Série 6

Exercice 1. Dans le plan muni d'un repère, on donne :

$$A(0,3), \qquad d : x + 3y = 7 \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

a. Trouver un vecteur directeur de d. Est-ce que A appartient à g ?

b. Déterminer une équation cartésienne de la parallèle à g passant par A.

c. Identifier l'intersection de d et g.

Solution: Avant de résoudre les questions proposées, rappelons le lien entre la description numérique d'une droite par équation dans un repère et sa description géométrique par position/direction.

$$\text{équation cartésienne } d : ax + by = c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{position } A(x_A, y_A) \text{ avec } ax_A + by_A = c \text{ (solution particulière)} \\ \text{direction } \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ avec } a\alpha + b\beta = 0 \text{ (solution de l'équation homogène)} \end{cases}$$

$$\text{équation paramétrique } d : \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{position } A(x_A, y_A) \text{ (correspond à } t = 0) \\ \text{direction } \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ (coefficients devant le paramètre)}. \end{cases}$$

a. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{v}$ du plan, on sait que :

$$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ directeur de } d \quad \Leftrightarrow \quad x + 3y = 0 \text{ (équation homogène associée à celle de } d).$$

Voici quelques exemples de telles solutions homogènes :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ldots$$

Le point A appartient à la droite g si et seulement si le système suivant possède une solution :

$$\begin{cases} 0 = 2 + t \\ 3 = -1 - t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -2 \\ t = -4. \end{cases}$$

Comme les deux équations sont incompatibles, on voit que A n'appartient pas à g (le point courant correspondant au paramétrage proposé de g ne passe pas par A car il n'y a pas de "temps de passage" correspondant).

b. Appelons h la droite étudié ici. Elle passe par $A(0,3)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (vecteur directeur de } g).$$

On trouve qu'elle admet donc pour équation :

$$h : x + y = 3.$$

Rappelons différentes manières de trouver une telle équation. L'équation homogène associée devant être satisfaite par les coordonnées de $\overrightarrow{v}$, on est amené à considérer la partie variable $x + y$ (ou tout multiple scalaire de celle-ci, comme $2x + 2y, -x - y, \ldots$). On obtient alors la partie constante en évaluant au point A (on trouve donc $0 + 3 = 3$). Une autre méthode consiste à calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ y - 3 & -1 \end{vmatrix} = -x - y + 3$$

dont la nullité signifie exactement que le vecteur joignant $A(0,3)$ à $M(x,y)$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$, ou autrement dit que le point M se trouve sur la droite étudiée. Enfin, une dernière option consiste à écrire des équations paramétriques pour la droite étudiée puis à éliminer le paramètre (ici en additionnant les deux équations) :

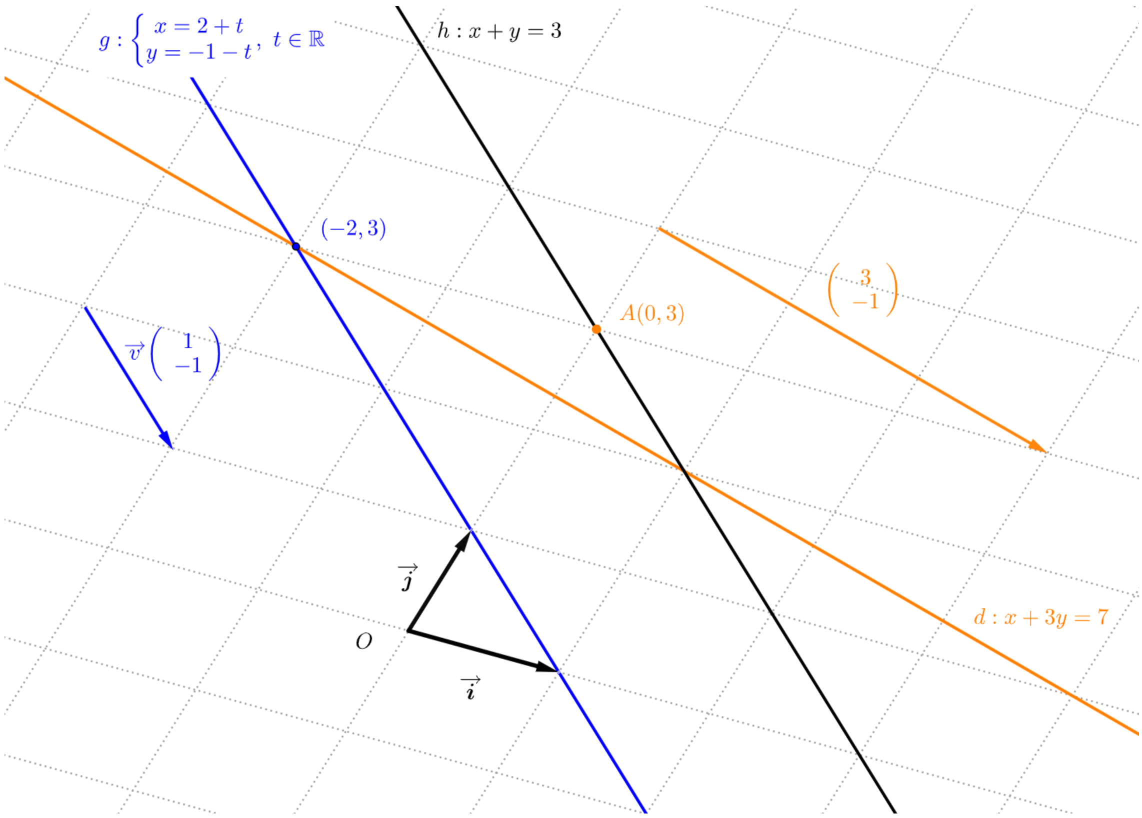
$$h : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}. \quad \Leftrightarrow \quad h : x + y = 3.$$

