Série 7

Exercice 1. Le plan étant muni d'un repère, identifier dans chacun des cas la nature et les éléments caractéristiques de la transformation géométrique décrite par l'expression analytique donnée :

a. $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y \end{cases}$ b. $\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 4y \end{cases}$ c. $\begin{cases} x' = -3x+4 \\ y' = -3y-8. \end{cases}$

Solution: Rappelons pour commencer que dans l'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \lambda \\ y' = \alpha y + \mu \end{cases} \qquad \text{(avec } \alpha \in \mathbb{R}^*\text{)}$$

le α sert à identifier la *nature* de la transformation : si $\alpha = 1$ c'est une translation $t_{\vec{u}}$, et si $\alpha \neq 1$ c'est une homothétie $h_{\Omega,\alpha}$ de rapport α. Le λ et le μ servent alors à trouver ses *éléments caractéristiques*. Dans le cas de la translation, le vecteur $\vec{u}$ est simplement celui de coordonnées $\binom{\lambda}{\mu}$. Dans le cas de l'homothétie, on trouve le centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ en cherchant l'unique point fixe, c'est-à-dire en résolvant le système :

$$\begin{cases} x_\Omega = \alpha x_\Omega + \lambda \\ y_\Omega = \alpha y_\Omega + \mu\,. \end{cases}$$

a. On a ici $\alpha = 1$: la transformation proposée est donc une translation. Le vecteur de la translation est donné par les termes constants dans la formule : il s'agit du vecteur de coordonnées $\binom{2}{0}$.

b. On a cette fois $\alpha = 4$: la transformation proposée est donc une homothétie de rapport 4. On peut alors observer que l'origine, de coordonnées $(0,0)$ est fixée par cette homothétie : c'en est donc le centre.

c. On a $\alpha = -3$: la transformation proposée est donc une homothétie de rapport -3. Le centre de cette homothétie est l'unique point fixe. Il est donc obtenu en résolvant le système :

$$\begin{cases} x = -3x+4 \\ y = -3y-8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

La transformation étudiée ici est donc l'homothétie de rapport -3 centrée au point de coordonnées $(1,-2)$.

Exercice 2. Dans le plan muni d'un repère, on donne :

$$A(2,1),\ B(1,-3) \ \text{ et } \ d : 2x+y=1.$$

a. Déterminer l'expression analytique de la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ dans le repère employé.

b. Calculer une équation cartésienne de la droite $t_{\overrightarrow{AB}}(d)$.

c. Mêmes questions a. et b. mais pour l'homothétie $h_{B,2}$, au lieu de $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Solution:

a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{1-2}{-3-1} = \binom{-1}{-4}$ dans le repère employé. Par conséquent, si $M'(x',y')$ est l'image de $M(x,y)$ par cette translation, on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y-4. \end{cases}$$

b. Donnons deux méthodes pour déterminer une équation cartésienne de $t_{\overrightarrow{AB}}(d)$. Pour la première, considérons le point $C(0,1)$, qui se trouve sur d. La droite $t_{\overrightarrow{AB}}(d)$ passe donc par le point $D = t_{\overrightarrow{AB}}(C)$, qui a pour coordonnées $(-1,-3)$. Comme elle est parallèle à d, elle admet pour équation :

$$t_{\overrightarrow{AB}}(d) \, : \, 2x + y = 2 \cdot (-1) + (-3) = -5.$$

Dans la deuxième méthode, on recherche la relation vérifiée par les coordonnées (x', y') de M' lorsque celles de $M(x,y)$ sont liées par la relation $2x + y = 1$:

$$2x + y = 1 \Leftrightarrow 2(x'+1) + (y'+4) = 1 \Leftrightarrow 2x' + y' = -5.$$

Un point se trouve donc sur $d : 2x+y = 1$ si et seulement si son image par $t_{\overrightarrow{AB}}$ se trouve sur la droite d'équation $2x+y = -5$.

c. Si $M(x', y')$ est l'image de $M(x,y)$ par l'homothétie $h_{B,2}$, on a alors :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{BM'}=2\overrightarrow{BM}} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 3. \end{cases}$$

Avec les notations du b., on voit alors que le point $E = h_{B,2}(C)$ a pour coordonnées $(-1, 5)$. La droite $h_{B,2}(d)$ passe par E et est parallèle à d. Elle admet donc pour équation :

