Série 8

Dans toute la série, le plan est muni d'un repère orthonormé direct dont on note O l'origine.

Exercice 1. Déterminer l'expression analytique de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$:

a. centrée en l'origine. b. centrée en $A(1,2)$. c. envoyant $B(-3,1)$ sur l'origine.

Solution: Commençons par calculer la matrice de rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$:

$$R_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les rotations étudiées dans cet exercice ont donc toutes les trois une expression analytique du type :

$$\begin{cases} x' = y + \lambda \\ y' = -x + \mu \end{cases}$$

où les constantes λ et μ sont imposées par les conditions données dans chacun des cas.

a. Dans le cas d'une rotation centrée en l'origine, on sait que le terme constant est nul (ce qui correspond aussi au fait que $(0,0)$ est un point fixe de la transformation). On trouve donc que la rotation étudiée ici a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

b. Ici, on doit choisir les constantes de sorte à ce que A soit un point fixe, ce qui nous conduit à :

$$\begin{cases} 1 = 2 + \lambda \\ 2 = -1 + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 3. \end{cases}$$

La rotation étudiée ici a donc pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 3. \end{cases}$$

Rappelons d'autres façons d'obtenir le terme constant. On peut par exemple partir de l'expression :

$$\begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 2 \end{pmatrix} = R_{-\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

(qui exprime que le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ est obtenu en tournant le vecteur $\overrightarrow{AM}$ de l'angle $-\frac{\pi}{2}$, où $M'(x',y')$ est l'image de $M(x,y)$ par la rotation) puis isoler x' et y' afin d'obtenir leur expression en fonction de x et y. On peut aussi appliquer directement la formule trouvée au cours, qui indique que le terme constant est donnée par :

$$(I_2 - R_{-\frac{\pi}{2}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c. Le fait que B soit envoyé sur l'origine par la rotation signifie algébriquement que :

$$\begin{cases} 0 = 1 + \lambda \\ 0 = 3 + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = -3. \end{cases}$$

La rotation étudiée ici a donc pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x - 3. \end{cases}$$

Exercice 2. Identifier dans chacun des cas suivants la nature et les éléments caractéristiques de la transformation géométrique décrite par l'expression analytique donnée :

a. $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$ b. $\begin{cases} x' = -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y \\ y' = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y. \end{cases}$ c. $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3}. \end{cases}$

Solution:

a. La matrice de la transformation est ici :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_\pi$$

si bien que la transformation proposée est une rotation d'angle π. Comme le terme constant est nul, on voit qu'elle est centrée en l'origine. On peut aussi interpréter cette transformation comme l'homothétie de rapport -1 (ou encore la symétrie centrale) centrée en l'origine.

b. La matrice de la transformation est ici :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La relation :

$$(-\tfrac{1}{\sqrt{5}})^2 + (\tfrac{2}{\sqrt{5}})^2 = 1$$

permet alors d'affirmer qu'il s'agit de la matrice de rotation :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{pour l'angle } \theta \text{ vérifiant} \quad \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

On trouve $\theta \simeq 117°$ (la valeur exacte étant $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}})$). On en déduit que la transformation étudiée est une rotation d'angle θ. Par ailleurs, le terme constant est nul, si bien qu'elle est centrée en l'origine.

c. La transformation ayant :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{3}}$$

pour matrice c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le centre est l'unique point fixe, dont les coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 2 \\ \sqrt{3}x - y = 2\sqrt{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0. \end{cases}$$

La transformation étudiée ici est donc la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ centrée au point de coordonnées $(2, 0)$.

Exercice 3. Une rotation r centrée sur d envoie A sur B, avec :

