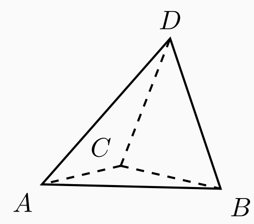
Série 12

Exercice 1.

On donne le tétraèdre $ABCD$ ci-contre. Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire si elle est d'orientation directe ou indirecte :

a. $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ b. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ c. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$.



Solution:

a. Pour un observateur placé en D, il faut tourner $\overrightarrow{BA}$ dans le sens des aiguilles d'une montre pour l'appliquer sur $\overrightarrow{BC}$. Par conséquent, la famille $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ est d'orientation indirecte.

b. Ici, les vecteurs proposés ne sont pas représentés depuis le même point sur la figure. On commence donc par les ramener au même point, par exemple en décalant $\overrightarrow{AD}$ au point D. De notre point de vue, il faut tourner $\overrightarrow{AD}$ dans le sens des aiguilles d'une montre pour l'appliquer sur $\overrightarrow{DB}$. Par conséquent, un observateur situé au point C, qui est "de l'autre côté", devra tourner $\overrightarrow{AD}$ dans le sens trigonométrique pour l'appliquer sur $\overrightarrow{DB}$. La famille $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ est donc d'orientation directe.

c. En raisonnant de façon similaire, on voit que la famille $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$ est d'orientation indirecte.

Exercice 2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on donne les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

a. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u}\times\vec{v}$.

b. En utilisant le a., trouver les coordonnées de $(25\vec{u}-12\vec{v})\times(101\vec{u}-100\vec{v})$.

c. Déterminer un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sachant qu'il engendre avec $\vec{u}$ un parallélogramme d'aire $4\sqrt{3}$.

Solution:

a. Comme le repère employé est orthonormé direct, on a :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\times\vec{v}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-1&1\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}.$$

On obtient donc que $\vec{u}\times\vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

b. Développons le produit vectoriel proposé en utilisant les règles de calcul vues au cours :

$$(25\vec{u}-12\vec{v})\times(101\vec{u}-100\vec{v}) = 2525\,\vec{u}\times\vec{u} - 2500\,\vec{u}\times\vec{v} - 1212\,\vec{v}\times\vec{u} + 1200\,\vec{v}\times\vec{v}\,.$$

Or on a :

$$\underbrace{\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}}_{\text{aire}(\vec{u},\vec{u})=0}, \quad \underbrace{\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}}_{\text{aire}(\vec{v},\vec{v})=0} \quad \text{et} \quad \underbrace{\vec{v}\times\vec{u}=-\vec{u}\times\vec{v}}_{\text{antisymétrie}}.$$

On en déduit que :

$$(25\vec{u} - 12\vec{v}) \times (101\vec{u} - 100\vec{v}) = -2500\,\vec{u} \times \vec{v} + 1212\,\vec{u} \times \vec{v} = -1288\,\vec{u} \times \vec{v}$$

a pour coordonnées :

$$-1288 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1288 \\ -2576 \\ 1288 \end{pmatrix}.$$

c. Le vecteur $\vec{w}$ étant orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il est colinéaire à $\vec{u} \times \vec{v}$. Il a donc pour coordonnées :

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

pour un certain réel α. L'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{w}$ est égale à la norme du vecteur $\vec{u} \times \vec{w}$, qui a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2\alpha \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -\alpha \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -\alpha \\ 0 & 2\alpha \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -2\alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} = -2\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette aire vaut donc :

$$\|\vec{u} \times \vec{w}\| = 2|\alpha|\sqrt{3}\,,$$

d'où l'on tire :

$$2|\alpha|\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm 2\,.$$

Il y a donc deux vecteurs solutions au problème posé, à savoir $\pm 2\,\vec{u} \times \vec{v}$.

Exercice 3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on donne :

$$A(-2,1,3),\ B(1,1,-1), C(3,6,-2) \text{ et } D(-1,2,0)\,.$$

a. Calculer la distance de C à la droite (AB).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan parallèle à (ABC) passant par D.

c. Calculer l'aire du triangle ABD.

