Série 9

Exercice 1. Le plan est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants déterminer la nature de la transformation géométrique décrite par l'expression analytique donnée ainsi que ses éléments caractéristiques :

a. $\begin{cases} x' = x \\ y' = 7x \end{cases}$ b. $\begin{cases} x' = 2x - \frac{1}{2}y \\ y' = 4x - y \end{cases}$ c. $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 2x - 3y. \end{cases}$

Exercice 2. Dans le plan muni d'un repère, on donne les droites :

$$d : y = 5x, \quad g : 3x + 2y = 0.$$

a. Déterminer l'expression analytique de la projection sur d parallèlement à g.

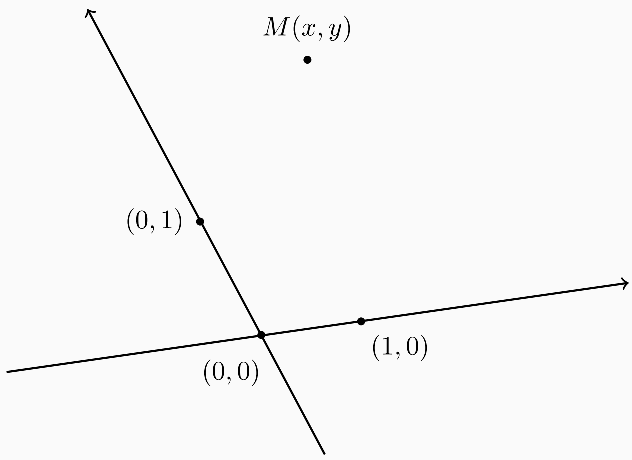
b. Même question pour la symétrie par rapport à g parallèlement à d.

Exercice 3. blabla

Sur le dessin ci-contre, faire apparaitre le point $p(M)$, où p est la transformation d'expression analytique :

$$p : \begin{cases} x' = \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y \\ y' = -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y. \end{cases}$$

Indication : on pourra commencer par identifier la nature et les éléments caractéristiques de p.



Exercice 4. Dans le plan muni d'un repère, on donne :

$$A(-1, 3) \text{ et } B(2, 0).$$

Trouver l'expression analytique d'une symétrie s dont les axes passent par l'origine sachant que $s(A) = B$. *Indication : on commencera par faire un dessin.*

Exercice 5. Dans le plan muni d'un repère, on donne :

$$A(2, 5), \quad B(3, 2), \quad l : 3x + 4y = 8,$$

Trouver l'expression analytique d'une projection p dont les axes passent par l'origine sachant que $p(A) = p(B)$ appartient à l. *Indication : on commencera par faire un dessin.*

Exercice 6. Dans le plan muni d'un repère on donne $A(1,4)$, une droite l passant par A, et la transformation géométrique :

$$s : \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}y \\ y' = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y. \end{cases}$$

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s.

b. Trouver l sachant que la droite $s(l)$ est égale à l. *Indication : que peut-on dire du point $s(A)$?*

c. Identifier toutes les droites l pour lesquelles $s(l)$ est parallèle à l.

Exercice 7. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille 2 à coefficients réels.

a. Si M est une matrice de projection, montrer que $M^2 = M$.

b. Déterminer toutes les matrices M vérifiant $M^2 = M$. *Indication : discuter selon le rang de M.*

Exercice 8. Quelles sont les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant la condition :

$$M^2 = I_2 \text{ ?}$$

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent et s'intéresser à la matrice $\frac{1}{2}(I_2 + M)$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. projection sur $y = 7x$ parallèlement à $x = 0$, b. projection sur $y = 2x$ parallèlement à $y = 4x$, c. symétrie par rapport à $x = 2y$ parallèlement à $x = y$.

Ex. 2 : a. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{3x+2y}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7x-4y \\ -30x-7y \end{pmatrix}$.

Ex. 3 : p est la projection sur $2x + y = 0$ parallèlement à $x = 3y$.

Ex. 4 : $s : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ex. 5 : $p : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ex. 6 : a. symétrie par rapport à $x = 4y$ parallèlement à $x + y = 0$, b. $l : x + y = 5$, c. idem que b. et aussi $l : x - 4y + 15 = 0$.