$$A(-2, 1), \quad B(6, 5) \quad \text{et} \quad d : x + y = 4.$$

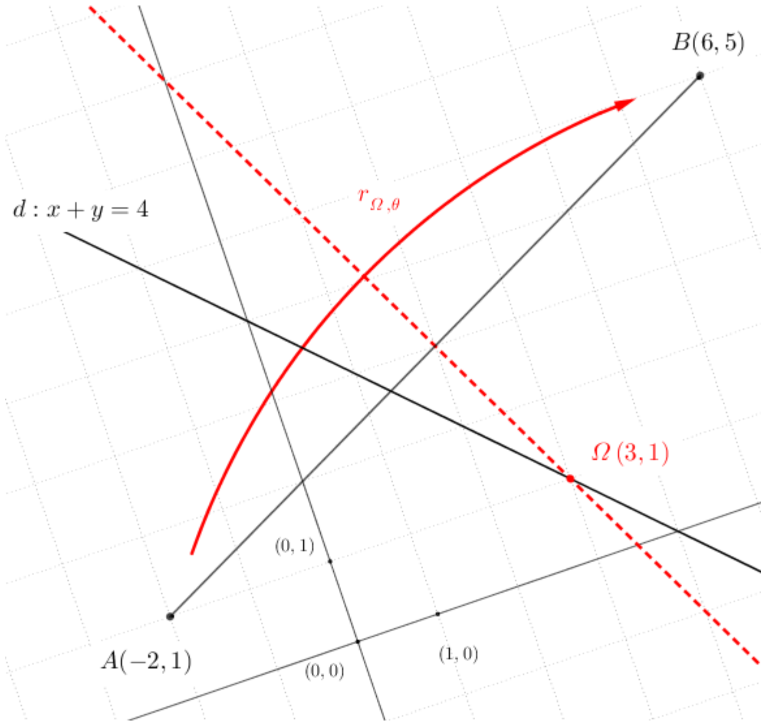
a. Quelle est l'expression analytique de r ? *Indication : commencer par rechercher le centre.*
b. Déterminer une équation de la droite (AB) ainsi que de son image par r.

Solution:

a. Le centre Ω de r se trouve à l'intersection de la médiatrice g de AB et de la droite d. Cherchons alors ses coordonnées. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{8}{4}$, si bien que le vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, qui a pour coordonnées $\binom{2}{1}$ est normal à g. Par ailleurs, g passe par le milieu de AB, qui a pour coordonnées $(2, 3)$. On en déduit qu'elle a pour équation $2x + y = 7$. Les coordonnées de Ω sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

La rotation étudiée est donc centrée en $\Omega(3, 1)$. Son angle θ est l'angle orienté du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}\binom{-5}{0}$ vers le vecteur $\overrightarrow{\Omega B}\binom{3}{4}$.



Comme le repère employé ici est orthonormé direct, on trouve alors :

$$\cos\theta = \frac{-5\cdot 3+0\cdot 4}{\sqrt{(-5)^2+0^2}\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-5)^2+0^2}\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{4}{5}.$$

On en déduit alors que l'expression analytique de r est du type :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \lambda \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \mu. \end{cases}$$

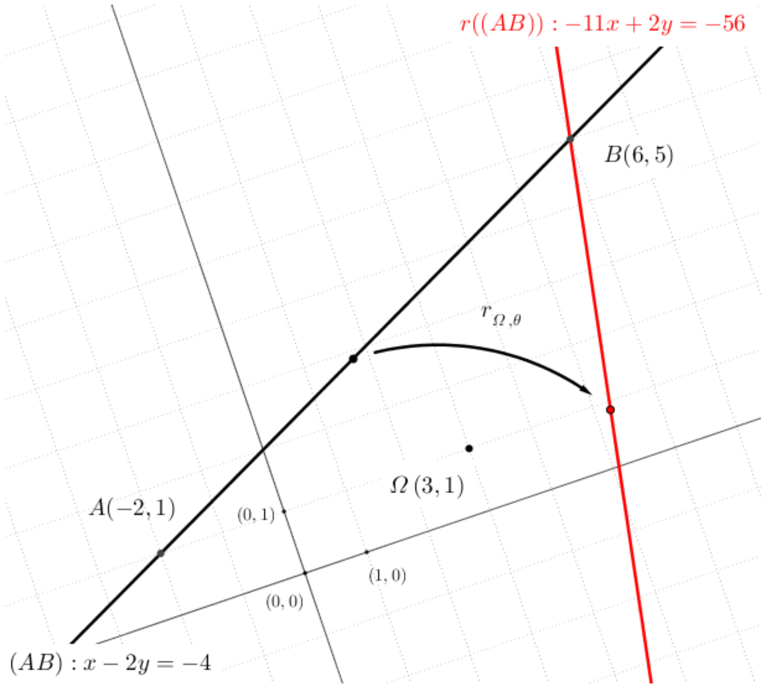
Pour touver les valeurs des constantes λ et μ, on peut exprimer que Ω est fixe, ou encore que A est envoyé sur B. On trouve alors $\lambda = 4$ et $\mu = 4$. La rotation r est donc décrite par les formules :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 4. \end{cases}$$

