Série 21

Exercice 1. Réduire à la forme canonique, puis représenter les coniques définies par les équations suivantes :

a. $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 22x - 6y + 21 = 0\,,$

b. $41x^2 - 24xy + 34y^2 + 25 = 0\,,$

c. $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0\,,$

d. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0\,.$

Exercice 2. Montrer que les coniques définies par les équations ci-dessous sont dégénérées. Puis déterminer les équations des droites de dégénérescence.

a. $6x^2 - xy - 12y^2 + 2x + 31y - 20 = 0\,,$

b. $x^2 - 6xy + 10y^2 + 10x - 32y + 26 = 0\,.$

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $5x^2+6xy+5y^2+2x-18y-3 = 0$ dans le repère usuel $R_e = (O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)\,.$

a. Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et préciser le nouveau repère R_u .
Représenter $\mathcal{C}$ dans R_e .

b. Dans R_u , calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec le diamètre parallèle à $\vec{e}_1$.

Exercice 4. Soient $A\,(2\,,\,0)$ et $B\,(-2\,,\,0)$ les sommets d'un triangle ABC .
Le troisième sommet C décrit la droite $x + y - 3 = 0$.

a. Déterminer l'équation du lieu de l'orthocentre du triangle ABC .

b. Montrer que ce lieu est une hyperbole et déterminer l'équation cartésienne de ses asymptotes.

Exercice 5. On munit l'espace d'un repère orthonormé direct.

Etude élémentaire de la surface d'équation :

$$\Sigma : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a, b, c > 0$$

a. On pose $a = 3, b = c = 2$:

$$\Sigma : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

Déterminer l'intersection de Σ avec les plans suivants :

- $x = k\,,\ k \in \mathbb{R}$
- $z = k\,,\ k \in \mathbb{R}$

Préciser la nature géométrique des intersections et donner leur équation cartésienne dans le cas où $k = 0$.
En déduire que cette surface est bornée et symétrique par rapport aux trois plans $x = 0\,, y = 0\,, z = 0\,.$

Donner un moyen simple d'obtenir Σ, puis esquisser cette surface appelée éllipsoïde de révolution.

b. Ellipsoïde (triaxial) : On pose $a > b > c > 0$.

Discuter l'intersection de Σ avec les trois plans $x = 0\,, y = 0\,, z = 0$. En donner la nature géométrique.

En déduire que cette surface est bornée et symétrique par rapport à ces trois plans.

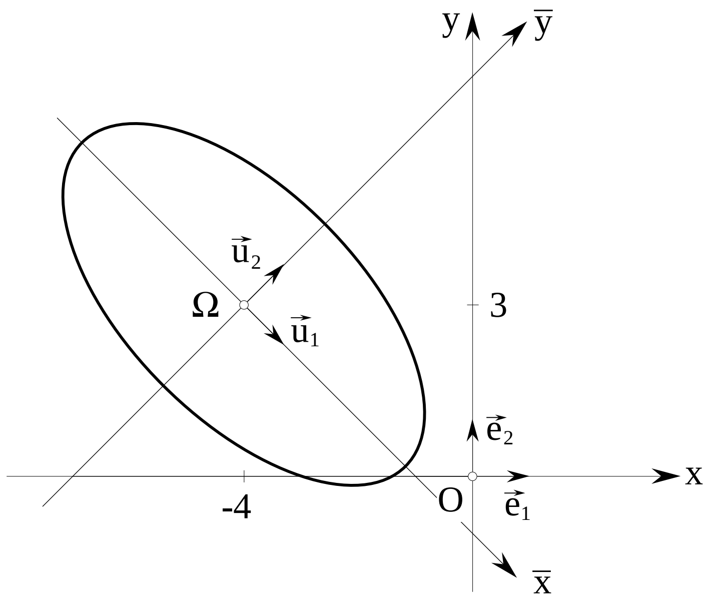
Cet ellipsoïde est-il de révolution ?

Éléments de réponse :

Ex. 1 :

a. Ellipse d'équation réduite : $\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 - 16 = 0$.

Grand axe : $x + y + 1 = 0$, petit axe : $x - y + 7 = 0$.