Solution:

a. La distance recherchée est égale à :

$$\delta = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Par ailleurs, comme le repère employé est orthonormé direct, on a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors :

$$\delta = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{5\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2}}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \sqrt{26}.$$

b. D'après le a., le vecteur :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$$

est normal au plan recherché. On en déduit que ce plan a pour équation cartésienne :

$$4x-y+3z=\text{ constante }=4\cdot(-1)-2+3\cdot 0=-6.$$

c. L'aire du triangle ABD est la moitié de celle du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Le repère employé étant orthonormé direct, on a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\-4&-3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}3&1\\-4&-3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}3&1\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}.$$

On obtient donc que $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}.$$

On en en déduit que l'aire recherchée vaut :

$$\tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{\tfrac{25}{2}}.$$

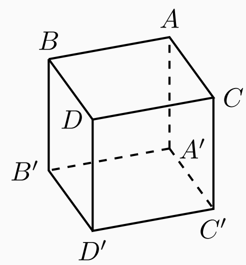
Exercice 4.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on donne les points :

$$A(1,1,4)\,,\ B(0,3,2)\ \text{ et }\ C(3,0,2).$$

a. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

b. On peut donc compléter ABC en un cube comme dans la figure ci-contre. Calculer les coordonnées des sommets de ce cube.



Solution:

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Par conséquent, comme le repère employé est orthonormé, on obtient alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3,\quad\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3\quad\text{et}\quad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2-2+4=0.$$

Le triangle ABC est donc bien rectangle et isocèle en A.

b. Le quadrilatère $ABDC$ étant un carré, on a :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

On voit donc que $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$, si bien que D a pour coordonnées $(2,2,0)$. En utilisant la formule du produit vectoriel en repère orthonormé direct, on obtient que le vecteur :

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

a quant à lui pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&-1\\-2&-2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1&2\\-2&-2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-1&2\\2&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\-3\end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, le vecteur :

$$\vec{v}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}$$

est colinéaire à $\vec{u}$, car il est normal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Ecrivons alors :

$$\vec{v}=\alpha\vec{u}$$

pour un certain α. Comme la famille $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\vec{u}$ est orientée négativement, on voit que α est négatif. Par ailleurs, la norme du produit vectoriel $\vec{u}$ est égale à l'aire du carré $ABDC$, qui vaut 9. On en déduit :

$$\|\vec{v}\| = 3 = \|\alpha\vec{u}\| = 9\,|\alpha|\,.$$

Par conséquent, $\alpha = -\frac{1}{3}$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$. Finalement, on trouve :

$$A'(3,3,5),\ B'(2,5,3),\ C'(5,2,3) \text{ et } D'(4,4,1).$$

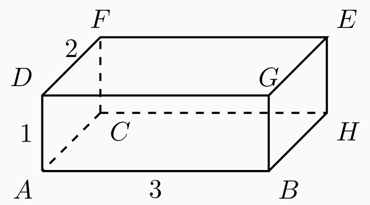
Exercice 5.

On donne un parallélépipède rectangle d'arêtes 1, 2 et 3 unités de longueur.

a. Calculer les produits vectoriels $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$.

b. Déterminer un vecteur normal à (FGH) en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

c. Calculer la distance de B à la droite (DE).



Solution:

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ étant deux-à-deux orthogonaux, on trouve déjà que :

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AD}\,,\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \beta\overrightarrow{AC} \ \text{ et } \ \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD} = \gamma\overrightarrow{AB}\,.$$

pour certains réels α,β,γ. Comme la famille $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ est orientée directement on voit que α est positif. Il vient alors :

$$\underbrace{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = 6}_{\text{aire}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=6} \ \text{ et } \ \|\overrightarrow{AD}\| = 1 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 6\,.$$

Raisonnons de même pour trouver β et γ. La famille $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}$ est orientée indirectement, si bien que β est négatif. On obtient alors :

$$\underbrace{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\| = 3}_{\text{aire}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=3} \ \text{ et } \ \|\overrightarrow{AC}\| = 2 \quad\Rightarrow\quad \beta = -\frac{3}{2}\,.$$

Enfin, la famille $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ est orientée directement, si bien que γ est positif. On obtient alors :

$$\underbrace{\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\| = 2}_{\text{aire}(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=2} \ \text{ et } \ \|\overrightarrow{AB}\| = 3 \quad\Rightarrow\quad \gamma = \frac{2}{3}\,.$$

En résumé :