b. On a déjà vu que la droite (AB) est dirigée par le vecteur de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Elle admet donc pour équation cartésienne $x - 2y = -4$. La droite obtenue en tournant (AB) autour de Ω de l'angle θ, c'est-à-dire la droite $r((AB))$ peut être caractérisée de plusieurs manières. Par exemple, elle passe par $r(A) = B$ et est dirigée par le vecteur de coordonnées :

$$R_\theta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

(puisque c'est le vecteur obtenu en tournant $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ de l'angle θ). Elle admet donc pour équation $-11x+2y = -11\cdot 6+2\cdot 5 = -56$.



On peut aussi commencer par tourner le vecteur de coordonnées $\binom{1}{-2}$ (qui est normal à (AB)) de l'angle θ :

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pour obtenir un vecteur normal à $r((AB))$, puis en déduire une équation cartésienne sous la forme $-11x+2y = -11\cdot 6+2\cdot 5 = -56$. Enfin, une autre option pour caractériser la droite $r((AB))$ est de chercher un autre point que $B = r(A)$ dessus, comme par exemple $r(B)$, qui a pour coordonnées $(\frac{22}{5}, -\frac{19}{5})$. Une fois que l'on connait deux points sur cette droite on peut en effet en calculer une équation cartésienne.

Exercice 4. On donne les points :

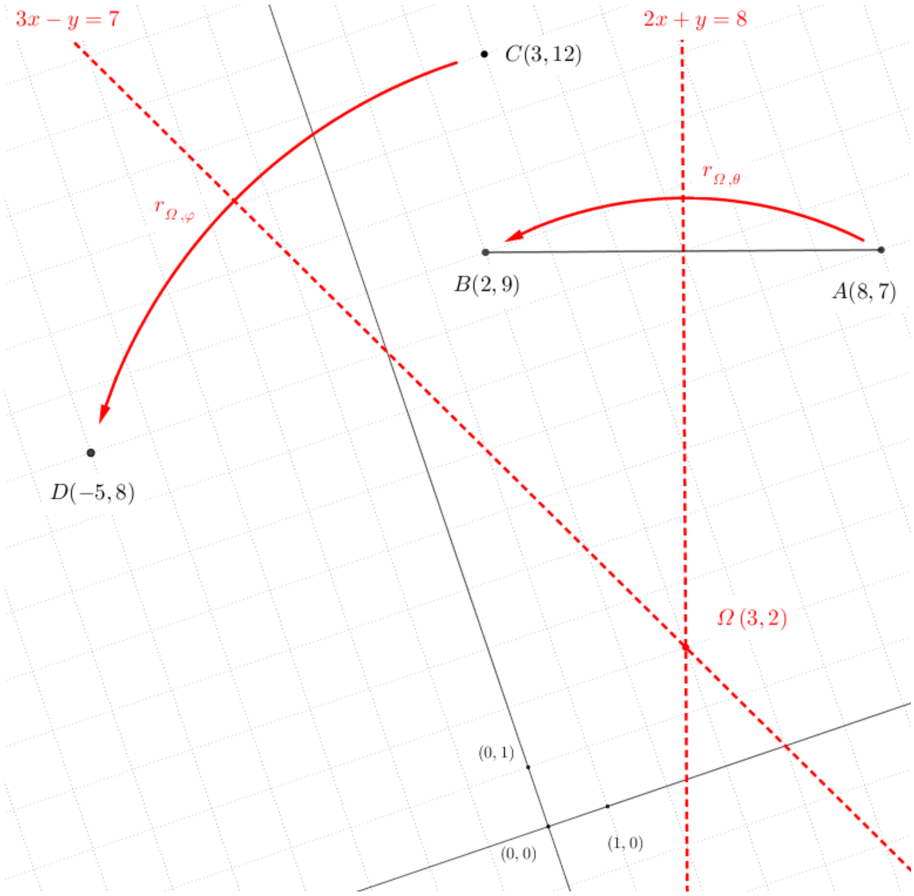
$$A(8,7), \quad B(2,9), \quad C(3,12) \quad \text{et} \quad D(-5,8).$$

