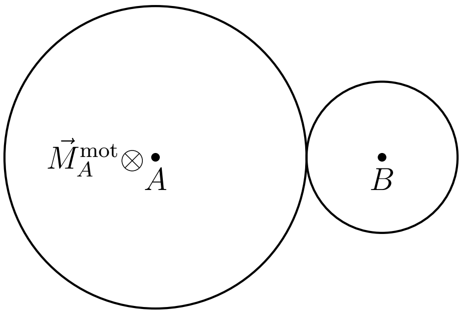
Exercice à rendre

11 mars 2024

Enoncé

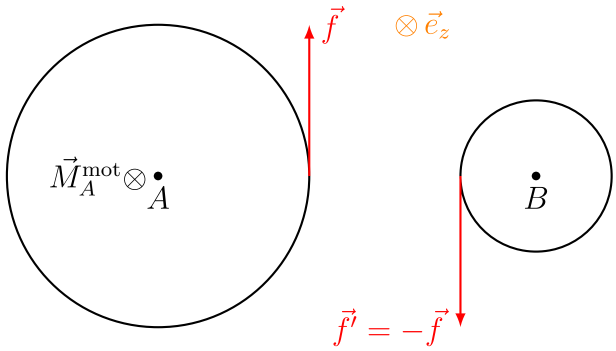


Deux roues vides (anneaux) sont montées sur des axes verticaux fixes A et B. Elles sont en contact de sorte à s'entraîner sans glisser l'une sur l'autre.

La première roue d'axe A (rayon R, masse M) est soumise à un couple $\vec{M}_A^{\text{mot}} \otimes$ produit par un moteur. Elle entraîne ainsi la seconde roue d'axe B (rayon r, masse m).

Déterminer l'accélération angulaire de la première roue.

On observe que la roue de gauche est actionnée par le moment de force $\vec{M}_A^{\text{mot}}$: son accélération angulaire est entrante $\vec{\gamma}_A \otimes$. Elle entraîne la roue de droite par frottement. L'accélération angulaire de cette dernière est sortante $\vec{\gamma}_B \odot$.



Modélisation : dessin 1 pt, indication des objets 1 pt, moment du moteur et forces de frottement (ou leur moment) (vecteurs !) 1 pt, repère 1 pt

Première roue

Moments de force : $\vec{M}_A^{\text{mot}}$ et celui du frottement $\vec{f}$

Rotation p.r. à A : $\vec{M}_A = \vec{M}_A^{\text{mot}} + \vec{M}_A(\vec{f}) = I_A \vec{\gamma}_A$ vectoriel ! 1 pt

Selon $\vec{e}_z$:

$$M_A^{\text{mot}} - Rf = MR^2 \gamma_A \,. \qquad 1 \text{ pt}$$

Seconde roue

Moment de force : celui du frottement $\vec{f}'$

Rotation p.r. à B : $\vec{M}_B = \vec{M}_B(-\vec{f}) = I_B \vec{\gamma}_B$ vectoriel ! 1 pt

Selon $\vec{e}_z$:

$$-rf = mr^2 \gamma_B \,. \qquad 1 \text{ pt}$$

Liaison

Si, pendant une durée Δt, la première roue tourne de $\Delta\varphi_A$ selon $\vec{e}_z$, l'arc de cercle est de longueur $\Delta s = R\Delta\varphi_A$. Ce même arc est effectué par la seconde roue, mais dans le sens inverse : $\Delta s = -r\Delta\varphi_B$. justification 1 pt

Il suit

$$R\frac{\Delta\varphi_A}{\Delta t} = -r\frac{\Delta\varphi_B}{\Delta t} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} R\omega_A = -r\omega_B \Longrightarrow R\gamma_A = -r\gamma_B \qquad 1 \text{ pt}$$

Solution

On a le système suivant :

$$\begin{aligned} M_A^{\text{mot}} - Rf &= MR^2\gamma_A \\ -rf &= mr^2\gamma_B \\ R\gamma_A &= -r\gamma_B \,. \end{aligned}$$

Avec $R\gamma_A = -r\gamma_B$, on a

$$\begin{aligned} M_A^{\text{mot}} - Rf &= MR^2\gamma_A \\ -rf &= -mrR\gamma_A \,. \end{aligned}$$

En amplifiant la première équation par r et la seconde par R, on a par soustraction

$$rM_A^{\text{mot}} = \left(MrR^2 + mrR^2\right)\gamma_A$$

ou encore

$$M_A^{\text{mot}} = (M+m)\,R^2\gamma_A$$

et donc finalement

$$\gamma_A = \frac{M_A^{\text{mot}}}{(M+m)\,R^2}\,. \qquad \text{1 pt}$$

Rem. Dans un cas plus général, avec les moments d'inertie respectifs I_A et I_B :

$$r^2 M_A^{\text{mot}} = \left(r^2 I_A + R^2 I_B\right)\gamma_A$$

Total sur 11 points