Série 22

Exercice 1.

a. Déterminer l'équation cartésienne d'un hyperboloïde à une nappe engendré par la rotation d'une hyperbole autour de son axe imaginaire.
Prendre une hyperbole γ dans le plan $(O, \vec{e_1}, \vec{e_3})$, d'axe réel $(O, \vec{e_3})$
centrée en O et rotation de γ autour de $(O, \vec{e_1})$.

b. Déterminer l'équation cartésienne d'un cône de révolution d'axe $a = (O, \vec{e_2})$, engendré par la rotation d'une droite d passant par O $(d \neq a)$. Donner une réponse possible.

Exercice 2.

a. Déterminer la nature de la conique suivante (de plus donner la longueur de ses trois axes (on ne demande pas l'axe de révolution)) :

$$\Sigma : 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 1 = 0$$

Et si on a :

$$\Sigma : 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - k = 0\,, \quad k > 0$$

que devient la longueur des axes ?

b. Déterminer la nature de la conique suivante, ainsi que les équations paramétriques de son axe de révolution.

$$\Sigma : 2xy + 2yz + 2xz + 2 = 0$$

Exercice 3.
Déterminer le genre de la quadrique suivante en fonction de k paramètre réel.

$$\Sigma : 3x^2 - 4xy + 4xz + 8yz + k = 0$$

Exercice 4.
Soient le plan $\alpha : z = 0$, un nombre réel a tel que $a > 0$ et la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}\,.$$

sécante à α.
Déterminer le lieu des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$\mathrm{dist}^2(M, \alpha) + \mathrm{dist}^2(M, d) = a$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 :

a. $\Sigma : -\frac{\bar{x}^2}{b^2} + \frac{\bar{y}^2}{a^2} + \frac{\bar{z}^2}{a^2} - 1 = 0$

b. $\Sigma : \frac{\bar{x}^2}{b^2} - \frac{\bar{y}^2}{c^2} + \frac{\bar{z}^2}{b^2} = 0$

Ex. 2 :

a. Equation réduite $\Sigma : 4\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - 1 = 0$, c'est un ellipsoïde de révolution.
Longueur des axes : $2a = 2$ et $2b = 1$; $2a = 2\sqrt{k}$ et $2b = \sqrt{k}$

b. Equation réduite : $\Sigma : -\bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 2\bar{z}^2 + 2 = 0$

C'est un hyperboloïde de révolution à 1 nappe.

Son axe de révolution est donné par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

Ex. 3 :

si $k = 0$: $4\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 - 5\bar{z}^2 = 0$: cône de révolution

si $k > 0$: hyperboloïde de révolution à deux nappes

si $k < 0$: hyperboloïde de révolution à une nappe

Ex. 4 :

$\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} > 0$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2} > 0$ et $-2a < 0$.

Le lieu des points M est donc un ellipsoïde triaxial.