Existe-t-il une rotation r envoyant A sur B et C sur D ? Si oui, en donner l'expression analytique, le centre et l'angle. *Indication : on pourra commencer par localiser le centre.*

Solution: Commençons par observer que si une telle rotation existe, son centre Ω doit se trouver à égale distance de A et B d'une part, et de C et D d'autre part. Autrement dit, il doit se trouver à la fois sur la médiatrice de AB et sur celle de CD. Cherchons alors le point d'intersection de ces deux droites. La médiatrice de AB passe par le milieu $I(5,8)$ de AB et est normale à $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\binom{-3}{1}$. Elle admet donc pour équation cartésienne $3x - y = 7$. De même, la médiatrice de CD passe par le milieu $J(-1,10)$ de CD et est normale à $-\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}\binom{2}{1}$. Elle admet donc pour équation cartésienne $2x + y = 8$. En résolvant le système :

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 7 \\ 5x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

on voit donc que, si le problème posé a une solution, alors la rotation r recherchée est centrée en $\Omega(3,2)$.



La question est donc maintenant de savoir si les angles orientés de $\overrightarrow{\Omega A}$ vers $\overrightarrow{\Omega B}$ d'une part, et de $\overrightarrow{\Omega C}$ vers $\overrightarrow{\Omega D}$ d'autre part sont égaux. On trouve :

$$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}, \overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}, \overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}, \overrightarrow{\Omega D}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}.$$

L'angle orienté θ de $\overrightarrow{\Omega A}$ vers $\overrightarrow{\Omega B}$ vérifie donc :

$$\cos\theta = \frac{5\cdot(-1)+5\cdot 7}{\sqrt{5^2+5^2}\sqrt{(-1)^2+7^2}} = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\begin{vmatrix}5 & -1\\ 5 & 7\end{vmatrix}}{\sqrt{5^2+5^2}\sqrt{(-1)^2+7^2}} = \frac{4}{5}.$$

De même, l'angle orienté φ de $\overrightarrow{\Omega C}$ vers $\overrightarrow{\Omega D}$ vérifie :

$$\cos\varphi = \frac{0\cdot(-8)+10\cdot 6}{\sqrt{0^2+10^2}\sqrt{(-8)^2+6^2}} = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{\begin{vmatrix}0 & -8\\ 10 & 6\end{vmatrix}}{\sqrt{0^2+10^2}\sqrt{(-8)^2+6^2}} = \frac{4}{5}.$$

On en conclut que $\varphi = \theta$, ce qui établit l'existence d'une rotation r possédant les propriétés requises. Si (x', y') est l'image de (x, y) par r, on a alors :

$$\begin{pmatrix}x'-3\\y'-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{14}{5}\\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{8}{5}.\end{cases}$$

