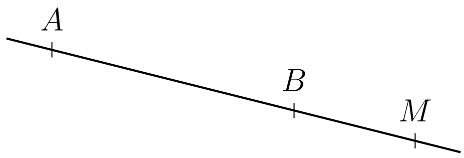
Rapport de section



Soient A, B et M trois points alignés.

Soit le rapport de section k noté $(AB, M) = k$ et défini par $\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB}$.

Proposition: le rapport de section est conservé par projection sur les axes de coordonnées: $(A_1B_1, M_1) = k$ et $(A_2B_2, M_2) = k$.

C'est une conséquence immédiate du théorème de Thalès.

Soient $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ deux points du plan, cherchons les coordonnées de M défini par $(AB, M) = k$.

$$\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = k\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OM}(k-1) = k\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \overrightarrow{OM} = \frac{k\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{k-1}, \quad k \neq 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = \frac{1}{k-1}\begin{pmatrix} k\,b_1 - a_1 \\ k\,b_2 - a_2 \end{pmatrix} \quad k \neq 1$$

Exemple:

Soient les points $A(3, -2)$ et $B(-5, 2)$, déterminer l'ordonnée du point M sachant que son abscisse vaut -3 et que M est sur la droite (A, B).

A, B et M sont alignés; soit $k = (AB, M)$.
Par projection sur l'axe des abscisses, on a :

$$k = \frac{x_A - x_M}{x_B - x_M} = \frac{3 - (-3)}{-5 - (-3)} = \frac{6}{-2} = -3$$

On en déduit y_M en travaillant sur l'axe des ordonnées:

$$y_M = \frac{1}{k-1}(k\,y_B - y_A) = -\frac{1}{4}(-3 \cdot 2 - (-2)) = 1$$