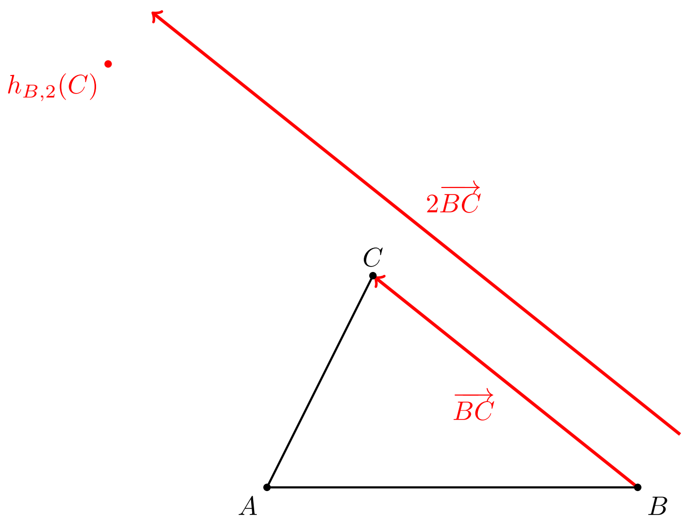
$$2x + y = 2 \cdot (-1) + 5 = 3.$$

Exercice 3. Sur une feuille de papier, placer trois points A, B, C non-alignés. Faire ensuite apparaitre sur la figure :

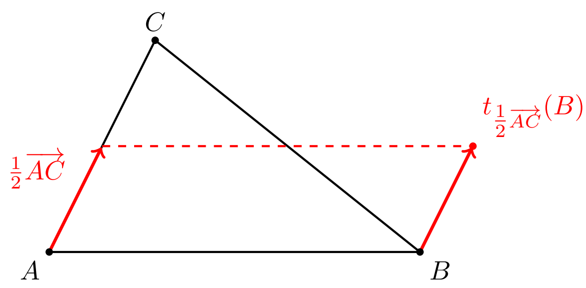
a. le point $h_{B,2}(C)$ b. le point $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}(B)$ c. la droite $h_{A,\frac{1}{3}}(d)$ où $d = (BC)$.

Solution:

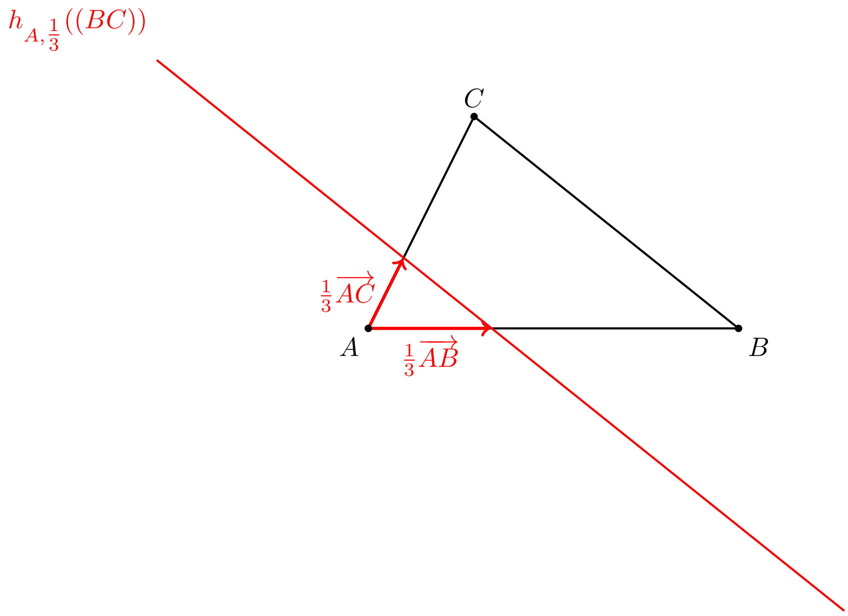
a. Le point $C' = h_{B,2}(C)$ à construire ici vérifie $\overrightarrow{BC'} = 2\overrightarrow{BC}$, c'est donc le translaté de B par le vecteur $2\overrightarrow{BC}$.



b. Le point $B' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}(B)$ à construire ici vérifie $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



c. La droite $h_{A,\frac{1}{3}}(d)$ passe par les images de B et C par l'homothétie $h_{A,\frac{1}{3}}$. Elle est parallèle à $d = (BC)$.