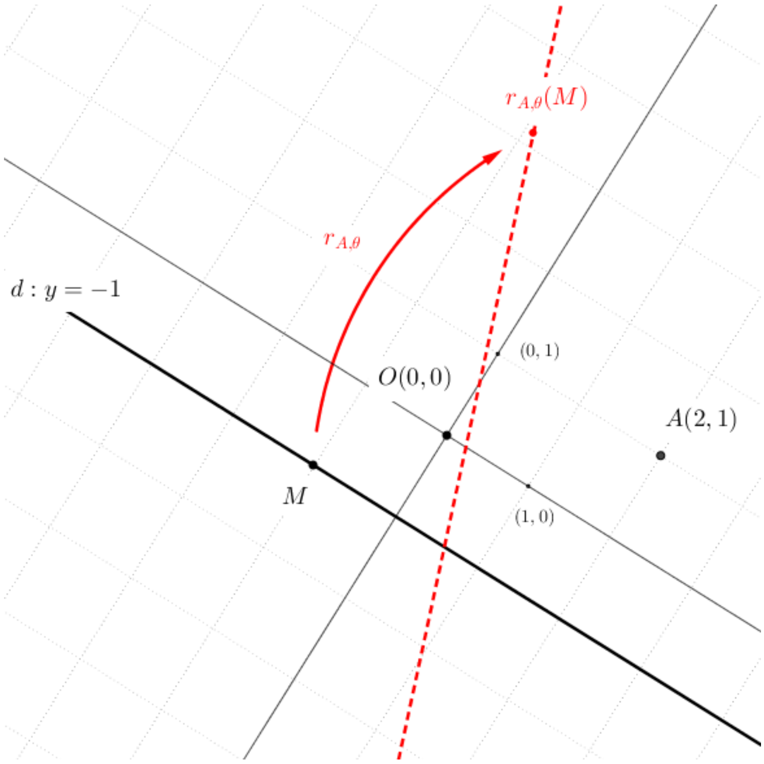
Par ailleurs, on a caractérisé ci-dessus l'angle de la rotation r par son cosinus ($= \frac{3}{5}$) et son sinus ($= \frac{4}{5}$). On trouve alors $\theta \simeq 53°$ (la valeur exacte étant $\arccos(\frac{3}{5})$).

Exercice 5. On donne :

$$A(2,1) \quad \text{et} \quad d : y = -1.$$

Par une rotation r centrée en A la droite d est envoyée sur une droite passant par l'origine. Quel est l'angle de cette rotation ? En donner aussi l'expression analytique. *Indication : que peut-on dire du point $r^{-1}(O)$?*

Solution: La figure ci-dessous représente l'image de la droite d par la rotation $r_{A,\theta}$ de centre A et d'angle θ (indéterminé).



Il s'agit donc de trouver le (ou les) bon(s) angle(s) θ pour que la rotation $r = r_{A,\theta}$ envoie d sur une droite passant par l'origine : autrement dit, pour que la droite en pointillé rouge sur la figure passe par l'origine. On donne pour cela deux méthodes.

Dans la première, cherchons une équation de la droite image $r_{A,\theta}(d)$. Commençons pour cela par écrire l'expression analytique de la rotation $r_{A,\theta}$:

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \begin{cases} x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y + 2 - 2\cos(\theta) + \sin(\theta) \\ y' = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y + 1 - 2\sin(\theta) - \cos(\theta). \end{cases}$$

La droite d étant formée des points de coordonnées $(t, -1)$ (pour t variant librement dans $\mathbb{R}$), on voit que $r_{A,\theta}(d)$ est formée de ceux de coordonnées :

$$(\cos(\theta)t + 2 - 2\cos(\theta) + 2\sin(\theta), \sin(\theta)t + 1 - 2\sin(\theta) - 2\cos(\theta)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Elle a donc pour équation cartésienne :

$$\sin(\theta)x - \cos(\theta)y = \underbrace{\sin(\theta)(2 - 2\cos(\theta) + 2\sin(\theta)) - \cos(\theta)(1 - 2\sin(\theta) - 2\cos(\theta))}_{2+2\sin(\theta)-\cos(\theta)}.$$

La droite $r_{A,\theta}(d)$ passe donc par l'origine si et seulement si θ vérifie la relation suivante :

$$2 + 2\sin(\theta) - \cos(\theta) = 0 \text{ ou encore } 2\sin(\theta) = \cos(\theta) - 2.$$

En élevant au carré on trouve alors :

$$\underbrace{4\sin^2(\theta)}_{4-4\cos^2(\theta)} = \underbrace{(\cos(\theta) - 2)^2}_{\cos^2(\theta)-4\cos(\theta)+4} \quad \Rightarrow \quad 5\cos^2(\theta) - 4\cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = 0 \text{ ou } \cos(\theta) = \tfrac{4}{5}.$$

En revenant à la relation entre sinus et cosinus déterminée ci-dessus, on voit qu'il y a exactement deux angles solutions, définis par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = 0 \\ \sin(\theta) = -1 \end{cases} \text{ d'une part, et } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{4}{5} \\ \sin(\theta) = -\frac{3}{5} \end{cases} \text{ d'autre part.}$$

