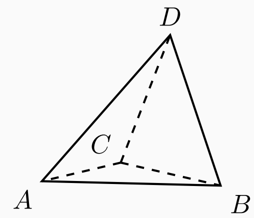
Série 12

Exercice 1.

On donne le tétraèdre $ABCD$ ci-contre. Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire si elle est d'orientation directe ou indirecte :

a. $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ b. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ c. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$.



Exercice 2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on donne les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

a. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u}\times\vec{v}$.

b. En utilisant le a., trouver les coordonnées de $(25\vec{u}-12\vec{v})\times(101\vec{u}-100\vec{v})$.

c. Déterminer un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sachant qu'il engendre avec $\vec{u}$ un parallélogramme d'aire $4\sqrt{3}$.

Exercice 3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on donne :

$$A(-2,1,3),\ B(1,1,-1), C(3,6,-2) \text{ et } D(-1,2,0)\,.$$

a. Calculer la distance de C à la droite (AB).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan parallèle à (ABC) passant par D.

c. Calculer l'aire du triangle ABD.

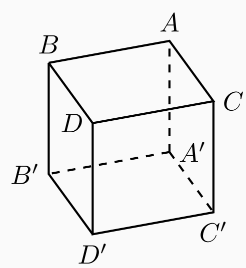
Exercice 4.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on donne les points :

$$A(1,1,4)\,,\ B(0,3,2) \text{ et } C(3,0,2).$$

a. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

b. On peut donc compléter ABC en un cube comme dans la figure ci-contre. Calculer les coordonnées des sommets de ce cube.



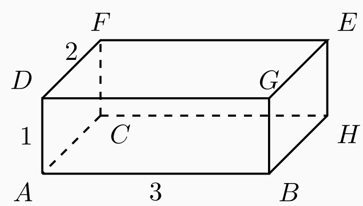
Exercice 5.

On donne un parallélépipède rectangle d'arêtes 1, 2 et 3 unités de longueur.

a. Calculer les produits vectoriels $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$.

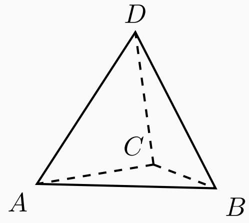
b. Déterminer un vecteur normal à (FGH) en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

c. Calculer la distance de B à la droite (DE).



Exercice 6.

On donne un tétraèdre régulier de côté 1, comme sur la figure ci-contre. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.



Exercice 7. Etant donné trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans l'espace, montrer la formule du "double produit vectoriel" :

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v}.$$

Indication : travailler en coordonnées dans un repère orthonormé direct.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. et c. indirecte, b. directe.
Ex. 2 : a. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, b. $1288 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, c. $\pm 2\,\vec{u} \times \vec{v}$.
Ex. 3 : a. $\sqrt{26}$, b. $4x - y + 3z = -6$, c. $\sqrt{\frac{25}{2}}$.
Ex. 4 : b. $A'(3,3,5)$, $B'(2,5,3)$, $C'(5,2,3)$, $D(2,2,0)$ et $D'(4,4,1)$.
Ex. 5 : a. $6\overrightarrow{AD}$, $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, b. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AD}$, c. $\frac{7}{\sqrt{13}}$.
Ex. 6 : $\frac{\sqrt{2}}{4}(-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.