Série 9

Exercice 1. Le plan est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants déterminer la nature de la transformation géométrique décrite par l'expression analytique donnée ainsi que ses éléments caractéristiques :

a. $\begin{cases} x' = x \\ y' = 7x \end{cases}$ b. $\begin{cases} x' = 2x - \frac{1}{2}y \\ y' = 4x - y \end{cases}$ c. $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 2x - 3y. \end{cases}$

Solution:

a. La matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

est de trace 1 et de déterminant nul : c'est donc une matrice de projection. Par conséquent, la transformation proposée ici est une projection dont les axes d et g passent par l'origine (on projette sur d parallèlement à g). Rappelons alors différentes méthodes pour identifier les axes d et g.

Une première méthode consiste à observer que, par définition même d'une projection, pour tout point M du plan, on a :

$$M' \in d \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MM'} \text{ est directeur de } g.$$

Appliquons par exemple ceci avec M de coordonnées $(1, 0)$. Le point $M'(1, 7)$ appartient donc à d : comme cette droite passe par l'origine, elle admet pour équation $y = 7x$. Par ailleurs, le vecteur $\overrightarrow{MM'}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ est directeur de g : comme cette droite passe par l'origine elle admet donc pour équation $x = 0$.

Une autre méthode consiste à décomposer P en un produit colonne-ligne, comme par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La colonne correspond à un vecteur directeur de d, qui a donc pour équation $y = 7x$, et la ligne donne directement une équation de g, à savoir $1 \cdot x + 0 \cdot y = x = 0$.

Enfin, une dernière méthode consiste à utiliser d'une part le fait que d est formée des points fixes de la projection :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ 7x = y \end{cases} \Leftrightarrow 7x = y$$

et, d'autre part, que g est formée des points envoyés sur l'origine par la projection :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

b. Ecrivons la matrice P sous la forme :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Elle est de trace 1 et de déterminant nul : c'est donc une matrice de projection. Par conséquent, la transformation proposée est une projection dont les axes d et g passent par l'origine (on projette sur d parallèlement à g). La droite d a pour équation $y = 2x$ (elle passe par l'origine et est dirigée par le vecteur de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$). La droite g a quant à elle pour équation $2x - \frac{1}{2}y = 0$ (directement donnée par la ligne $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$ ci-dessus), ou encore $y = 4x$.

c. La matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

est de trace nulle et de déterminant -1 : c'est donc une matrice de symétrie. Par conséquent, la transformation proposée ici est une symétrie dont les axes d et g passent par l'origine (on projette sur d parallèlement à g). Rappelons alors différentes méthodes pour identifier les axes d et g.

Une première méthode consiste à observer que, par définition même d'une symétrie, pour tout point M du plan, on a :

$$\text{le milieu de } MM' \in d \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MM'} \text{ est directeur de } g.$$

Appliquons par exemple ceci avec M de coordonnées $(1,0)$. Le point M' a alors pour coordonnées $(3,2)$. Le milieu de MM', qui a pour coordonnées $(\frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2}) = (2,1)$ appartient donc à d : comme cette droite passe par l'origine, elle admet pour équation $x = 2y$. Par ailleurs, le vecteur $\overrightarrow{MM'}\,\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ est directeur de g : comme cette droite passe par l'origine elle admet donc pour équation $x = y$.

Une autre méthode consiste à calculer la matrice de projection P associée à S et à la décomposer en un produit colonne-ligne :

$$P = \tfrac{1}{2}(S + I_2) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La colonne correspond à un vecteur directeur de d, qui a donc pour équation $x = 2y$, et la ligne donne directement une équation de g, à savoir $x - y = 0$.

Enfin, une dernière méthode consiste à utiliser d'une part le fait que d est formée des points fixes de la symétrie :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 4y = x \\ 2x - 3y = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y$$

et, d'autre part, que g est formée des points "renversés autour de l'origine" par la symétrie :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 4y = -x \\ 2x - 3y = -y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

Exercice 2. Dans le plan muni d'un repère, on donne les droites :

$$d : y = 5x, \quad g : 3x + 2y = 0.$$

a. Déterminer l'expression analytique de la projection sur d parallèlement à g.

b. Même question pour la symétrie par rapport à g parallèlement à d.