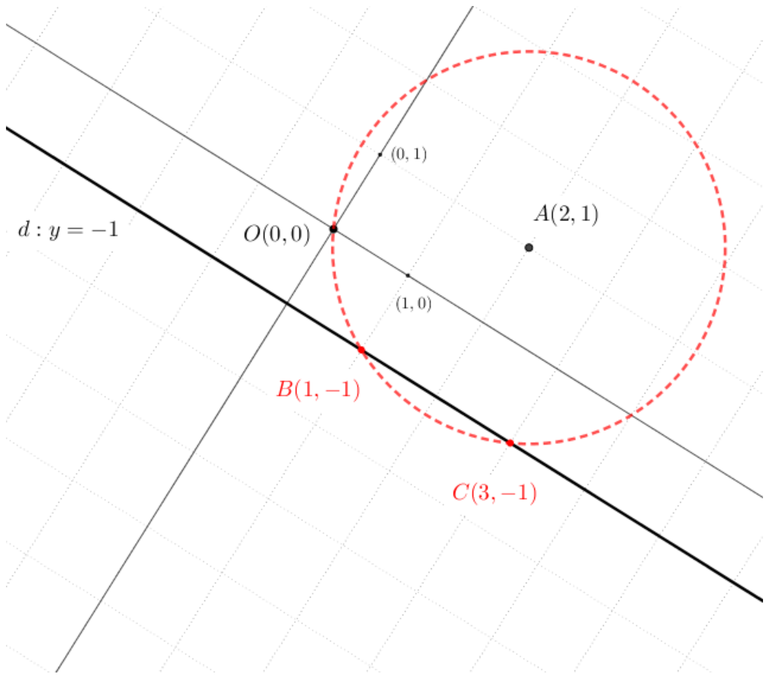
Exprimé en degré, on trouve les valeurs $\theta = -90°$ et $\simeq -37°$. Les expressions analytiques correspondantes sont :

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x + 3 \end{cases} \text{ d'une part, et } \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{1}{5} \\ y' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{7}{5} \end{cases} \text{ d'autre part.}$$

Passons à la deuxième méthode, plus géométrique. En revenant au dessin ci-dessus, on commence par observer que $r_{A,\theta}(d)$ passe par l'origine si et seulement si on peut trouver un point M sur d dont l'image par $r_{A,\theta}$ est égale à O. Or le point O possède un unique antécédent par cette rotation car celle-ci est bijective. La condition donnée dans l'énoncé est donc équivalente à demander que le point $r_{A,\theta}^{-1}(O)$ appartient à d :

$$O \in r_{A,\theta}(d) \quad \Leftrightarrow \quad r_{A,\theta}^{-1}(O) \in d.$$

Par ailleurs, la distance au centre est préservée lors d'une rotation, si bien que $r_{A,\theta}^{-1}(O)$ est à distance $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{5}$ de A. Ceci permet de localiser ce point à l'intersection de d et du cercle de centre A de rayon $\sqrt{5}$.



Si l'on appelle (x, y) les coordonnées de $r_{A,\theta}^{-1}(O)$, on a donc :

$$\begin{cases} y = -1 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -1 \\ (x-2)^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \text{ ou } 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

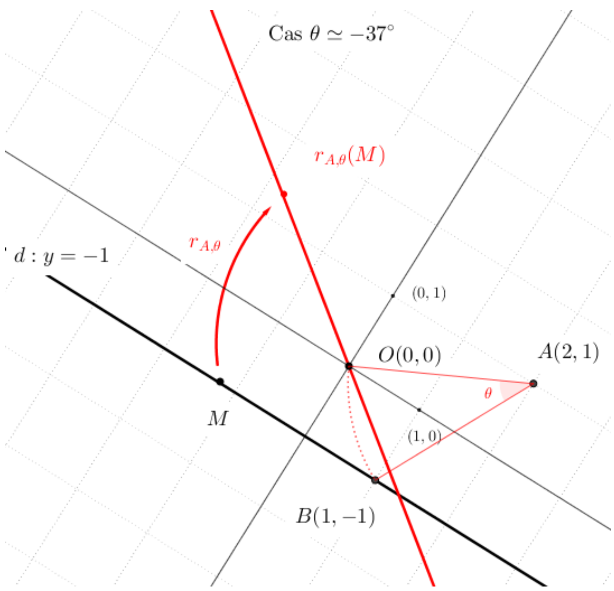
Il y a donc deux cas. Dans le premier r (qui est centrée en A) envoie $B(1,-1)$ sur O. L'angle θ est l'angle orienté de $\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right)$ vers $\overrightarrow{AO}\left(\begin{smallmatrix}-2\\-1\end{smallmatrix}\right)$, et vérifie donc :

