t) = \operatorname{Im}\tilde{x}(t) = \operatorname{Im}\left(He^{i\Omega t}\right) = |H|\sin(\Omega t - \varphi)\,.} \tag{12}$$

L'amplitude de la réponse permanente est donc une fonction de la pulsation de l'excitation :

$$A(\Omega) = |H(\Omega)| = \frac{p}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\nu\Omega)^2}}$$

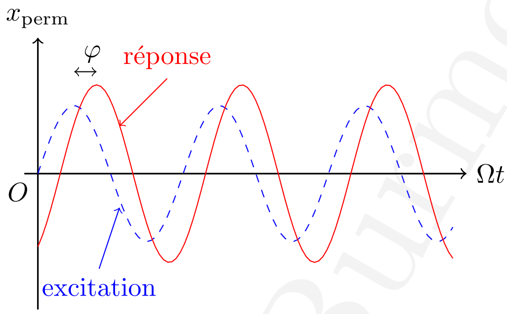


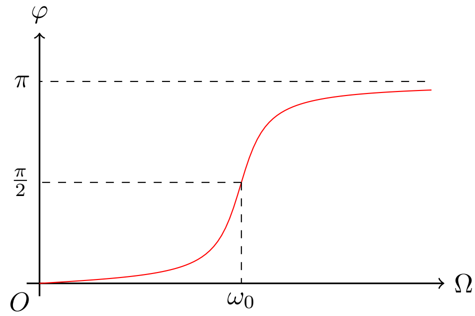
Son maximum (résonance) $A_r = \frac{p}{2\nu\sqrt{\omega_0^2 - \nu^2}}$ est atteint pour $\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\nu^2$.

L'oscillateur forcé agit donc comme un filtre basse-bande : les fréquences voisines de $\dfrac{\Omega_r}{2\pi}$ sont bien transmises, les autres moins bien.
Comme $\operatorname{Im}(H) \leq 0$, le déphasage φ est entre 0 et π. On montre qu'il est donné par

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\nu\Omega)^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{2\nu\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\nu\Omega)^2}} > 0 \quad \varphi \in [0, \pi]\,.$$

Il décrit, à l'échelle d'une oscillation, le retard temporel de la réponse sur l'excitation. Petit à basses fréquences, il tend vers π à hautes fréquences.





4.4 Battement transitoire

La solution

$$x(t) = x_{\text{trans}}(t) + x_{\text{perm}}(t)$$

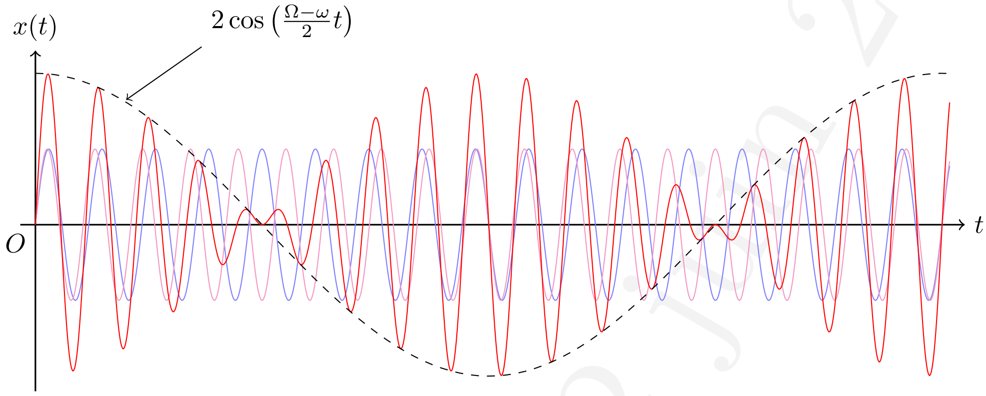
est une superposition de deux oscillations, de pulsations ω et Ω, la première étant amortie, la seconde permanente. Voyons comment interpréter cette somme.
Pour le cas simple d'une addition de deux sinus de même amplitude, nous avons par identité trigonométrique

$$\sin(\Omega t) + \sin(\omega t) = 2\cos\left(\frac{\Omega - \omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\Omega + \omega}{2}t\right)\,.$$

Si les deux pulsations sont proches, leur moyenne est du même ordre. Cependant leur demi-différence est petite :