c. Dans le paramétrage donné de g, cherchons la (ou les) valeur(s) du paramètre t correspondant à un point de d ("temps de passage" du point courant à un point de l'intersection) :

$$(2+t)+3(-1-t)=7 \quad \Leftrightarrow \quad t=-4.$$

Il y a donc un unique point d'intersection, à savoir celui de coordonnées $(-2,3)$.

Voici une figure représentant les différents objets géométriques étudiés dans cet exercice :



Exercice 2. On fixe un repère du plan. Combien de droites différentes sont décrites par les équations suivantes ?

$$\begin{cases} x = 5+2t \\ y = -3-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \qquad 2x+4y+2=0, \qquad \begin{cases} x = -5-\sqrt{3}t \\ y = 2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

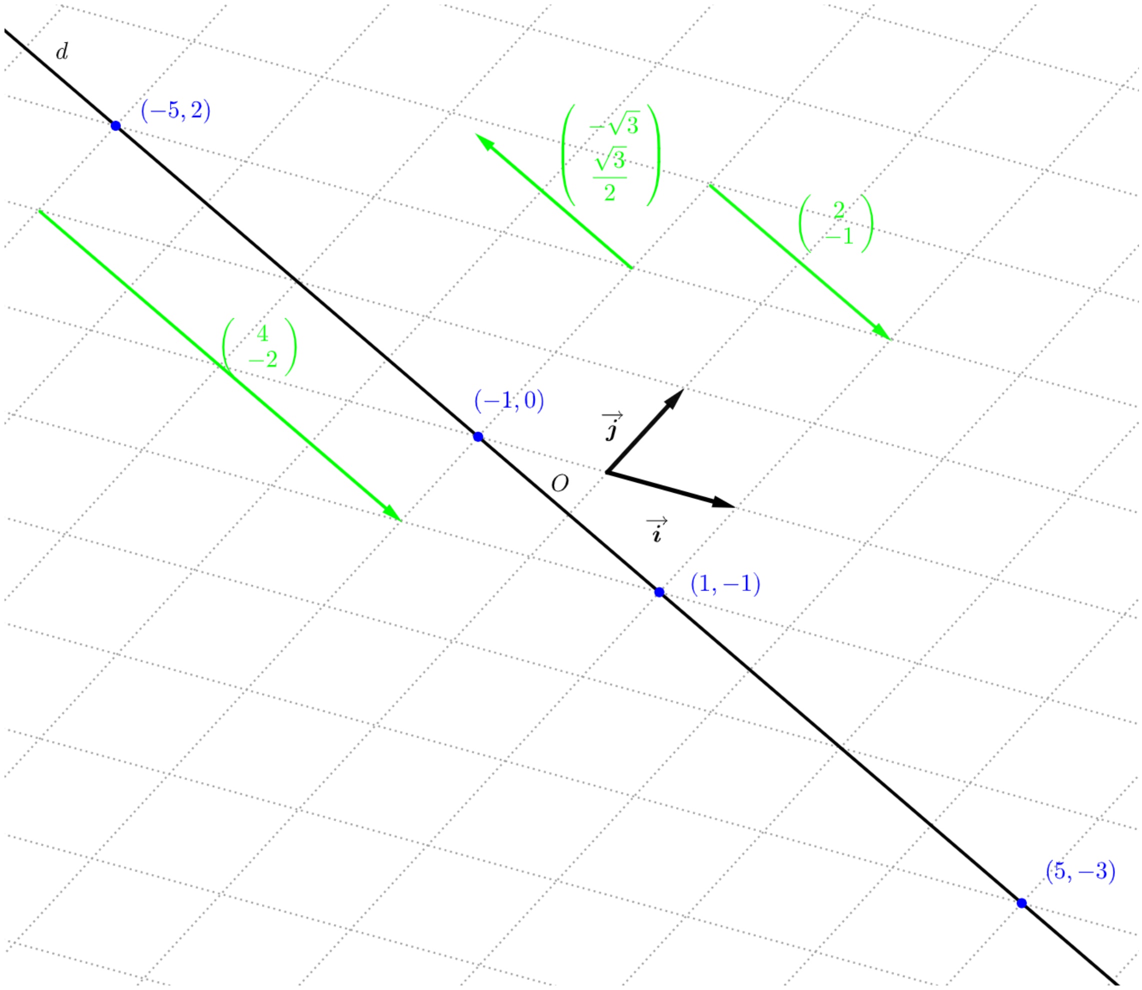
Solution: Contrairement aux apparences, ces trois équations représentent en fait la même droite. Pour le voir, commençons par établir qu'elles ont la même direction, en extrayant des vecteurs directeurs à partir des équations proposées. On trouve respectivement :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{solution de } 2x+4y=0} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs étant colinéaires, on peut conclure que nos trois droites ont la même direction. Pour montrer qu'elles sont égales, il reste à voir qu'elle partagent un point commun. Prenons par exemple le point de coordonnées $(-5,2)$, qui appartient à la troisième droite (où il correspond à $t=0$). On constate alors qu'il appartient aussi à la première et la deuxième, puisque :