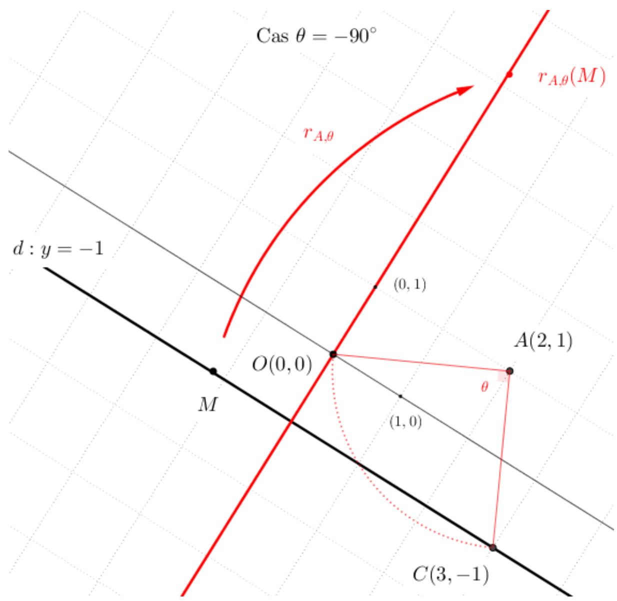
$$\cos\theta = \frac{(-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix}}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}} = -\frac{3}{5}.$$

Dans le deuxième cas r (qui est centrée en A) envoie $C(3,-1)$ sur O. L'angle θ est l'angle orienté de $\overrightarrow{AC}\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right)$ vers $\overrightarrow{AO}\left(\begin{smallmatrix}-2\\-1\end{smallmatrix}\right)$, et vérifie donc :

$$\cos\theta = \frac{1\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}} = 0 \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix}}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}} = -1.$$

On retrouve bien sûr les mêmes angles que par la première méthode, et on en déduit comme ci-dessus les expressions analytiques correspondantes.





Exercice 6. On donne les droites :

$$d : 5x + 3y = 45, \quad g : x + 4y = 9 \quad \text{et} \quad l : 4x - y = 2.$$

Existe-t-il une rotation r centrée sur d qui envoie la droite g sur l ? Si oui, en donner l'expression analytique, le centre et l'angle. *Indication : introduire les projetés orthogonaux du centre de r sur les droites g et l.*

Solution: Supposons qu'une telle rotation existe et appelons Ω son centre. Soit A et B les projetés orthogonaux de Ω sur g et l respectivement. On a alors :

$$r(A) = B.$$

En effet, A est le point de g le plus proche de Ω, si bien que $r(A)$ est le point de $r(g) = l$ le plus proche de Ω (car par une rotation la distance au centre est préservée), autrement dit, il doit être égal à B. Cela montre en particulier que Ω est à même distance de g et l (cette distance n'est autre que $\|\overrightarrow{\Omega A}\| = \|\overrightarrow{\Omega B}\|$). En notant (x_Ω, y_Ω) les coordonnées de Ω, on obtient alors :

$$\frac{|x_\Omega + 4y_\Omega - 9|}{\sqrt{17}} = \frac{|4x_\Omega - y_\Omega - 2|}{\sqrt{17}}, \text{ ce qui donne } 3x_\Omega - 5y_\Omega + 7 = 0 \text{ ou } 5x_\Omega + 3y_\Omega = 11.$$