Solution:

a. D'après le cours, on sait alors que la projection sur d parallèlement à g a pour expression analytique :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ où } P = \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que la colonne $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ correspond à un vecteur directeur de d, la ligne $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ correspond à une équation de g, et le facteur $\frac{1}{13}$ est là pour assurer que la trace de P soit égale à 1. Remarquons pour vérifier notre résultat que la matrice P obtenue est bien une matrice de projection (elle est de déterminant nul et de trace 1) et qu'on a par ailleurs :

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(la première égalité traduisant le fait que les points de d sont fixes par la projection et la deuxième que les points de g sont tous projetés sur l'origine).

b. L'expression analytique de la projection sur g parallèlement à d peut se calculer de la même manière qu'au a. :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ où } Q = \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -15 & 3 \end{pmatrix}$$

ou plus simplement en utilisant le fait que :

$$Q = I_2 - P.$$

On sait alors que la symétrie par rapport à g parallèlement à d a pour expression analytique :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ où } S = 2Q - I_2 = \tfrac{2}{13}\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -15 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -30 & -7 \end{pmatrix}.$$

Remarquons pour vérifier notre résultat que la matrice S obtenue est bien une matrice de symétrie (elle est de déterminant -1 et de trace nulle) et qu'on a par ailleurs :

$$S\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

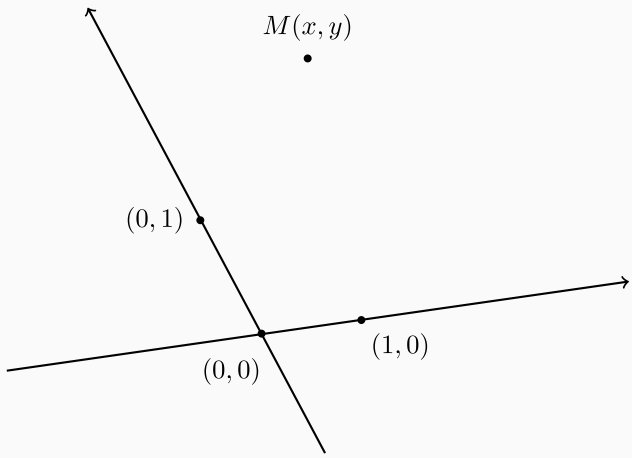
(la première égalité traduisant le fait que les points de g sont fixes par la symétrie et la deuxième que les points de d sont tous "renversés" autour de l'origine lors de la symétrie).

Exercice 3.

Sur le dessin ci-contre, faire apparaitre le point $p(M)$, où p est la transformation d'expression analytique :

$$p : \begin{cases} x' = \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y \\ y' = -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y. \end{cases}$$

Indication : on pourra commencer par identifier la nature et les éléments caractéristiques de p.



Solution: Réécrivons l'expression analytique de p sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De cette manière, on voit apparaitre la matrice de p, à savoir :

$$P = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

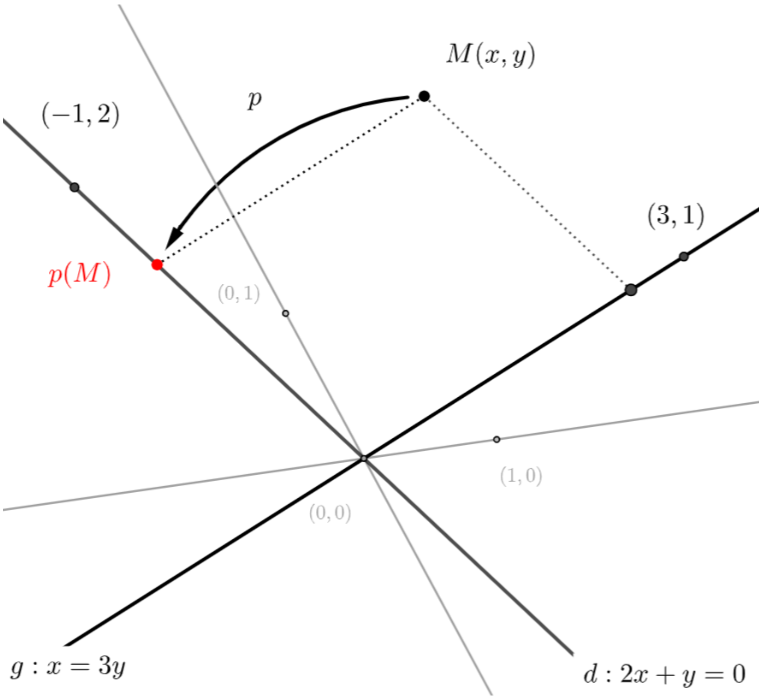
La matrice P étant de trace 1 et de rang 1, on sait que p est une projection dont les deux axes passent par l'origine. Pour identifier ces deux axes, décomposons la matrice P en un produit colonne-ligne :