$$\begin{cases} -5 = 5+2\cdot(-5) \\ 2 = -3-(-5) \end{cases} \quad \text{et} \quad 2\cdot(-5)+4\cdot 2+2=0\,.$$

On a bien montré que les trois droites décrites ont la même direction et la même position : elles sont donc bien égales. Voici un dessin représentant la situation étudiée ici :



Remarque : une autre possibilité pour résoudre cet exercice est de raisonner sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, montrer l'égalité des deux premières droites revient à établir que $A = B$, où :

$$A = \{(5+2t, -3-t)\,,\ t \in \mathbb{R}\} \ \text{ et } \ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x+4y+2=0\}\,.$$

Raisonnons pour cela par double implication. Pour voir que A est inclus dans B il suffit de constater que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \underbrace{2(5+2t)+4(-3-t)+2}_{10+4t-12-4t+2} = 0\,.$$

Pour montrer que B est inclus dans A, donnons-nous un (x,y) appartenant à B, et cherchons t tel que :

$$\begin{cases} 5+2t = x \\ -3-t = y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} t = \dfrac{x-5}{2} \\ t = -3-y\,. \end{cases}$$

Vérifions que les deux valeurs de t obtenues sont en fait les mêmes :

$$\frac{x-5}{2} = -3-y \quad\Leftrightarrow\quad x-5 = -6-2y \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{x+2y+1=0}_{\text{bien vérifié car } (x,y)\in B}\,.$$

Cela montre que (x,y) a la forme typique d'un élément de A : il appartient bien à A.

Exercice 3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne :

$$A(1,-2), \quad B(5,7) \quad \text{et} \quad d : x+3y=5.$$

a. Calculer la distance de A à d. Les points A et B sont-ils du même côté de d ?

b. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à d passant par B.

c. Quel est l'angle orienté que fait d avec l'axe des abscisses ?