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AD}\,,\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \ \text{ et } \ \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\,.$$

b. Le plan (FGH) est dirigé par les vecteurs :

$$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.$$

On en déduit que tout vecteur colinéaire à :

$$\overrightarrow{GF}\times\overrightarrow{GH} = (-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\times(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}+\underbrace{\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AC}}_{\vec{0}}-\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}.$$

est normal au plan (FGH). En utilisant les résultats obtenus au a. on trouve alors :

$$\overrightarrow{GF}\times\overrightarrow{GH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AD}$$

c. La distance recherchée est égale à :

$$\delta = \frac{\|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DE}\|}{\|\overrightarrow{DE}\|}\,.$$

La norme $\|\overrightarrow{DE}\|$ vaut $\sqrt{13}$ (hypothénuse dans un triangle rectangle, les deux autres côtés mesurant 2 et 3 unités de longueur). On a par ailleurs :

$$\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

Comme $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont deux-à-deux orthogonaux, on en déduit :

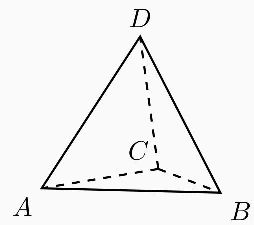
$$\|\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DE}\|^2 = 36\|\overrightarrow{AD}\|^2 + \frac{9}{4}\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \frac{4}{9}\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 36 + 9 + 4 = 49\,,$$

et, finalement :

$$\delta = \frac{7}{\sqrt{13}}\,.$$

Exercice 6.

On donne un tétraèdre régulier de côté 1, comme sur la figure ci-contre. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.



Solution: Recherchons $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}.$$

Comme ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$, on obtient :

$$(\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}_{1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}} + \beta\underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}}_{1^2} + \gamma\underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}}_{1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = \tfrac{\alpha}{2} + \beta + \tfrac{\gamma}{2} = 0.$$

De la même façon, comme il est orthogonal à $\overrightarrow{AD}$, on obtient :

$$(\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} = \alpha\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_{1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}} + \beta\underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}_{1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}} + \gamma\underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}}_{1^2} = \tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2} + \gamma = 0.$$

Les réels α, β et γ vérifient donc :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\gamma}{2} = 0 \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\gamma}{2} = 0 \\ -\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = \gamma \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}$ est donc colinéaire à $-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Par ailleurs, l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (puisque, dans le triangle ADC, la base est de côté 1 et la hauteur vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Calculons alors la norme du vecteur $-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$:

$$\|-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\|^2 = 9\underbrace{\|\overrightarrow{AB}\|^2}_{1^2} + \underbrace{\|\overrightarrow{AC}\|^2}_{1^2} + \underbrace{\|\overrightarrow{AD}\|^2}_{1^2} - 6\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}_{1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}} - 6\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_{1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}} + 2\underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}_{1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = 6.$$

On en déduit que le vecteur $-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ est de norme $\sqrt{6}$. A ce stade, on a montré que :

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{4}(-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

(le facteur $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est calculé pour obtenir la longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ à partir de la longueur $\sqrt{6}$). Or comme la famille $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}$ est directe, on voit en observant la figure que la coordonnée de $\overrightarrow{AB}$ doit être négative. Finalement, on a donc :

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} = \tfrac{\sqrt{2}}{4}(-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Exercice 7. Etant donné trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans l'espace, montrer la formule du "double produit vectoriel" :

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v}.$$

Indication : travailler en coordonnées dans un repère orthonormé direct.

Solution: Donnons-nous un repère orthonormé direct dans lequel :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;,\; \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \;,\; \vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} .$$

On trouve alors :

$$\vec{u} \times \vec{v} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

si bien que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} -z'' \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} - y'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \\ -z'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} + x'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \\ y'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} + x'' \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xz'z'' + zx'z'' - xy'y'' + yx'y'' \\ -yz'z'' + zy'z'' + xy'x'' - yx'x'' \\ yz'y'' - zy'y'' + xz'x'' - zx'x'' \end{pmatrix}$$

Calculons alors les coordonnées de $-(\vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v}$. On trouve :

$$-(x'x'' + y'y'' + z'z'') \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (xx'' + yy'' + zz'') \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy'y'' - xz'z'' + yx'y'' + zx'z'' \\ -yx'x'' - yz'z'' + xy'x'' + zy'z'' \\ -zx'x'' - zy'y'' + xz'x'' + yz'y'' \end{pmatrix} .$$

Les deux vecteurs étudiés ont donc les mêmes coordonnées dans un repère particulier de l'espace : ils sont égaux.