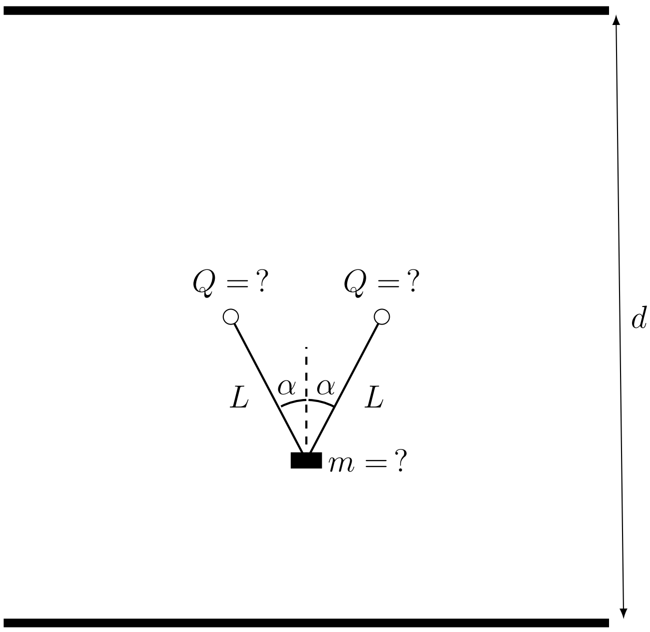
Exercice à rendre

25 mars 2024

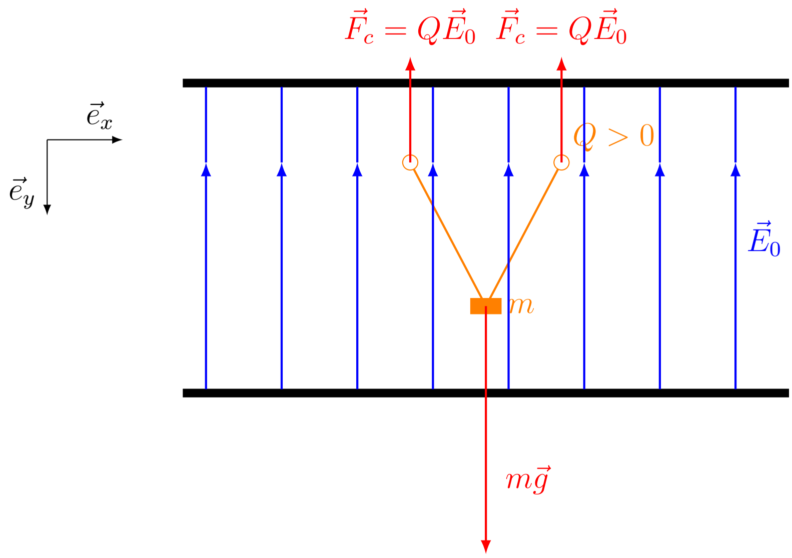
Enoncé

Deux petites sphères identiques chargées supportant une masse m sont à l'équilibre dans un condensateur plan formé de deux plaques horizontales séparées d'une distance d. On maintient une tension U entre les deux plaques. Les sphères sont de masses négligeables, portent chacune une charge Q positive et sont reliées à la masse par l'intermédiaire de deux fils de longueur L qui sont également de masse négligeable. A l'équilibre, on observe que les deux fils forment un angle α avec la verticale.



1. Déterminez complètement (direction, sens et intensité) le champ électrique produit par le condensateur seul (on admet que, malgré la présence des sphères chargées, le champ du condensateur est uniforme). Indiquez sur le dessin la plaque du condensateur ayant le potentiel électrique le plus élevé.
2. A l'aide de l'expression du champ électrique produit par le condensateur, établissez une relation simple entre la masse m et la charge Q portée par les sphères.
3. Déterminez l'expression de la charge Q portée par les sphères.
4. Esquissez quelques équipotentielles et lignes de champ en argumentant.

1. On suppose que le champ électrique $\vec{E}_0$ produit par le condensateur est uniforme. A l'extérieur du condensateur, le champ électrique est nul. A l'intérieur, ses lignes de champ sont perpendiculaires aux plaques, donc verticales 1 pt (les plaques sont des conducteurs) et dirigés du bas vers le haut 1 pt de manière à assurer l'équilibre de l'objet complet (sphères, fils et masse) :