Solution:

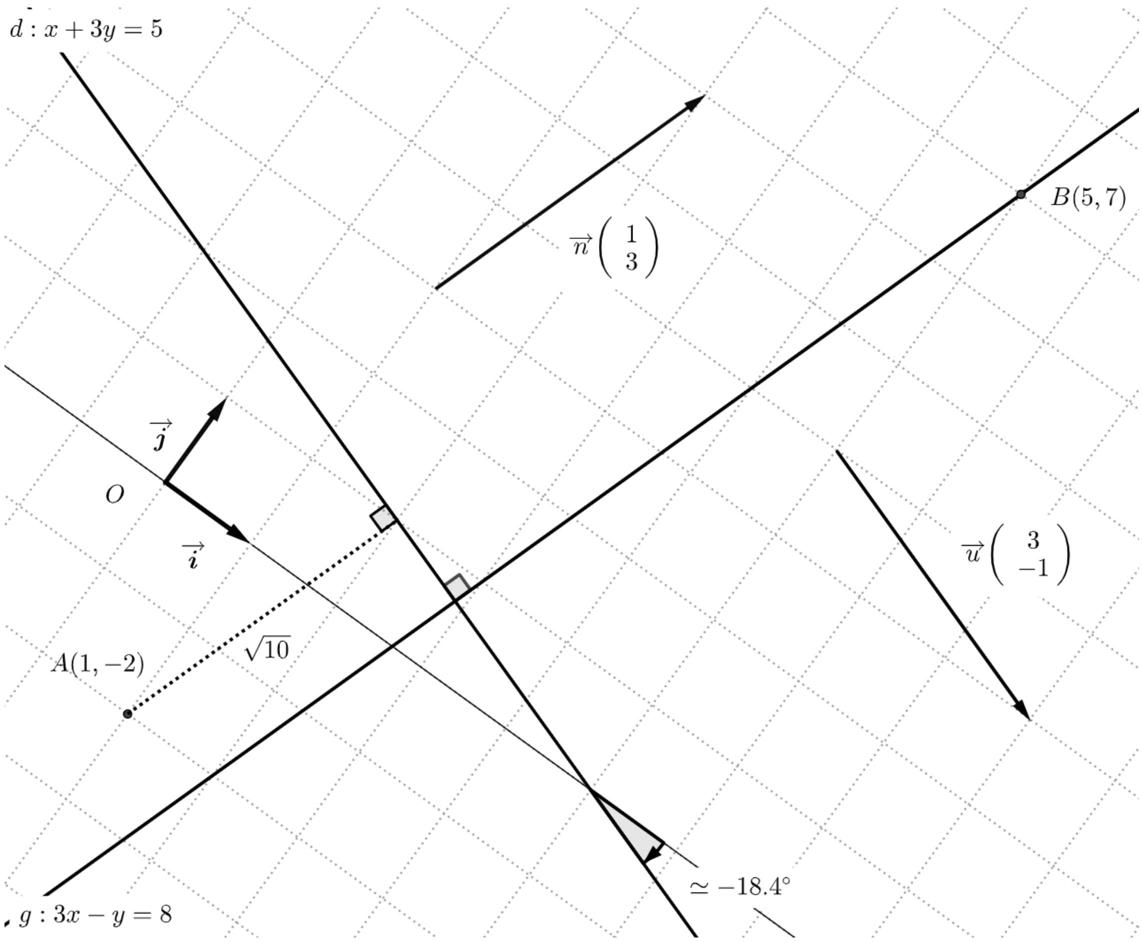
a. Appelons δ cette distance. Puisque le repère employé est orthonormé, on sait que :

$$\delta = \frac{|1 + 3 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}.$$

Par ailleurs, les points A et B ne sont pas du même côté de d, car :

$$1 + 3 \cdot (-2) = -5 < 5 \quad \text{et} \quad 5 + 3 \cdot 7 = 26 > 5.$$

Voici un dessin représentant la situation étudiée dans cet exercice :



b. Appelons g la perpendiculaire à d passant par B. La droite d admet pour vecteur normal :

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est donc directeur de la droite g, si bien que celle-ci admet une équation du type :

$$g : \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 3 \end{vmatrix} = 3x - y = \text{cte} .$$

On calcule alors la constante en utilisant que B appartient à g. On trouve :

$$g : 3x - y = 3 \cdot 5 - 7 = 8 .$$

Une autre méthode consiste à choisir un vecteur directeur de d, comme par exemple :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(solution de l'équation homogène $x + 3y = 0$) et à utiliser le fait que c'est un vecteur normal de g. Comme le repère est orthonormé, on retrouve bien que g admet pour équation :

$$g : 3x - y = 8$$

c. Ecrivons l'équation de d sous forme réduite :

$$x + 3y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} .$$

Comme le repère utilisé est orthonormé direct, on sait d'après le cours que l'angle $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ recherché vérifie :

$$\tan\theta = -\tfrac{1}{3} .$$

On trouve alors $\theta \simeq -18.4°$.