Exercice 4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne :

$$A(3, -4) \quad \text{et} \quad d : 2x - y = 5.$$

On note aussi g la parallèle à d passant par A.

a. Décrire tous les vecteurs $\vec{u}$ vérifiant $t_{\vec{u}}(d) = g$.

b. Parmi les vecteurs trouvés au a., lequel est le plus court ? *Indication : faire un dessin.*

c. Déterminer tous les points Ω du plan tels que $h_{\Omega,-1}(g) = d$.

Solution:

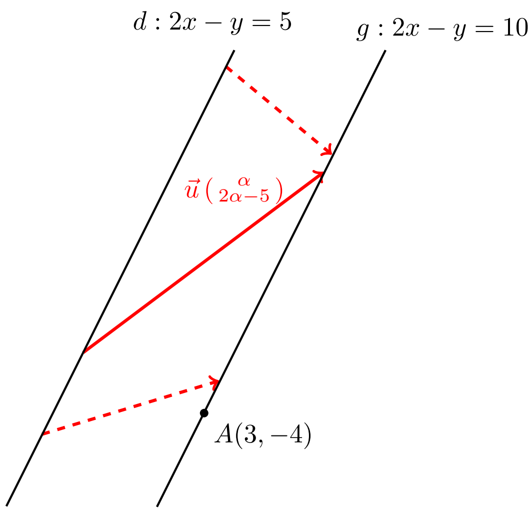
a. La droite d passe par le point $B(2, -1)$, si bien que la translatée de d par le vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right)$ est la parallèle à d passant par le point $t_{\vec{u}}(B)$, qui a pour coordonnées $(2 + \alpha, \beta - 1)$. Elle admet donc pour équation :

$$t_{\vec{u}}(d) : 2x - y = 2(2 + \alpha) - (\beta - 1) = 5 + 2\alpha - \beta.$$

Cette droite est égale à g si et seulement si elle passe par A, autrement dit, si et seulement si :

$$2 \cdot 3 - (-4) = 5 + 2\alpha - \beta \text{ c'est-à-dire } \beta = 2\alpha - 5.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ recherchés sont donc tous ceux dont les coordonnées sont du type $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\2\alpha-5\end{smallmatrix}\right)$.



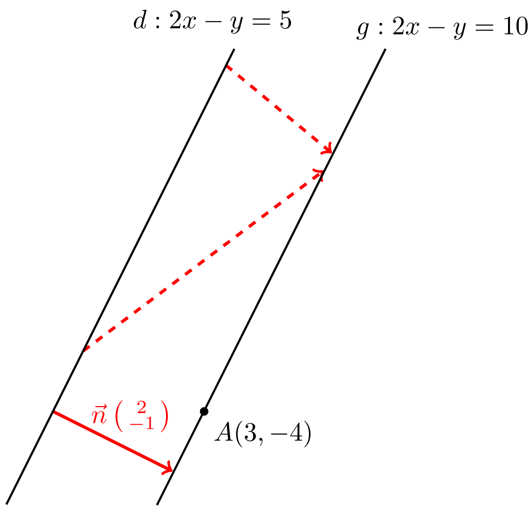
b. Donnons à présent plusieurs approches pour trouver parmi les vecteurs trouvés au a. celui de norme minimale. Si l'on raisonne purement analytiquement, le calcul de la norme du vecteur obtenu ci-dessus conduit, du fait que l'on travaille dans un repère orthonormé, à étudier la fonction trinôme :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha \to \alpha^2 + (2\alpha - 5)^2 = 5\alpha^2 - 20\alpha + 25 = 5(\alpha - 2)^2 + 5.$$

Celle-ci atteignant son minimum pour $\alpha = 2$, on voit que le vecteur le plus court qui répond à la question posée est celui de coordonnées $\binom{2}{-1}$ (qui a pour norme $\sqrt{5}$). Une approche plus géométrique consiste à constater que le vecteur le plus court est celui de direction orthogonale à d, c'est-à-dire celui qui est colinéaire à $\vec{n}\binom{2}{-1}$. Ceci conduit à chercher la valeur de α pour laquelle :

$$\begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 2\alpha - 5 & -1 \end{vmatrix} = 10 - 5\alpha = 0.$$

On obtient ainsi $\alpha = 2$ et on trouve de cette manière le vecteur $\vec{n}$ lui-même. Enfin, une dernière approche (toujours géométrique) consiste à prendre n'importe quel vecteur $\vec{u}$ vérifiant $t_{\vec{u}}(d) = g$, comme par exemple celui de coordonnées $\binom{0}{-5}$ (qui correspond à $\alpha = 0$) et à le projeter orthogonalement sur $\vec{n}$. Géométriquement, on voit bien qu'une telle opération conduit au vecteur le plus court qui répond à la question. On trouve bien sûr encore $\vec{n}\binom{2}{-1}$.