$$P = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On sait alors que p est la projection sur d parallèlement à g, où les droites d et g ont pour équation :

$$\underbrace{d : 2x + y = 0}_{\text{passe par (0,0) et est dirigée par } \binom{-1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{g : x - 3y = 0\,.}_{\text{correspond à la ligne } (1 \ -3)}$$

Pour faire apparaitre le point $p(M)$ sur le dessin, il reste maintenant à tracer la droite d (elle passe par l'origine et par le point de coordonnées $(-1, 2)$) et la droite g (elle passe par l'origine et par le point de coordonnées $(3, 1)$) puis à "faire tomber" M sur d parallèlement à g.

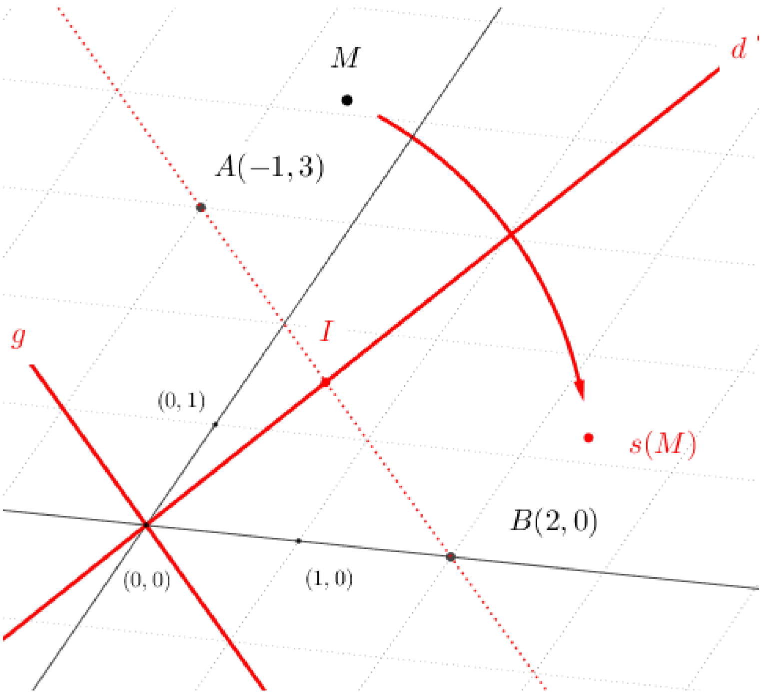


Exercice 4. Dans le plan muni d'un repère, on donne :

$$A(-1, 3) \text{ et } B(2, 0).$$

Trouver l'expression analytique d'une symétrie s dont les axes passent par l'origine sachant que $s(A) = B$. *Indication : on commencera par faire un dessin.*

Solution: Appelons d et g les axes de la symétrie p (on fait la symétrie par rapport à d parallèlement à g). Figure d'étude :



Le milieu I de (AB), qui a pour coordonnées $(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+0}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ se trouve sur l'axe d, puisque c'est le milieu d'un segment joignant un point à son image par la symétrie. Comme l'origine se trouve aussi sur la droite d, on voit qu'elle admet pour équation :

$$d : y = 3x.$$

Ensuite, observons que le vecteur $\overrightarrow{AB} \binom{3}{-3}$ est directeur de g : en effet, quand on se déplace de A à $B = s(A)$, on le fait parallèlement à g, par définition même d'une symétrie. Comme la droite g passe aussi par l'origine, on voit qu'elle admet pour équation :

$$g : x + y = 0.$$

On obtient donc finalement que s admet pour expression analytique :

$$s : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{avec } S = 2\underbrace{\left(\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{P} - I_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