Exercice 4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne :

$$A(9,3),\ B(1,-3)\ \text{ et }\ C(-2,1).$$

a. Déterminer des équations paramétriques de la hauteur issue de B.

b. Donner une équation cartésienne de la bissectrice au sommet B.

c. Calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution:

a. On connait déjà un point sur la hauteur issue de B, à savoir B lui même. Afin d'écrire des équations paramétriques de cette hauteur, il ne reste donc plus qu'à en trouver un vecteur directeur. Pour cela, considérons le vecteur :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-11\\-2\end{pmatrix}.$$

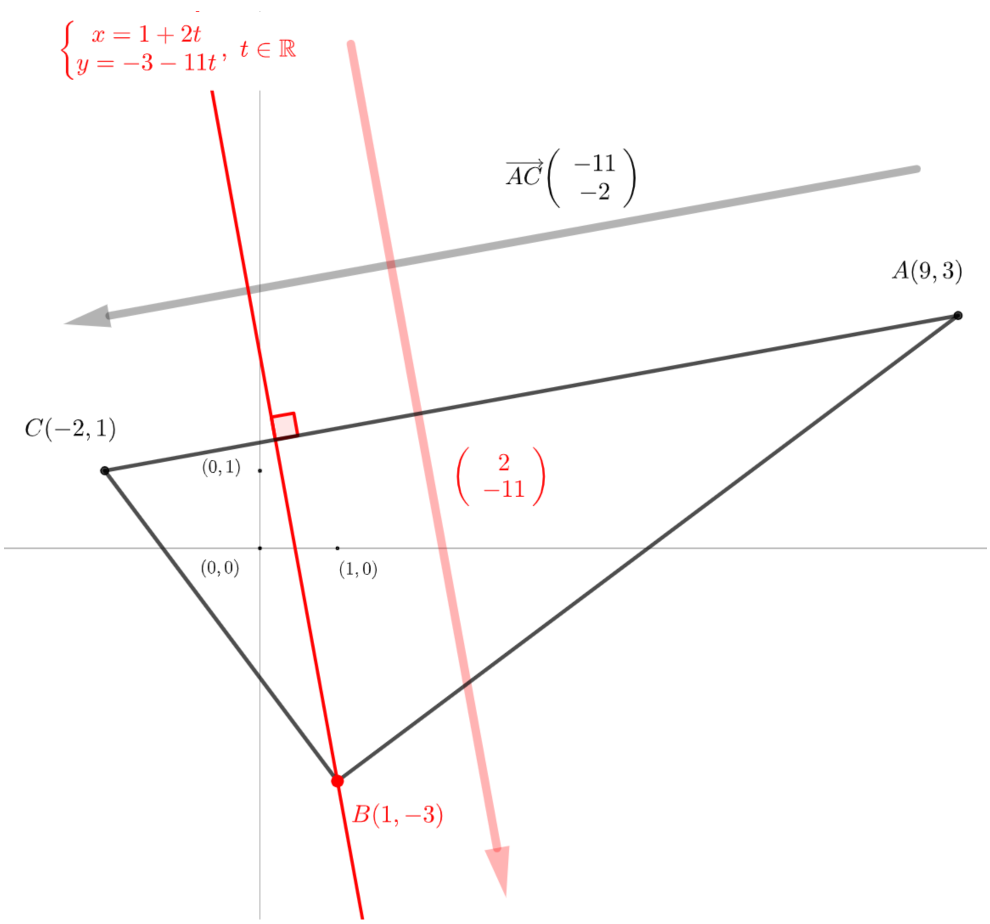
Il est normal à la hauteur issue de B, si bien que le vecteur de coordonnées :

$$\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix},$$

obtenu en tournant $\overrightarrow{AC}$ de $\frac{\pi}{2}$ en est directeur. Au final, on trouve donc les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases}x = 1+2t\\ y=-3-11t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Voyons cela sur un dessin :



b. Comme le repère employé est orthonormé, on a :