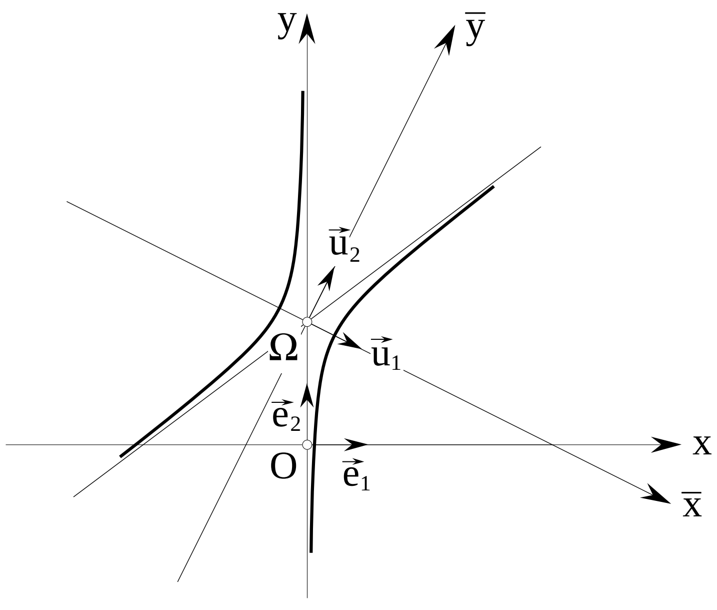


b. Ellipse imaginaire d'équation réduite : $\bar{x}^2 + 2\,\bar{y}^2 + 1 = 0$.

c. Hyperbole d'équation réduite : $4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 1 = 0$.

Axe réel : $x + 2y - 4 = 0$, axe imaginaire : $2x - y + 2 = 0$.

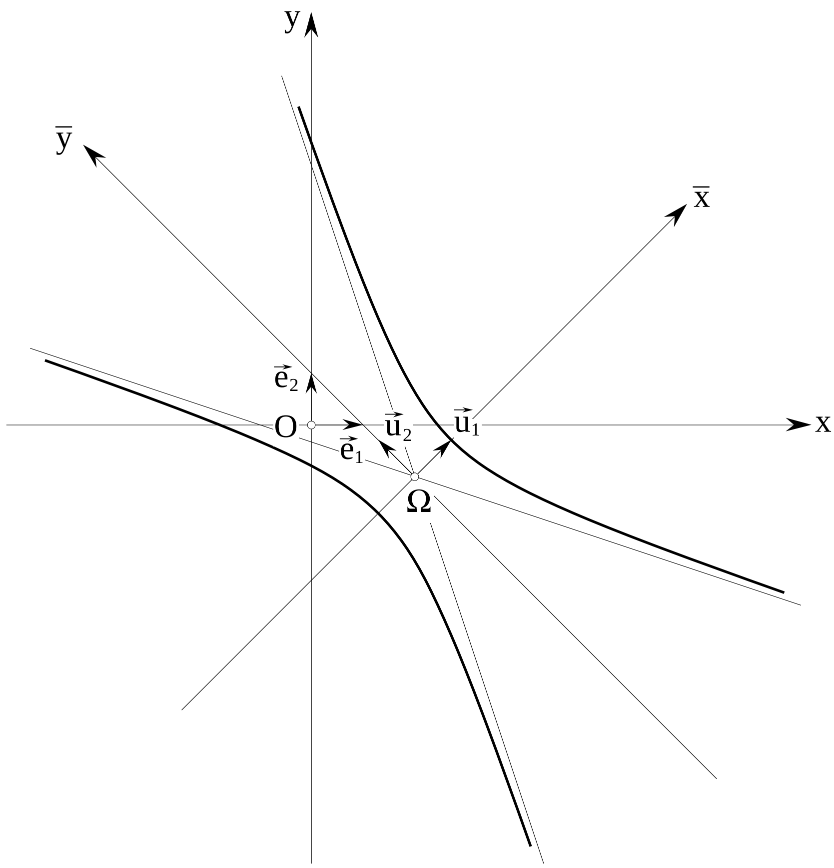
Asymptotes : $x = 0$, et $3x - 4y + 8 = 0$.



d. Hyperbole d'équation réduite : $4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 4 = 0$.

Axe réel : $x - y - 3 = 0$, axe imaginaire : $x + y - 1 = 0$.

Asymptotes : $x + 3y + 1 = 0$, et $3x + y - 5 = 0$.



Ex. 2 :

a. Deux droites réelles d'équations $3x + 4y - 5 = 0$ et $2x - 3y + 4 = 0$.

b. Deux droites imaginaires conjuguées d'équations
$x - (3 + i)\, y + 5 + i = 0$ et $x - (3 - i)\, y + 5 - i = 0$.

Ex. 3 :

a. Equation réduite de $\mathcal{C}$: $2\,\bar{x}^2 + 8\,\bar{y}^2 - 32 = 0$.
$R_u = (\Omega\,,\,\vec{u}_1\,,\,\vec{u}_2)$, avec $\Omega\,(-2\,,\,3)$, $\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. $A\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\,,\,-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ et $B\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\,,\,\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

Ex. 4 :
Equation du lieu de l'orthocentre du triangle ABC : $x^2 - x\,y + 3y - 4 = 0$.
$\delta = -\frac{1}{4} < 0$ et $\Delta = -\frac{5}{4} \neq 0$: le lieu est une hyperbole.
Equation cartésienne des asymptotes : $x = 3$ et $x - y + 3 = 0$.