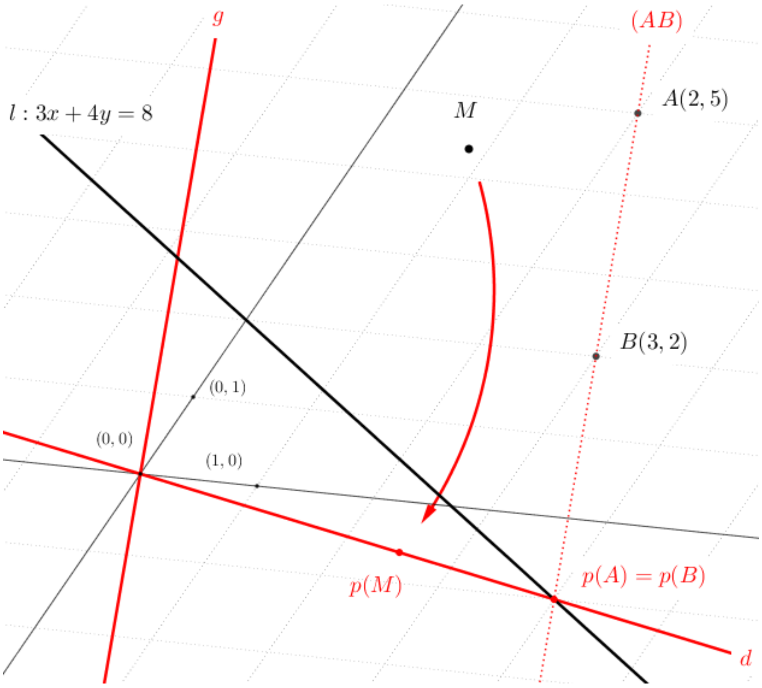
(la matrice P est la matrice de projection sur d parallèlement à g). Pour terminer, vérifions notre résultat (cette étape n'est pas nécessaire pour la résolution, mais fortement recommandée en pratique !). La matrice S que l'on a trouvée est de trace 0 et de déterminant -1 : c'est donc une matrice de symétrie. Par un calcul direct, on trouve alors bien que $s(A) = B$. On a donc bien trouvé une solution au problème posé (et notre raisonnement montre que c'est la seule).

Exercice 5. Dans le plan muni d'un repère, on donne :

$$A(2,5), \quad B(3,2), \quad l : 3x + 4y = 8,$$

Trouver l'expression analytique d'une projection p dont les axes passent par l'origine sachant que $p(A) = p(B)$ appartient à l. *Indication : on commencera par faire un dessin.*

Solution: Appelons d et g les axes de la projection p (on projette sur d parallèlement à g). Figure d'étude :



La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\binom{1}{-3}$, si bien qu'elle admet pour équation :

$$(AB) : 3x + y = 3 \cdot 2 + 5 = 11.$$

La condition $p(A) = p(B)$ impose que la droite g est parallèle à (AB). Comme elle passe par l'origine, elle a donc pour équation :

$$g : 3x + y = 0.$$

Par ailleurs, le point $p(A) = p(B)$ se trouvant sur (AB) et sur l, ses coordonnées sont données par le système :

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ce point se trouvant également sur la droite d (qui passe aussi par l'origine), on trouve qu'elle a pour équation :

$$d : x + 4y = 0.$$

On obtient alors finalement que p admet pour expression analytique :

$$p : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{avec } P = \tfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour terminer, vérifions notre résultat (cette étape n'est pas nécessaire pour la résolution, mais fortement recommandée en pratique !). La matrice que l'on a trouvée est de trace 1 et de déterminant 0 : c'est donc une matrice de projection. Par un calcul direct, on trouve alors bien que A et B ont la même image par p, à savoir le point de coordonnées $(4, -1)$. Comme celui-ci appartient à l, on a bien trouvé une solution au problème posé (et notre raisonnement montre que c'est la seule).

Exercice 6. Dans le plan muni d'un repère on donne $A(1,4)$, une droite l passant par A, et la transformation géométrique :

$$s : \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}y \\ y' = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y. \end{cases}$$

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s.

b. Trouver l sachant que la droite $s(l)$ est égale à l. *Indication : que peut-on dire du point $s(A)$?*

c. Identifier toutes les droites l pour lesquelles $s(l)$ est parallèle à l.

