Série 20

Exercice 1. Ecrire les équations cartésiennes suivantes en coordonnées homogène, puis en déduire les points à l'infini des courbes ainsi définies.

a. $2x + 3y - 1 = 0\,,$

b. $x - 4 = 0\,,$

c. $x^2 + y^2 - 1 = 0\,,$

d. $x^2 - y^2 - 1 = 0\,,$

e. $2x^2 + xy - 6y^2 + 5x - 20 = 0\,,$

f. $x^3 + y^3 - 3xy = 0\,,$ (Folium de Descartes).

Exercice 2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $R_e = (O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)\,,$ on considère une conique $\mathcal{C}$ définie par son équation :

$$\mathcal{C}:\; x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 18y + 27 = 0\,.$$

On considère un nouveau repère orthonormé direct $R_u = (\Omega\,,\,\vec{u}_1\,,\,\vec{u}_2)\,,$ défini par $\varphi = \angle(\vec{e}_1\,,\,\vec{u}_1) = +\frac{\pi}{4}$ et $\overrightarrow{O\Omega} = 4\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2\,.$

a. Déterminer la matrice de changement de repère U de R_e à R_u et l'équation de la conique $\mathcal{C}$ dans le repère $R_u\,.$

b. Représenter la conique $\mathcal{C}$ dans le repère $R_e\,.$

Exercice 3. Dans le plan, on considère un repère orthonormé direct $R_e = (O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$ d'origine O et de base $B_e = (\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)\,,$ puis un deuxième repère orthonormé direct
$R_u = (\Omega\,,\,\vec{u}_1\,,\,\vec{u}_2)$ d'origine Ω et de base $B_u = (\vec{u}_1\,,\,\vec{u}_2)\,.$

Soit $U = \begin{pmatrix} P & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice du changement de repère de R_e à $R_u\,.$

Soit U^{-1} la matrice inverse de la matrice $U\,.$ C'est la matrice du changement de repère de R_u à $R_e\,.$
Elle est donc de la forme $U^{-1} = \begin{pmatrix} P' & T' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Déterminer les matrices P' et T' en fonction de P et T sans calculer l'inverse de la matrice $U\,.$

Exercice 4. Soit M une matrice carrée inversible d'ordre $n\,.$ Montrer que $(M^t)^{-1} = (M^{-1})^t.$

Exercice 5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $R_e = (O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)\,,$ on donne les foyers $F(3\,,\,4)$ et $F'(-1\,,\,0)$ d'une ellipse dont la longueur du grand axe vaut $16\,.$

a. Donner l'équation simplifiée de la courbe, en choisissant comme axes de coordonnées les axes de symétrie de l'ellipse.

b. En partant de l'équation simplifiée obtenue sous a) donner l'équation de l'ellipse dans le repère $R_e\,.$

Exercice 6. Le genre d'une conique (ellipse, hyperbole, parabole) est caractérisé par le nombre de points à l'infini de cette conique.

Déterminer le genre des coniques définies par les équations suivantes :

a. $6x^2 - xy - 12y^2 + 2x + 31y - 20 = 0\,,$

b. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0\,,$

c. $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 22x - 6y + 21 = 0$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $(3\,;\,-2\,;\,0)$, b. $(0\,;\,1\,;\,0)$, c. pas de point à l'infini, d. $(1\,;\,1\,;\,0)$ et $(1\,;\,-1\,;\,0)$, e. $(3\,;\,2\,;\,0)$ et $(2\,;\,-1\,;\,0)$, f. $(1\,;\,-1\,;\,0)$.

Ex. 2 : a.
$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 4 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C} : \ \frac{x'^{\,2}}{2} - \frac{y'^{\,2}}{6} - 1 = 0 \quad \text{dans le repère } R_u .$$

Ex. 3 :
$$P' = P^{-1} = P^t \qquad \text{et} \qquad T' = -P^{-1} \cdot T = -P^t \cdot T .$$

Ex. 5 : a. $\mathcal{E} : \ \dfrac{x'^{\,2}}{64} + \dfrac{y'^{\,2}}{56} - 1 = 0$ dans le repère $R_u = (\Omega\,,\,\vec{u}_1\,,\,\vec{u}_2)$,
avec $\overrightarrow{O\Omega} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$, $\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, b. $\mathcal{E} : \ 15x^2 - 2xy + 15y^2 - 26x - 58y - 825 = 0$. dans le repère R_e.

Ex. 6 : a. Deux points à l'infini : $P_\infty(4\,,\,-3\,,\,0)$ et $Q_\infty(3\,,\,2\,,\,0)$, la conique est de genre hyperbole.

b. Un seul point à l'infini : $P_\infty(1\,,\,1\,,\,0)$, la conique est de genre parabole.

c. Pas de point à l'infini, la conique est de genre ellipse.