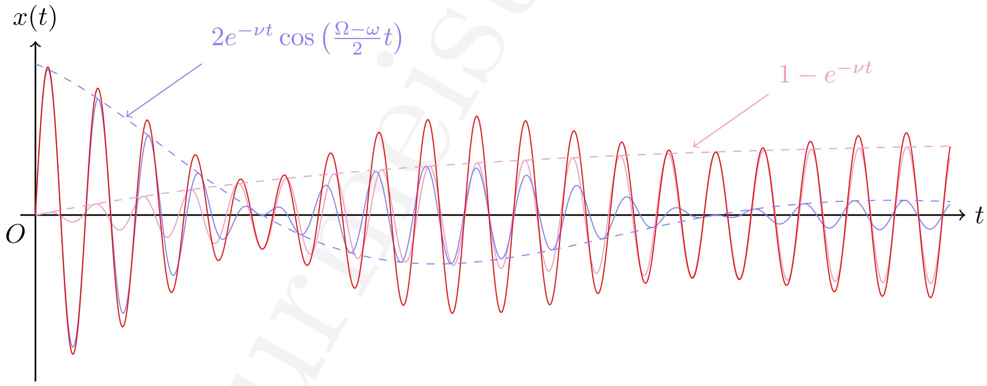
$$\omega \simeq \Omega \simeq \frac{\Omega+\omega}{2} \qquad \frac{\Omega-\omega}{2} \ll \Omega\,.$$

Cela s'interprète comme une oscillation rapide de pulsation $\frac{\Omega+\omega}{2}$ et d'amplitude fluctuant lentement au cours du temps avec une pulsation $\frac{\Omega-\omega}{2}$. Selon si l'interférence entre les deux ondes est constructive (en phase) ou destructrice (en contre-phase), l'amplitude résultante est importante ou faible : c'est le battement.



L'amortissement de la contribution transitoire $x_{\mathrm{trans}}(t)$ entraîne la disparition progressive du battement. Ne subsiste que la réponse permanente $x_{\mathrm{perm}}(t)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\sin(\Omega t) + e^{-\nu t}\sin(\omega t) &= (1-e^{-\nu t})\sin(\Omega t) + e^{-\nu t}\left(\sin(\Omega t)+\sin(\omega t)\right) \\
&= (1-e^{-\nu t})\sin(\Omega t) + 2e^{-\nu t}\cos\left(\frac{\Omega-\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\Omega+\omega}{2}t\right)\,.
\end{aligned}$$



Pour les conditions initiales $v(0) = v_0 = 0$ et $x(0) = x_0 = 0$, la solution à l'équation (10) est donnée par

$$x(t) = \left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)e^{-\nu t} + |H|\sin(\Omega t - \varphi)$$

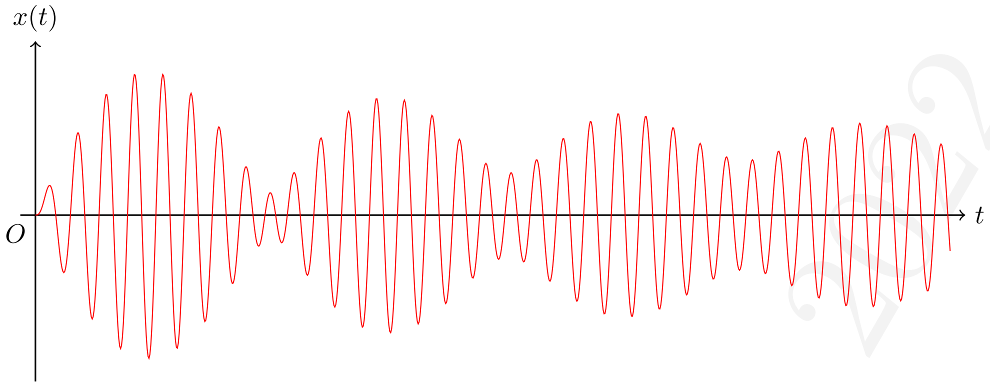
avec

$$A = |H|\sin\varphi \qquad B = \frac{|H|}{\Omega}(\nu\sin\varphi - \Omega\cos\varphi)$$

et donc

$$\begin{aligned}
x(t) &= |H|\left\{\left(\sin\varphi\cos(\omega t) + \tfrac{\nu\sin\varphi-\Omega\cos\varphi}{\omega}\sin(\omega t) + \sin(\Omega t-\varphi)\right)e^{-\nu t}\right. \\
&\qquad \left. + (1-e^{-\nu t})\sin(\Omega t-\varphi)\right\},.
\end{aligned} \tag{13}$$

On y reconnaît bien le battement transitoire et la réponse permanente.


x(t)
O
t