Solution:

a. Réécrivons l'expression analytique de s sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De cette manière, on voit apparaitre la matrice de s, à savoir :

$$S = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matrice S étant de trace nulle et de déterminant -1, on sait que s est une symétrie dont les axes d et g passent par l'origine (on "symétrise" par rapport à d parallèlement à g). Pour identifier ces deux axes, calculons par exemple la matrice de projection P associée à S :

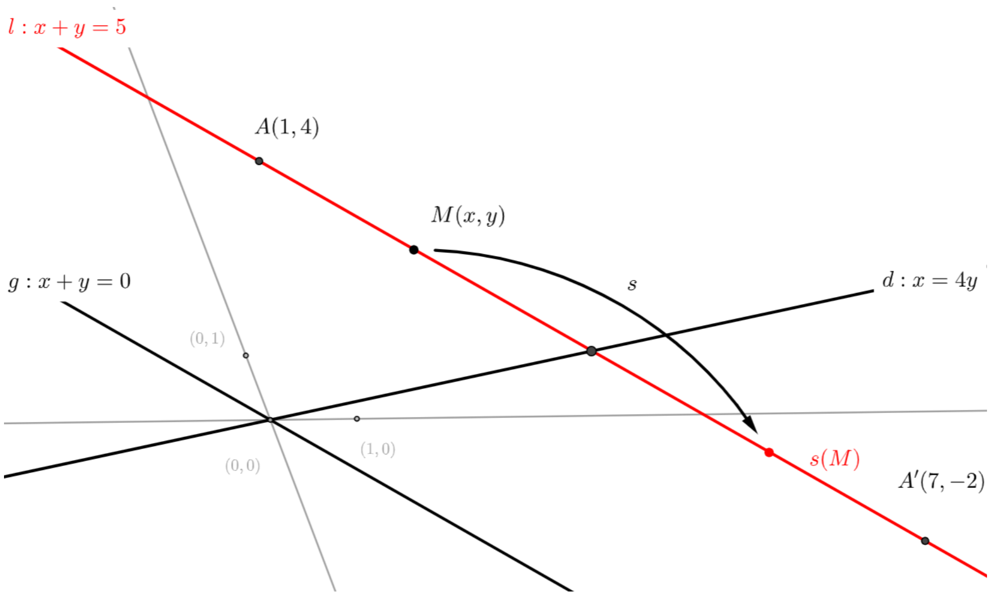
$$P = \tfrac{1}{2}(S + I_2) = \tfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la décomposition de P comme produit d'une colonne et d'une ligne, la colonne correspond à un vecteur directeur de d, qui a donc pour équation $x = 4y$, et la ligne donne directement une équation cartésienne de g, à savoir $x + y = 0$.

b. Le point $A' = s(A)$ appartient à la droite $s(l)$. Sous l'hypothèse que les droites $s(l)$ et l sont égales, on voit donc qu'il appartient à l. Autrement dit, la droite l doit être égale à la droite (AA'). D'après l'expression analytique de s, le point A' a pour coordonnées :

$$(\tfrac{3}{5} \cdot 1 + \tfrac{8}{5} \cdot 4, \tfrac{2}{5} \cdot 1 - \tfrac{3}{5} \cdot 4) = (\tfrac{3}{5} + \tfrac{32}{5}, \tfrac{2}{5} - \tfrac{12}{5}) = (7, -2).$$

La droite l passe par $A(1,4)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AA'}\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -6 \end{smallmatrix}\right)$, où encore par le vecteur de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Elle admet donc pour équation cartésienne : $x + y = 5$. Voici un dessin illustrant la situation étudiée ici :



Remarque : la droite l que l'on a trouvée est en fait la parallèle à g passant par A. Si M appartient à l, le déplacement de M à $s(M)$ se fait parallèlement à g, et donc à l'intérieur de l, si bien que $s(M)$ appartient bien à l. A noter pour conclure que la condition $s(l) = l$ **ne signifie pas** que $s(M) = M$ pour tout point M appartenant à l.

c. Soit $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ un vecteur directeur de l. Puisqu'elle passe par $A(1,4)$, la droite l admet pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1+\alpha t \\ y = 4+\beta t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

