Série 18

Exercice 1. Déterminer le sommet, le foyer, l'axe et la directrice des paraboles suivantes :

a. $4y = x^2 + 4x + 8$,
b. $(y+1)^2 = 4(x+y+1)$.

Exercice 2. Déterminer l'équation de la parabole définie par :

a. l'axe Oy et deux points de la courbe : $A(-1\,;\,2)$ et $B(7\,;\,10)$,
b. la directrice $x = 1$ et deux points de la courbe : $A(2\,;\,1)$ et $B(6\,;\,-3)$,
c. le sommet $S(0\,;\,2)$ et un point de la courbe : $A(2\,;\,0)$.

Exercice 3. Soient $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2\,p\,x$, $p > 0$, M un point de cette parabole, t et n la tangente et la normale à $\mathcal{P}$ en M , T et N les points d'intersection de t et n avec l'axe de la parabole.

a. Soit M_1 la projection orthogonale de M sur l'axe de $\mathcal{P}$.
   a) Montrer que la distance de M_1 à N est indépendante de M et vaut p .
   b) Soit F le foyer de $\mathcal{P}$. Montrer que $TF = FN$.
b. Soit Q la projection orthogonale de F sur n .
   Montrer que le lieu de Q lorsque M décrit $\mathcal{P}$ est une parabole que l'on notera $\mathcal{P}'$.
   Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{P}'$, de sa directice d' et les coordonnées de son foyer F' .

Exercice 4. Soient $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2\,p\,x$, $p > 0$, P un point de cette parabole, n la normale à $\mathcal{P}$ en P , N le point d'intersection de n avec l'axe de la parabole et D la projection orthogonale de P sur la directrice d de $\mathcal{P}$.

Soit M le symétrique de N par rapport à D , montrer que le lieu de M lorsque P décrit $\mathcal{P}$ est une parabole que l'on notera $\mathcal{P}'$.

Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{P}'$, de sa directice d' et les coordonnées de son foyer F' .

Exercice 5. On donne la droite $t\,:\,x - 2y - 1 = 0$. Une parabole variable $\mathcal{P}$ d'axe Ox et de sommet $S(\alpha\,;\,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est tangente à la droite t en T .

a. Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ en fonction de α et les valeurs que peut prendre α dans le cas où les points $M(x_{_M}\,;\,y_{_M})$ de $\mathcal{P}$ satisfont à l'inéquation : $x_{_M} - 2y_{_M} - 1 \geq 0$.
b. Déterminer l'équation de $\mathcal{P}$ lorsque $x_{_F} = \frac{2}{3}\,x_{_T}$.

Exercice 6. Déterminer l'équation de l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyer $F\,(3\,,\,0)$, de directrice d : $x + y - 1 = 0$ et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $S(-2\,;\,1)\,, \quad F(-2\,;\,2)\,, \quad x=-2\,, \quad y=0\,$, b. $S(-1\,;\,1)\,, \quad F(0\,;\,1)\,, \quad y=1\,, \quad x=-2\,.$

Ex. 2 :

a. $x^2=6\,(y-\frac{11}{6})\,$, b. $(y-1)^2=4\,(x-2)$ ou $y^2=2\,(x-\frac{3}{2})\,$. c. $(y-2)^2=2x$ ou $x^2=-2\,(y-2)\,.$

Ex. 3 : $\mathcal{P}' :\ y^2=2\ \frac{p}{4}\,(x-\frac{p}{2})\,, \qquad d' :\ x=\frac{3p}{8}\,, \qquad F'(\frac{5p}{8}\,;0)\,.$

Ex. 4 : $\mathcal{P}' :\ y^2=-2\,(4p)\,(x+2\,p)\,, \qquad F'\,(-4p\,,0)\,, \qquad d'\equiv(Oy)\,.$

Ex. 5 : a. $\mathcal{P} :\ y^2=(\alpha-1)\,(x-\alpha)\,, \quad \alpha\in\,]\,1\,,+\infty\,[\,$, b. $\mathcal{P} :\ y^2=4\,(x-5)\,.$

Ex. 6 : $\mathcal{E} :\ 7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0\,.$