Quant à l'intensité du champ électrique uniforme, elle est donnée par

$$E_0 = \frac{U}{d} . \quad 1 \text{ pt}$$

La plaque inférieure est celle ayant le potentiel électrique le plus élevé. 1 pt

2. En considérant la figure ci-dessus pour l'objet complet (sphères, fils et masse), Newton :

$$m\vec{g} + 2\vec{F}_c = \vec{0} .$$

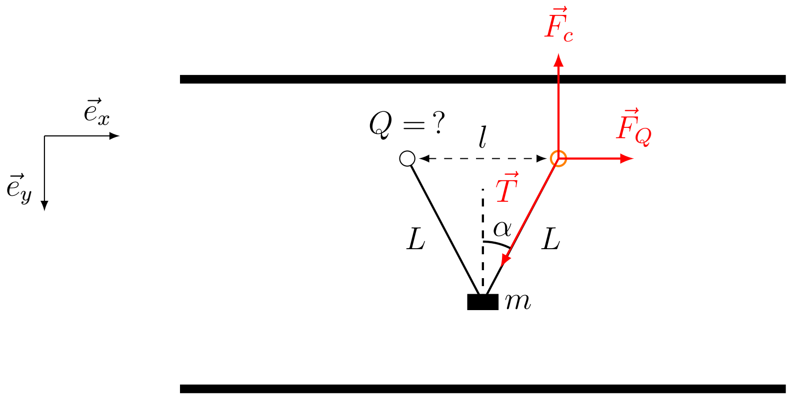
Selon $\vec{e}_y$,

$$mg - 2F_c = 0 ,$$

où $F_c = QE_0 = Q\frac{U}{d}$ 1 pt. Ainsi,

$$m = \frac{2U}{gd}Q . \quad 1 \text{ pt}$$

3. Objet : l'une des deux sphères



Newton :

$$\vec{F}_c + \vec{F}_Q + \vec{T} = \vec{0}\,.$$

Selon $\vec{e}_x$,

$$F_Q - T\sin\alpha = 0\,,$$

avec

$$F_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{l^2}\,, \qquad \text{1 pt}$$

où $l = 2L\sin\alpha$. 1 pt

Selon $\vec{e}_y$,

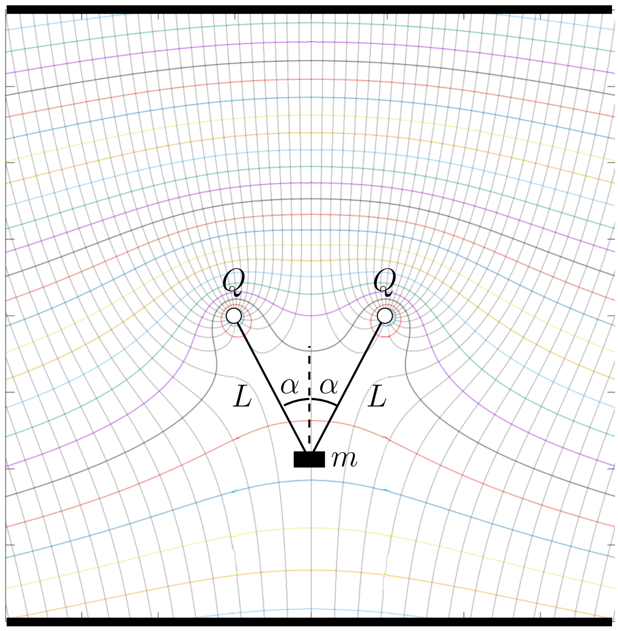
$$-F_c + T\cos\alpha = 0\,.$$

Alors, par quotient,

$$\frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{F_Q}{F_c} \Rightarrow \quad Q = \frac{16\pi\epsilon_0 L^2 U}{d}\sin^2\alpha\tan\alpha\,. \quad \text{1 pt}$$

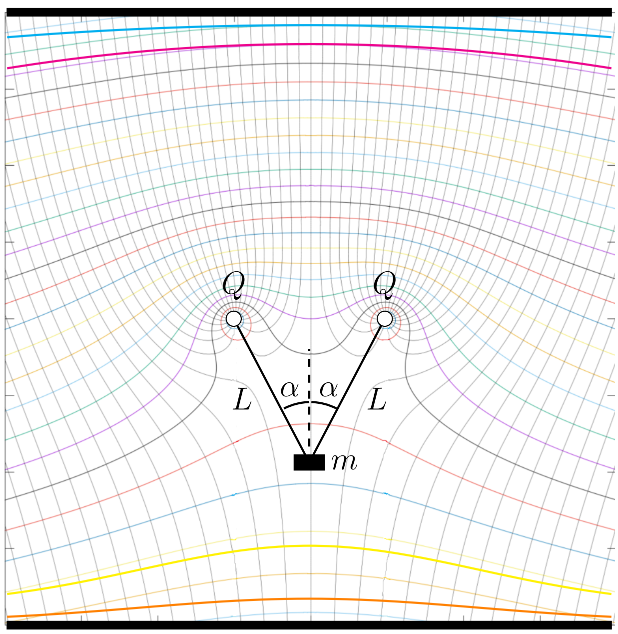
Remarque : on peut aussi considérer d'autres objets, comme p.ex. sphère+masse.

4. Au voisinage des plaques, le champ est supposé homogène (plaque uniformément chargées, voir la remarque !). Au voisinage des charges, le champ est radial. Dans la zone supérieure, le champ est plus intense (champs individuels tous plutôt vers le haut) que dans la zone inférieure (champ uniforme vers le haut, champs des sphères vers le bas). Le champ est nul en un point du plan de symétrie et en-dessous des sphères.



Rem. En réalité, à cause de la présence des sphères, les charges sur les plaques se réarrangent de sorte que le champ à l'intérieur est nul. C'est ainsi que les plaques sont des équipotentielles : la simulation ici n'est pas très bonne, les équipotentielles près des plaques doivent être parallèles à ces dernières.

Correction "à la main" en tenant compte du réarrangements des charges dans les plaques :



2 pts

Total sur 11 points