En utilisant l'expression analytique de s, on trouve maintenant que $s(l)$ est décrite par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}(1+\alpha t) + \frac{8}{5}(4+\beta t) = 7 + \frac{3\alpha+8\beta}{5} t \\ y = \frac{2}{5}(1+\alpha t) - \frac{3}{5}(4+\beta t) = -2 + \frac{2\alpha-3\beta}{5} t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

La droite $s(l)$ est donc parallèle à l si et seulement si le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{3\alpha+8\beta}{5} \\ \frac{2\alpha-3\beta}{5} \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}$, ou encore si $5\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Autrement dit, ceci se produit exactement quand :

$$\begin{vmatrix} 3\alpha+8\beta & \alpha \\ 2\alpha-3\beta & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Calculons alors :

$$\begin{vmatrix} 3\alpha+8\beta & \alpha \\ 2\alpha-3\beta & \beta \end{vmatrix} = 3\alpha\beta + 8\beta^2 - 2\alpha^2 + 3\alpha\beta = -2\alpha^2 + 6\alpha\beta + 8\beta^2$$

On doit donc résoudre l'équation :

$$-2\alpha^2 + 6\alpha\beta + 8\beta^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0.$$

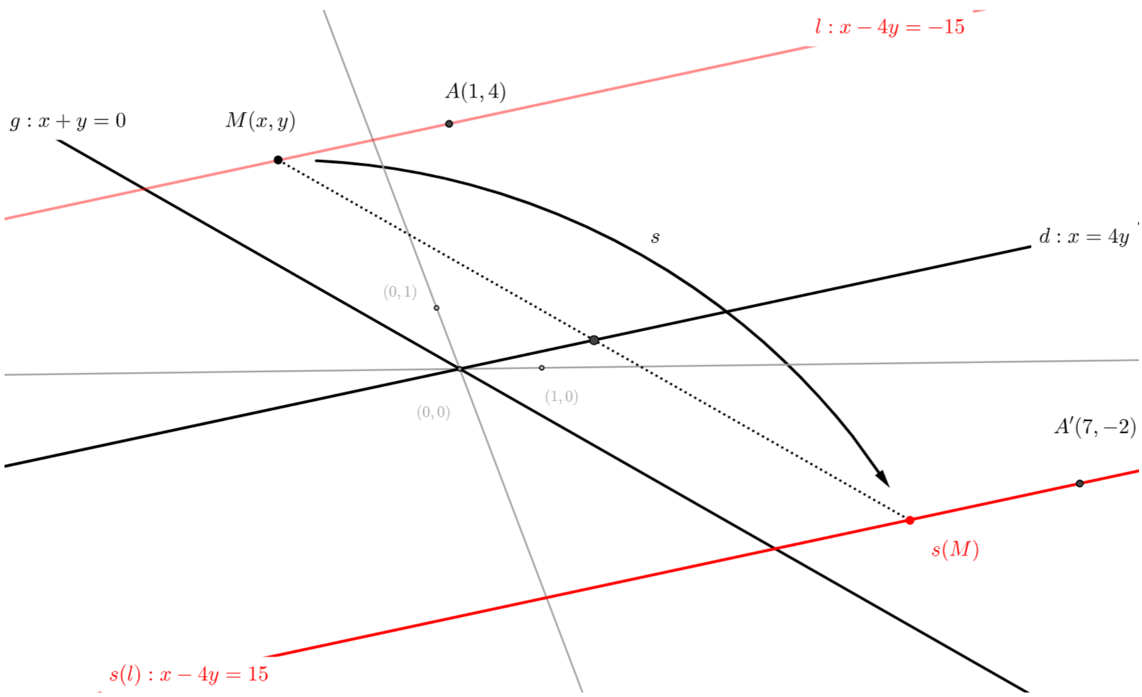
Voyons alors cette équation comme un trinôme en α dont les coefficients dépendent du paramètre β. Le discriminant vaut :

$$\Delta = (-3\beta)^2 - 4(-4\beta^2) = 25\beta^2 = (5\beta)^2$$

si bien que les solutions sont :

$$\alpha = \tfrac{3\beta-5\beta}{2} = -\beta \quad \text{et} \quad \alpha = \tfrac{3\beta+5\beta}{2} = 4\beta.$$

La première correspond à $\vec{u}$ de coordonnées $\binom{\alpha}{-\alpha} = \alpha\binom{1}{-1}$ ce qui redonne la droite l trouvée au b., à savoir celle d'équation $x+y=5$. La deuxième correspond à $\vec{u}$ de coordonnées $\binom{4\beta}{\beta} = \beta\binom{4}{1}$ ce qui donne la droite l d'équation $x-4y = 1-16 = -15$. Il s'agit de la parallèle à d passant par A. Pour cette droite l, $s(l)$ n'est donc pas égale à l, mais elle a la même direction :



En résumé, on a trouvé deux droites l solutions du problème posé, à savoir les parallèles aux axes de la symétrie s passant par A. Toute autre droite issue de A aura sa direction modifiée lorsqu'on lui applique s.

