Série 10

Exercice 1. Dans l'espace muni d'un repère, on donne :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix},\ \vec{w}\begin{pmatrix}5\\-4\\4\end{pmatrix}.$$

a. Déterminer une équation du plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. Le vecteur $\vec{w}$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$? Si oui, déterminer explicitement les coefficients dans cette combinaison.

Exercice 2. Dans l'espace muni d'un repère, on donne le plan vectoriel ainsi que le vecteur suivant :

$$V : x + 3y - 4z = 0 \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

a. Déterminer une base de V, c'est-à-dire deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $V = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

b. Si $\vec{w}$ appartient à V, écrire $\vec{w}$ comme $s\vec{u} + t\vec{v}$ où $\vec{u}, \vec{v}$ sont les vecteurs du a. et s et t sont des fonctions de x, y et z.

c. Contrôler votre résultat du b. sur des exemples, c'est-à-dire des choix concrets de vecteur $\vec{w}$ appartenant à V.

d. Recommencer le a., b. et c. avec une autre base de V.

Exercice 3. Dans l'espace muni d'un repère, on donne $A(2, 0, -1)$ et $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\4\end{smallmatrix}\right)$. Dans chacun des cas suivants, dire si le point A appartient à la droite d et si le vecteur $\vec{v}$ est directeur de d.

a. $d : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{2}$

b. $d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$

c. $d = (BC)$, où $B(3, 3, 3)$ et $C(1, -3, -5)$.

Exercice 4. L'espace est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, donner les coordonnées d'un point et celles d'un vecteur directeur non nul de la droite d proposée.

a. $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$

b. $d : \dfrac{x-1}{2} = y = 4z - 2$

c. $d : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2 + 3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$

Exercice 5. L'espace est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, écrire des équations paramétriques et cartésiennes de la droite d définie par les données.

a. $A(2, 0, 5)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$

b. $A(1, 1, -1)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

c. $A(0, 1, 3)$ et $B(0, -2, 3)$.

Exercice 6. L'espace est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de la droite d donnée avec chacun des plans de coordonnées, puis expliquer comment celle-ci se positionne par rapport aux axes et plans de coordonnées.

a. $d : x + z = 1,\ y = 0$ b. $d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$ c. $d : x = 3,\ z = 1.$

Exercice 7. Dans l'espace muni d'un repère, on donne un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ non nul. Montrer que :

$$\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ colinéaire à } \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & \alpha \\ y & \beta \end{vmatrix} = 0\,,\ \begin{vmatrix} x & \alpha \\ z & \gamma \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} y & \beta \\ z & \gamma \end{vmatrix} = 0\,.$$

Indication : raisonner par double implication.

Exercice 8. (Facultatif) Dans l'espace muni d'un repère, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\sigma\end{pmatrix}$ non colinéaires. Montrer que :

$$\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \alpha & \lambda & x \\ \beta & \mu & y \\ \gamma & \sigma & z \end{vmatrix} = 0\,.$$

Indication : procéder par élimination des paramètres. Pour fixer les idées, on supposera que $\alpha \neq 0$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $8x + 3y - 7z = 0$, b. $\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.
Ex. 3 : $A \in d$ en a. et c. $\vec{v}$ est directeur de d en b. et c.
Ex. 4 : a. $(1, 2, -3)$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, b. $(-3, -2, 0)$, $\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}$, c. $(0, 3, -2)$, $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.
Ex. 5 : a. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{5}$, b. $x - 1 = 1 - y$, $z = -1$, c. $x = 0, z = 3$.
Ex. 6 : a. contenue dans (Oxz), b. contenue dans (Oxy) et parallèle à (Ox), c. parallèle à (Oy).