Résumé de l'étude générale des coniques

Repère $R_e = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'origine O et de base orthonormée $B_e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Equation générale de la conique : $a\,x^2 + 2b\,xy + c\,y^2 + 2d\,x + 2e\,y + f = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det(A) \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \delta = \det(B), \quad \sigma = \operatorname{tr}(B).$$

Genre de la conique : $\begin{cases} \delta > 0 : & \text{conique de genre ellipse} \\ \delta = 0 : & \text{conique de genre parabole} \\ \delta < 0 : & \text{conique de genre hyperbole} \end{cases}$

---

1. $\delta > 0$: conique de genre ellipse.

- Equation réduite de la conique dans le repère $R_u = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ d'origine Ω et de base orthonormée $B_u = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

  $$\lambda_1 \overline{x}^2 + \lambda_2 \overline{y}^2 + H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{x}^2}{-\frac{H}{\lambda_1}} + \frac{\overline{y}^2}{-\frac{H}{\lambda_2}} - 1 = 0, \quad H \neq 0,$$

  où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de B, $(|\lambda_1| < |\lambda_2|)$ et $H = \dfrac{\Delta}{\delta}$.

  - Si $H = 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta = 0$, la conique est dégénérée.
  - Si $-\frac{H}{\lambda_1} > 0$ la conique est une ellipse réelle.
  - Si $-\frac{H}{\lambda_1} < 0$ la conique est une ellipse dite imaginaire.

- Définition du repère $R_u = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

  - Les vecteurs de la base B_u sont les vecteurs propres de B :

    $$\left.\begin{array}{ll} \vec{u}_1 \in E(\lambda_1), & \|\vec{u}_1\| = 1 \\ \vec{u}_2 \in E(\lambda_2), & \|\vec{u}_2\| = 1 \end{array}\right\} \quad (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \text{ d'orientation positive.}$$

  - Coordonnées de l'origine (centre de la conique) $\Omega(\alpha, \beta)$:

    $$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a\,\alpha + b\,\beta + d = 0 \\ b\,\alpha + c\,\beta + e = 0 \end{cases}$$

- Axes de l'ellipse.

  Grand axe : $(\Omega\,\overline{x}) = (\Omega, \vec{u}_1)$, petit axe : $(\Omega\,\overline{y}) = (\Omega, \vec{u}_2)$.
