Série 23

Exercice 1. Réduire à la forme canonique et représenter les coniques définies par les équations suivantes :

a. $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x - 16y = 0\,,$

b. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0\,.$

c. $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0\,.$

Si les coniques sont dégénérées, déterminer l'équation cartésienne des droites de dégénérescence.

Exercice 2. Dans le plan muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)\,,$ on définit la conique $\mathcal{C}$ par son équation cartésienne :

$$\mathcal{C}:\; x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 18y + 27 = 0\,.$$

a. Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et le nouveau repère $\mathcal{R}'$ dans lequel l'équation est réduite.

b. Calculer, relativement au repère $\mathcal{R}\,,$ les coordonnées d'un foyer de $\mathcal{C}\,.$

Exercice 3. On considère la famille $\mathcal{F}$ des coniques définie par l'équation

$$\mathcal{F}:\; x^2 + 2m\,xy + y^2 - 2x + 2y = 0\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$$

a. Déterminer m de sorte que les coniques de $\mathcal{F}$ soient dégénérées.
Donner alors l'équation cartésienne des droites de dégénérescence.

b. Déterminer en fonction de m le genre des coniques non dégénérées de $\mathcal{F}\,.$

c. Déterminer l'équation cartésienne de l'axe et les coordonnées du sommet de la parabole non dégénérée de $\mathcal{F}\,.$

d. La conique de $\mathcal{F}$ définie par $m = \frac{1}{2}$ est une ellipse.
Déterminer la longueur de son grand axe.

Exercice 4. Soients $A(4\,;0)$ et $B(0\,;3)$ deux points donnés et s une sécante variable de pente $\frac{1}{2}$ qui coupe la droite AB en E et la droite OB en $D\,.$

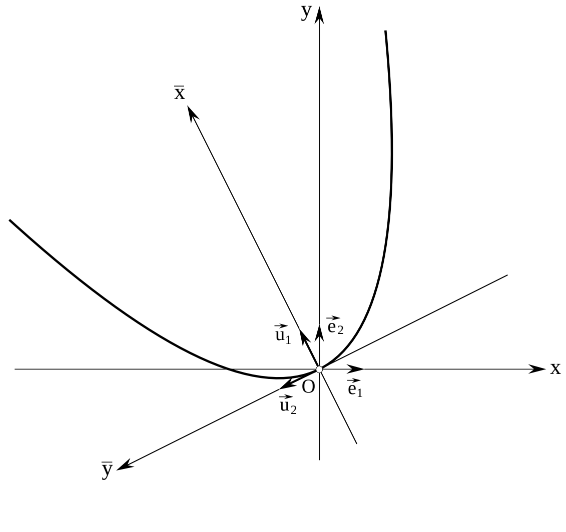
a. Déterminer l'équation du lieu des points $M\,,$ intersections de (OE) et $(AD)\,.$

b. Déterminer la nature du lieu, donner les coordonnées du centre et les équations des asymptotes.

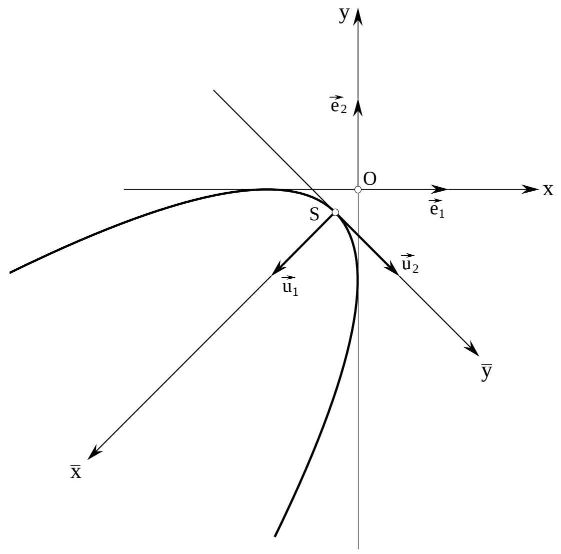
Éléments de réponse :

Ex. 1 :

a.
Parabole d'équation réduite :
$\bar{y}^2 - \frac{8\sqrt{5}}{5}\,\bar{x} = 0\,.$
Axe d'équation : $2x + y = 0\,,$
sommet : $S\,(0\,,\,0)\,.$



b.
Parabole d'équation réduite :
$\bar{y}^2 - \sqrt{2}\,\bar{x} = 0\,.$
Axe d'équation : $x - y = 0\,,$
sommet : $S\,(-\frac{1}{4}\,,\,-\frac{1}{4})\,.$



c.
Conique de genre parabole, dégénérée en deux droites confondues d'équation $x - 3y + 2 = 0\,.$

Ex. 2 :

a. Equation réduite de $\mathcal{C}$: $3\,\overline{x}^{\,2} - \overline{y}^{\,2} - 6 = 0\,.$

Repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ avec $\Omega(4,1)\,,$ $\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b. Coordonnées des foyers : $F_1\,(6,3)$ et $F_2\,(2,-1)\,.$

Ex. 3 :

a. $m = -1\,,$ $d_1 :\ x - y - 2 = 0$ et $d_2 :\ x - y = 0\,.$

b.
- $m \in\,]-1\,,\,1[$: la conique est de genre ellipse.
- $m = 1$: la conique est une parabole non dégénérée.
- $m \in\,]-\infty\,,\,-1[\, \cup\,]1\,,\,+\infty[$: la conique est de genre hyperbole.

c. Axe : $x + y = 0\,,$ sommet : $S\,(0\,,\,0)\,.$

d. Longueur du grand axe : $2\,a = 4\,\sqrt{2}\,.$

Ex. 4 :

a. Equation du lieu : $3x^2 - 12xy - 8y^2 - 12x + 24y = 0\,,$

b. Le lieu est une hyperbole de centre $\Omega\,(2\,,\,0)$ et les pentes des asymptotes sont égales à $-\frac{1}{4}\,(3 \pm \sqrt{15})\,.$