c. A nouveau, on peut imaginer plusieurs approches à cette question. Commençons par l'approche analytique. Notons (x_Ω, y_Ω) les coordonnées d'un point Ω du plan et écrivons l'expression analytique de l'homothétie $h_{\Omega,-1}$ dans le repère employé. Si $M(x', y')$ est l'image de $M(x, y)$ par cette homothétie, on a :

$$\begin{pmatrix} x' - x_\Omega \\ y' - y_\Omega \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix} \text{ ou encore } \begin{cases} x' = 2x_\Omega - x \\ y' = 2y_\Omega - y. \end{cases}$$

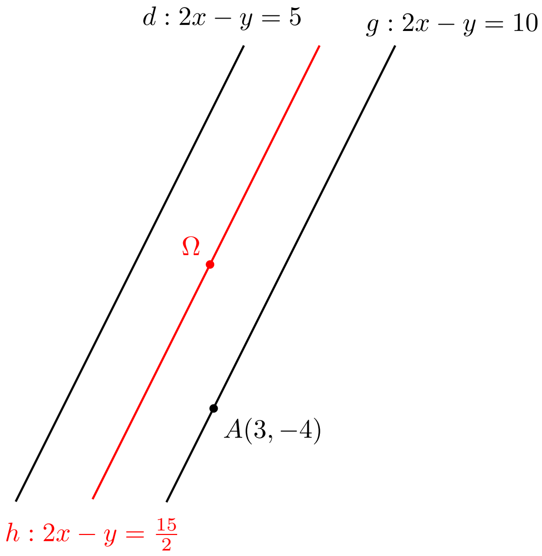
La droite $h_{\Omega,-1}(g)$ est donc la parallèle à g passant par le point de coordonnées $(2x_\Omega - 3, 2y_\Omega + 4)$ (image de A). Autrement dit, c'est la droite d'équation :

$$2x - y = 2(2x_\Omega - 3) - (2y_\Omega + 4) = 4x_\Omega - 2y_\Omega - 10$$

On voit alors que cette droite est égale à d si et seulement si :

$$4x_\Omega - 2y_\Omega - 10 = 5 \text{ ou encore } 2x_\Omega - y_\Omega = \tfrac{15}{2}.$$

Les points Ω vérifiant la condition donnée sont donc ceux situés sur la droite d'équation $2x - y = \frac{15}{2}$. Il s'agit de la droite située entre d et g, "au milieu" :



Terminons par une approche plus géométrique. Si Ω est un point du plan, alors on sait que $h_{\Omega,-1}(g)$ est la droite parallèle à g (et donc à d) passant par $h_{\Omega,-1}(A)$. La condition pour que cette droite soit égale à d est donc que le point $h_{\Omega,-1}(A)$ se trouve sur d. Or ce point n'est autre que le symétrique de A par la symétrie centrale de centre Ω. Autrement dit, la condition étudiée sur Ω est équivalente à dire que Ω est le milieu d'un segment joignant A à un point de d. L'ensemble de ces points milieux forment la droite $h_{A,\frac{1}{2}}(d)$, dont on peut alors vérifier qu'elle a bien pour équation $2x - y = \frac{15}{2}$.

Exercice 5. On donne un segment AB de longueur 4 et on note I le milieu de AB. On considère aussi une homothétie :

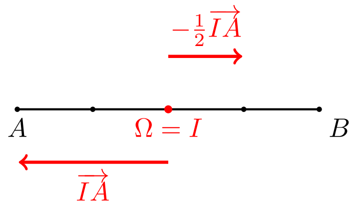
$$h = h_{\Omega,\alpha}$$

centrée en un point Ω et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

a. Trouver α sachant que $\Omega = I$ et $h(A)$ est le milieu de BI.
b. Trouver Ω sachant que $\alpha = 3$ et $h(A) = I$.
c. Trouver Ω et α sachant que $h(A) = B$ et que le segment joignant B à $h(B)$ est de longueur 6.

Solution:

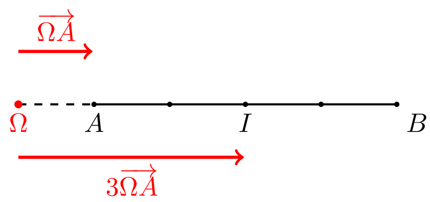
a. Notons J le milieu de BI. Comme $\Omega = I$ et $h(A) = J$, un coup d'oeil sur le dessin nous invite à penser que $\alpha = -\frac{1}{2}$.