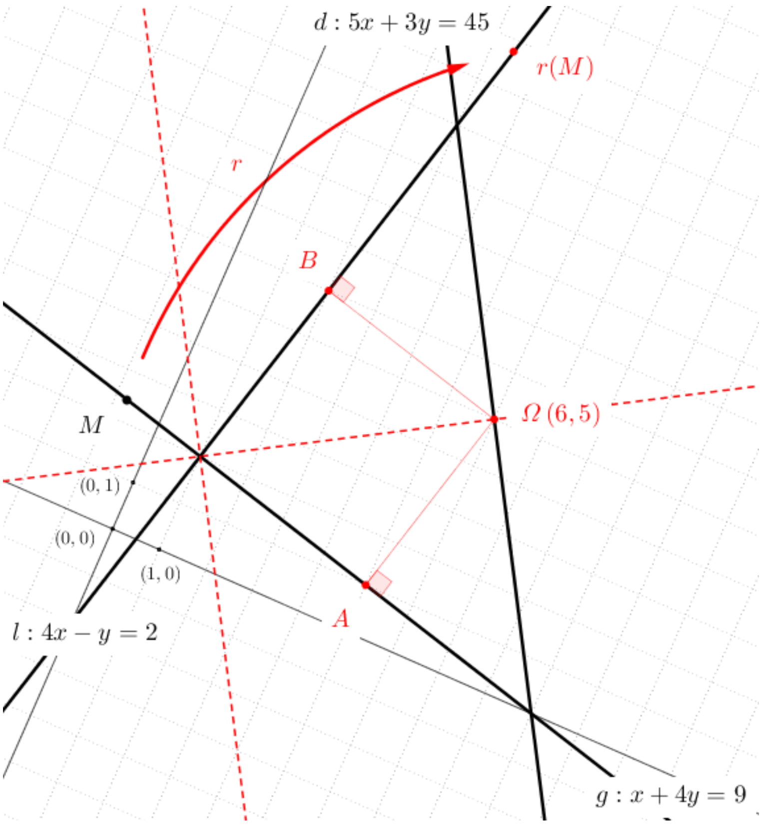
Or, la dernière égalité n'a sûrement pas lieu, car Ω appartient à d (si bien que $5x_\Omega + 3y_\Omega = 45$). On voit donc que, toujours sous l'hypothèse qu'une telle rotation r existe, les coordonnées du centre sont solutions du sytème :

$$\begin{cases} 3x_\Omega - 5y_\Omega = -7 \\ 5x_\Omega + 3y_\Omega = 45. \end{cases}$$

On trouve la valeur de x_Ω en combinant les équations afin de faire disparaitre y_Ω :

$$3(3x_\Omega - 5y_\Omega) + 5(5x_\Omega + 3y_\Omega) = 34x_\Omega = 3 \cdot (-7) + 5 \cdot 45 = 204.$$

On obtient finalement $x_\Omega = 6$, puis $y_\Omega = 5$. Par conséquent, si une telle rotation r existe, elle est centrée en $\Omega(6, 5)$.



En pointillé rouge sur la figure est représenté le lieu des points du plan qui sont équidistants des droites g et l : ce lieu intersecte d en un seul point, le centre Ω que l'on vient d'identifier. Un rapide coup d'oeil au dessin nous invite à penser que l'angle de la rotation que l'on recherche est alors $-\frac{\pi}{2}$. Pour confirmer cela, on va simplement calculer l'angle orienté de $\overrightarrow{\Omega A}$ vers $\overrightarrow{\Omega B}$ (du fait que $r(A) = B$, c'est bien l'angle qui nous intéresse). La perpendiculaire à g passant par Ω a pour équation $4x - y = 19$. On trouve alors que son point d'intersection avec g, qui n'est autre que A, a pour coordonnées $(5, 1)$. De la même manière, on obtient que B a pour coordonnées $(2, 6)$. L'angle orienté θ de $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ vers $\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ vérifie donc :

$$\cos\theta = \frac{(-1)\cdot(-4)+(-4)\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}\sqrt{(-4)^2+1^2}} = 0 \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\begin{vmatrix}-1 & -4 \\ -4 & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}\sqrt{(-4)^2+1^2}} = -1.$$

On trouve donc bien que $\theta = -\frac{\pi}{2}$. L'expression analytique de la rotation r recherchée est donc :

$$\begin{pmatrix} x' - 6 \\ y' - 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{R_{-\frac{\pi}{2}}} \begin{pmatrix} x - 6 \\ y - 5 \end{pmatrix} \text{ ce qui donne } \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = 11 - x. \end{cases}$$