Série 16

Exercice 1. Soit l'ellipse $\mathcal{E}:\ x^2+4\,y^2-25=0$, déterminer les tangentes à $\mathcal{E}$ en $P\,(-3\,;\,y_P)\in\mathcal{E}$.

Exercice 2. On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des ellipses de petit axe Ox, passant par $K(0\,;\ \sqrt{3})$ et d'excentricité $e=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

a. Donner l'équation cartésienne (dépendante d'un paramètre) de la famille $\mathcal{F}$.

b. Déterminer l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}\in\mathcal{F}$ dont la tangente en K a pour pente $m=\sqrt{3}$.

Exercice 3. Un point M décrit l'ellipse d'équation $x^2+2y^2-2=0$, de foyers F et F'.

Déterminer le lieu des points P intersection de la droite $(F'M)$ et de la droite passant par F et perpendiculaire à la tangente en M.

Exercice 4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère deux cercles γ et γ_1.

$$\gamma:\ x^2+y^2-25=0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_1:\ (x-3)^2+y^2-16=0\,.$$

Soient P un point du cercle γ et t la tangente au cercle γ en P.
On considère le point $M\,(x_M, y_M)$ pôle de la droite t par rapport au cercle γ_1.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu de M lorsque P décrit le cercle γ.
Caractériser avec précision ce lieu.

Exercice 5. Déterminer l'équation de l'ellipse donnée par :

a. les directrices $d:\ x=-1$, $d':\ x=7$, $e=\frac{3}{4}$ et le grand axe $y=\frac{3}{2}$,

b. la directrice $d:\ y+3=0$ correspond au foyer $F\,(-4\,;\ 1)$ et $e=\frac{1}{2}$.

Exercice 6. Dans le plan, muni d'un repère orthonormé, on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne :

$$\mathcal{E}:\ \frac{x^2}{2}+y^2-1=0\,.$$

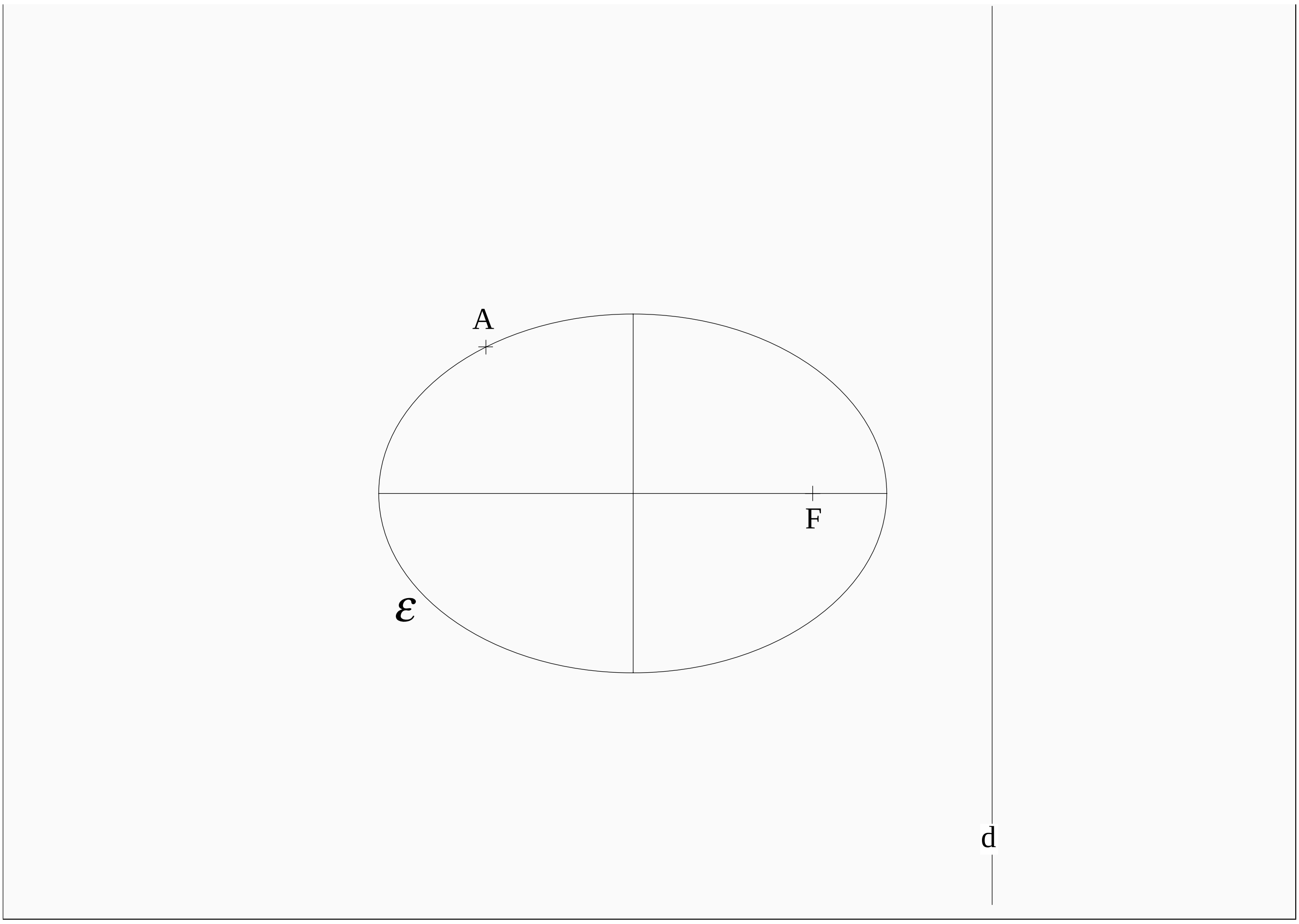
Soient F le foyer de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'abscisse positive et d la directrice correspondante.