Confirmons cela par un calcul :

$$\underbrace{\overrightarrow{IJ}}_{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}} = \alpha\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow (\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2})\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}.$$

b. De manière imagée, on cherche ici un point Ω tel qu'en "multipliant par 3" le point A vu depuis Ω on tombe sur I. Cherchons à le placer sur le dessin :



On a l'impression que le point Ω est le translaté de A par $\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. Confirmons cela par un calcul :

$$\underbrace{\overrightarrow{\Omega I}}_{\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{AI}} = 3\overrightarrow{\Omega A} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AI}}_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} = 2\overrightarrow{\Omega A} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}.$$

c. L'homothétie h envoie le vecteur $\overrightarrow{AB}$, sur le vecteur :

$$\overrightarrow{h(A)h(B)} = \overrightarrow{Bh(B)} = \alpha\overrightarrow{AB}.$$

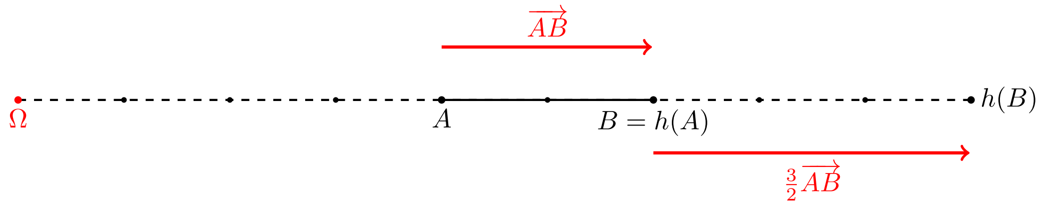
En prenant les normes dans cette égalité vectorielle, on obtient :

$$6 = 4\,|\alpha| \;\Leftrightarrow\; |\alpha| = \tfrac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \pm\tfrac{3}{2}.$$

Etudions séparément les deux cas. Tout d'abord, supposons que $\alpha = \frac{3}{2}$. Pour trouver le centre Ω, exprimons alors que A est envoyé sur B :

$$\underbrace{\overrightarrow{\Omega B}}_{\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{AB}} = \tfrac{3}{2}\overrightarrow{\Omega A} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\Omega A} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = 2\overrightarrow{BA}.$$

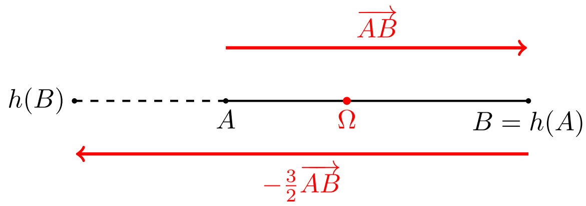
Ce cas correspond au dessin suivant :



Supposons maintenant que $\alpha = -\frac{3}{2}$. Pour trouver le centre Ω, exprimons que A est envoyé sur B :

$$\underbrace{\overrightarrow{\Omega B}}_{\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{AB}} = -\tfrac{3}{2}\overrightarrow{\Omega A} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -\tfrac{5}{2}\overrightarrow{\Omega A} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \tfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Ce cas correspond au dessin suivant :



Exercice 6. Sur une feuille de papier, placer trois points A, B, C non-alignés. Pour chacune des transformations suivantes, donner sa nature ainsi que ses éléments caractéristiques, et placer sur le dessin les images de A, B et C :

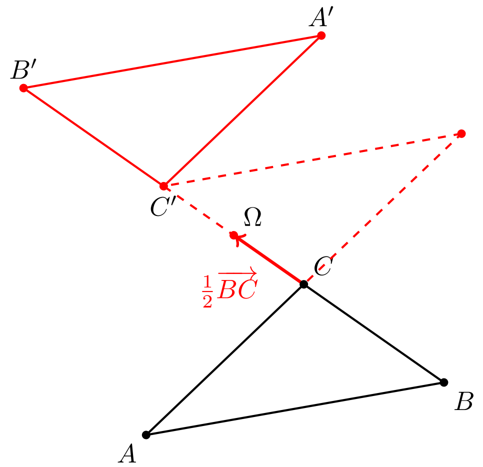
a. $t_{\overrightarrow{BC}} \circ h_{C,-1}$ b. $h_{A,\frac{1}{2}} \circ h_{B,3}$ c. $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}} \circ h_{A,-\frac{1}{2}} \circ h_{C,-2}$

