Série 5

Exercice 1. Dans le plan muni d'un repère, on donne :

$$A(3,4),\ B(5,-2) \text{ et } C(0,2).$$

Calculer les coordonnées :

a. du milieu I de BC b. du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ c. du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne :

$$A(5,2),\ B(-1,4) \text{ et } C(1,6).$$

a. Quelle est l'aire du triangle ABC ? Ce triangle est-il orienté directement ou indirectement ?
b. Calculer la norme de $\overrightarrow{AB}$. Déterminer un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de même norme.
c. Déterminer l'angle orienté de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$. *Indication : calculer son sinus et son cosinus.*

Exercice 3. Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne :

$$A(-1,3),\ B(2,1) \text{ et } C(1,5).$$

a. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment BC dans le repère $(C,\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$.
b. Un point J a pour coordonnées $(2,1)$ dans $(B,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$. Quelles sont ses coordonnées dans $(O,\vec{i},\vec{j})$?
c. Calculer les coordonnées du point O dans le repère $(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

Exercice 4. Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne :

$$A(5,-3),\ B(12,-2),\ C(2,4),\ \vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.$$

On sait aussi que $\|\vec{i}\|=1$, $\|\vec{j}\|=\sqrt{2}$ et que l'angle orienté de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ vaut $\frac{\pi}{4}$.

a. Trouver l'expression du produit scalaire et de la norme, c'est-à-dire calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ en fonction de x, y, x' et y'.
b. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A et calculer l'angle (géométrique) au sommet A.
c. Quelle est la nature du repère $(O,\vec{i},\vec{j}-\vec{i})$? Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans ce nouveau repère.
d. Retrouver les résultats du a. et du b. en utilisant le repère introduit au c.

Exercice 5. Dans le plan muni d'un repère, on donne les vecteurs suivants, où α est un paramètre réel :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}1+2\alpha\\\alpha-2\end{pmatrix}.$$

a. Déterminer la valeur de α sachant que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
b. On suppose le repère orthonormé. Trouver α sachant que le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ a pour norme :

$$\|p_{\vec{u}}(\vec{v})\| = 2\sqrt{10}.$$

Exercice 6. Dans le plan muni d'un repère, on donne :

$$A(-4,5), B(2,3) \text{ et } G(1,6).$$

Trouver les coordonnées de C sachant que G est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 7. Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, montrer que :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ colinéaires } \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0\,.$$

Indication : procéder par double implication. Pour " $\Leftarrow$ " discuter selon que x et y sont nuls ou non.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $(\frac{5}{2},0)$, b. $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, c. $(-2,8)$.
Ex. 2 : a. 8, orientation indirecte, b. $2\sqrt{10}$, $\pm\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$, c. $\simeq -26.6°$.
Ex. 3 : a. $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, b. $(7,1)$, c. $(0.9, 0.8)$.
Ex. 4 : a. $xx' + 2yy' + xy' + x'y$, $\sqrt{x^2 + 2y^2 + 2xy}$, b. $\simeq 53.1°$, c. orthonormé, $\left(\begin{smallmatrix} x+y \\ y \end{smallmatrix}\right)$.
Ex. 5 : a. 7, b. -3 ou $\frac{19}{7}$.
Ex. 6 : $C(5,10)$.