a. Déterminer les coordonnées de F et l'équation cartésienne de d.

b. Soit D un point quelconque de la directrice d.
Montrer que la polaire p de D par rapport à $\mathcal{E}$ est perpendiculaire à (DF) et passe par F.
En déduire une construction rigoureuse de la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ en A, sur la donnée graphique ci-dessous.
Donner la marche à suivre de votre construction.

c. Soient $K\,(\frac{3}{2}\,,\,0)$ et M le point d'intersection de la droite (KD) et de la polaire p du point D.
Montrer que si D décrit la directrice d, le lieu de M est une ellipse Γ.
Déterminer les coordonnées des foyers et l'équation cartésienne des directrices de l'ellipse Γ.

Donnée graphique de la question **6**. b).



Éléments de réponse :

Ex. 1 : $P(-3;\pm 2)$ $\quad t:\ -3x \pm 8y - 25 = 0\,.$

Ex. 2 : a. Equation de la famille $\mathcal{F}:\ \dfrac{(x-\lambda)^2}{\lambda^2+1} + \dfrac{y^2}{3(\lambda^2+1)} - 1 = 0\,,\quad \lambda \in \mathbb{R}$, b. $\mathcal{E}:\ \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{y^2}{6} - 1 = 0\,.$

Ex. 3 : Equation cartésienne du lieu des points $P:\ x^2+y^2+2x-7=0\,.$

Ex. 4 : Equation cartésienne du lieu des points $M:\ \dfrac{(x-6)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} - 1 = 0\,.$

Le lieu de M est une ellipse de centre $C\,(6\,,\,0)\,,$ de grand axe horizontal de longueur $2a=10\,,$ de petit axe de longueur $2b=8$ et de foyers $F\,(9\,,\,0)$ et $F'\,(3\,,\,0)\,.$

Ex. 5 : a. $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{16\,(y-\frac{3}{2})^2}{63} = 1$, b. $\dfrac{9\,(x+4)^2}{48} + \dfrac{9(y-\frac{7}{3})^2}{64} = 1\,.$

Ex. 6 :

Equation du lieu de $M:\quad \dfrac{(x-\frac{5}{4})^2}{\frac{1}{16}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{8}} - 1 = 0\,.$

Foyers de $\Gamma:\quad F\,(\frac{5}{4}\,,\,\frac{1}{4})\,,\qquad F'\,(\frac{5}{4}\,,\,-\frac{1}{4})\,.$

Directrices de $\Gamma:\quad d:\ y=\frac{1}{2}\,,\qquad d':\ y=-\frac{1}{2}\,.$