Solution:

a. On sait par avance que la composée $t_{\overrightarrow{BC}} \circ h_{C,-1}$ est une homothétie de rapport -1. Par conséquent, son centre est donné par le milieu de n'importe quel segment joignant un point à son image. Calculons par exemple l'image de C :

$$(t_{\overrightarrow{BC}} \circ h_{C,-1})(C) = t_{\overrightarrow{BC}}(C) = \text{ translaté de } C \text{ par } \overrightarrow{BC}.$$

Le centre Ω est donc le translaté de C par $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Les images de A et B sont données sur la figure ci-dessous (en pointillé on fait apparaitre l'image du triangle ABC par la première transformation appliquée, à savoir $h_{C,-1}$) :



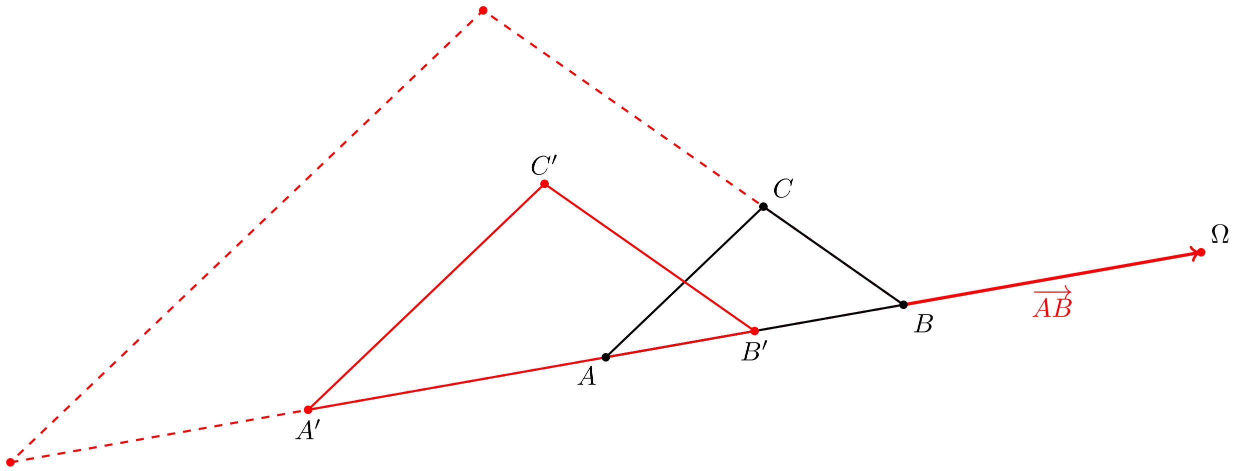
b. On sait par avance que la composée $h_{A,\frac{1}{2}} \circ h_{B,3}$ est une homothétie de rapport $\frac{3}{2}$. Pour rechercher son centre, calculons par exemple l'image du point B.

$$B' = (h_{A,\frac{1}{2}} \circ h_{B,3})(B) = h_{A,\frac{1}{2}}(B) = \text{ milieu du segment } AB.$$

Par conséquent, le centre Ω vérifie :

$$\overrightarrow{\Omega B'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega B} \text{ ce qui entraine } \overrightarrow{B\Omega} = 2\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AB}.$$

Autrement dit, Ω est le translaté de B par le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On obtient la figure suivante (en pointillé on fait appraitre l'image du triangle ABC par la première transformation appliquée, à savoir $h_{B,3}$) :



c. On sait par avance que la composée $h_{A,-\frac{1}{2}} \circ h_{C,-2}$ est une translation (car le produit des facteurs des homothéties que l'on compose vaut 1). Pour trouver le vecteur de cette translation, calculons par exemple l'image de C :

$$(h_{A,-\frac{1}{2}} \circ h_{C,-2})(C) = h_{A,-\frac{1}{2}}(C) = \text{ translaté de } A \text{ par } -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \text{ translaté de } C \text{ par } \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}.$$

Par conséquent, la composée $h_{A,-\frac{1}{2}} \circ h_{C,-2}$ est la translation de vecteur $\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$. On en déduit alors que la composée étudiée ici, à savoir $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}} \circ h_{A,-\frac{1}{2}} \circ h_{C,-2}$, est la translation de vecteur $\frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$. Voici sur une figure les images de A, B et C par cette transformation (en pointillé on fait apparaitre les images "intermédiaires" du triangle ABC) :