Exercice 7. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille 2 à coefficients réels.

a. Si M est une matrice de projection, montrer que $M^2 = M$.

b. Déterminer toutes les matrices M vérifiant $M^2 = M$. *Indication : discuter selon le rang de M.*

Solution:

a. Si M est une matrice de projection, on sait que M s'écrit sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \sigma \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda\rho + \mu\sigma = 1.$$

Par un calcul direct, on trouve alors :

$$M^2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \rho & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}}_{\lambda\rho+\mu\sigma=1} \begin{pmatrix} \rho & \sigma \end{pmatrix} = M$$

(ceci peut aussi se comprendre géométriquement : appliquer deux fois de suite une projection a le même effet que de ne l'appliquer qu'une fois).

b. Discutons selon le rang de M. La seule matrice de rang 0 est la matrice nulle :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui vérifie bien que $M^2 = M$. Supposons maintenant que M est de rang 1. Nous allons montrer que c'est une matrice de projection. On sait déjà qu'elle est de déterminant nul, il suffit donc de prouver que sa trace est égale à 1. Pour cela, commençons par écrire M sous la forme d'un produit ligne-colonne :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\rho & \lambda\sigma \\ \mu\rho & \mu\sigma \end{pmatrix}.$$

Il vient alors :

$$M^2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \rho & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}}_{\lambda\rho+\mu\sigma} \begin{pmatrix} \rho & \sigma \end{pmatrix} = \mathrm{tr}(M)M.$$

Comme M est non nulle, on voit alors que la condition $M^2 = M$ impose que la trace de M est égale à 1. Supposons alors pour finir que M est de rang 2, ou autrement dit qu'elle est inversible. On obtient :

$$M^2 = M \quad \Leftrightarrow \quad M^{-1}M^2 = M^{-1}M \quad \Leftrightarrow \quad M = I_2.$$

Autrement dit, la seule matrice inversible qui vérifie la condition est la matrice identité. En résumé, nous avons établi que dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ les solutions de l'équation $M^2 = M$ sont la matrice nulle, la matrice identité et les matrices de projection.

Exercice 8. Quelles sont les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant la condition :

$$M^2 = I_2 \ ?$$

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent et s'intéresser à la matrice $\frac{1}{2}(I_2 + M)$.

Solution: La relation :

$$M^2 = I_2$$

nous fait penser aux matrices de symétries (géométriquement : quand on applique deux fois de suite une symétrie on revient au point de départ). Ceci nous invite à chercher un lien entre la condition :

$$M^2 = M$$

étudiée à l'exercice précédent (qui caractérise essentiellement les matrices de projection) et celle que l'on cherche à comprendre maintenant. Or on sait d'après un résultat vu au cours que M est une matrice de symétrie si et seulement si $\frac{1}{2}(I_2 + M)$ est une matrice de projection. Ceci nous fournit le lien que l'on recherche :

$$\left(\tfrac{1}{2}(I_2 + M)\right)^2 = \tfrac{1}{2}(I_2 + M) \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}(I_2 + 2M + M^2) = \tfrac{1}{2}(I_2 + M) \quad \Leftrightarrow \quad I_2 + 2M + M^2 = 2I_2 + 2M \quad \Leftrightarrow \quad M^2 = I_2.$$

Par conséquent, M est solution de $M^2 = I_2$ si et seulement si $\frac{1}{2}(I_2 + M)$ est solution de l'équation étudiée à l'exercice précédent : c'est-à-dire si et seulement si elle est nulle (correspond à $M = -I_2$), égale à I_2 (correspond à $M = I_2$) ou est une matrice de projection (correspond à M matrice de symétrie).