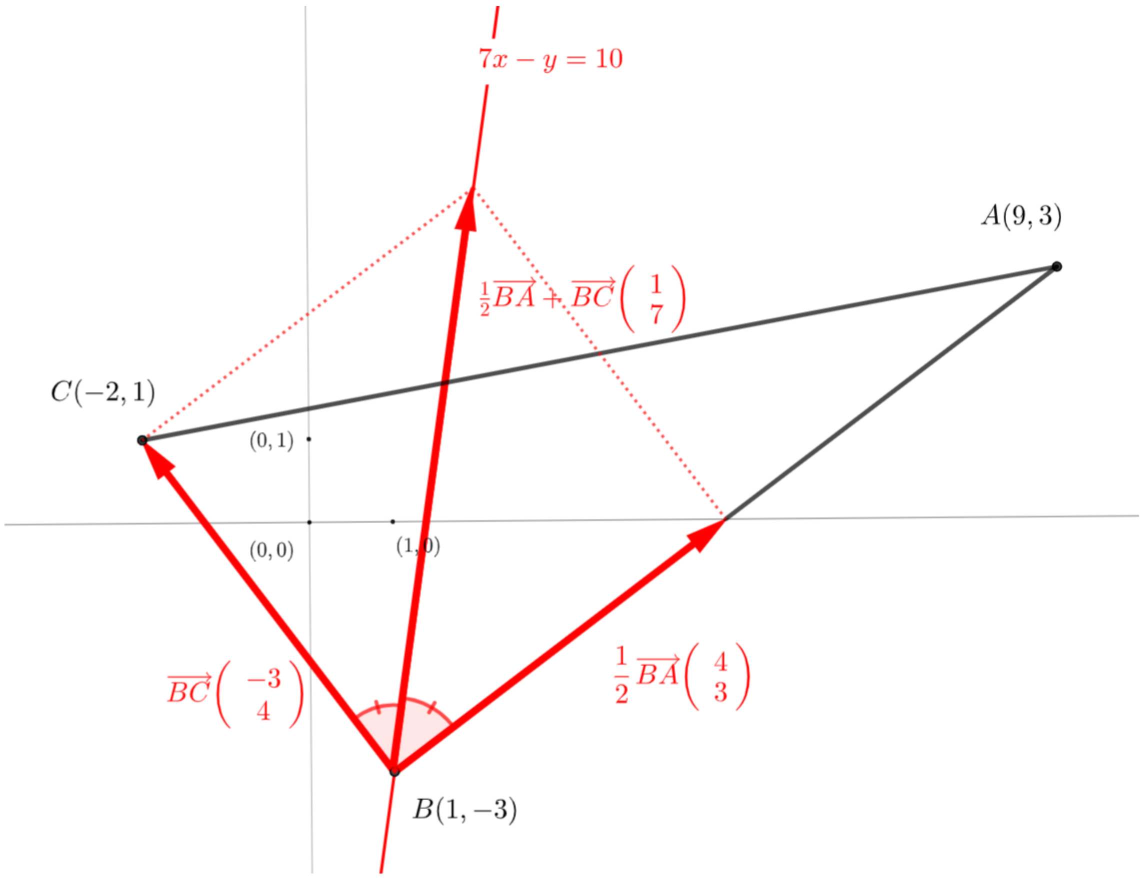
$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Pour créer un vecteur directeur de la bissectrice au sommet B, on commence par "rééquilibrer" $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ (sans changer leur sens) pour les rendre de même longueur, puis on les additionne. Par exemple, le premier vecteur étant 2 fois plus long que le deuxième, on voit que le vecteur :

$$\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC},\ \text{ qui a pour coordonnées } \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$$

est directeur de la bissectrice au sommet B. Celle-ci admet donc pour équation cartésienne :

$$7x - y = 10.$$



Il y a plusieurs manière de "rééquilibrer" les vecteurs. Par exemple, on peut commencer par les rendre tous les deux unitaires (c'est-à-dire de norme 1), puis les additionner. De cette manière on obtient le vecteur :

$$\tfrac{1}{10}\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}, \text{ qui a pour coordonnées } \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$$

qui est (heureusement) colinéaire à celui trouvé plus haut.

c. Le centre du cercle circonscrit se trouve à l'intersection des médiatrices du triangle ABC. Pour trouver ses coordonnées, on peut donc identifier deux médiatrices et les intersecter. La médiatrice du segment AB passe par le milieu de AB, qui a pour coordonnées $(5,0)$ et est normale au vecteur :

$$\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}, \text{ qui a pour coordonnées } \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}.$$

Elle a donc pour équation :

$$4x + 3y = 20.$$

La médiatrice du segment BC passe quant à elle par le milieu de BC, qui a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, -1)$ et est normale au vecteur :

$$\overrightarrow{CB}, \text{ qui a pour coordonnées } \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}.$$

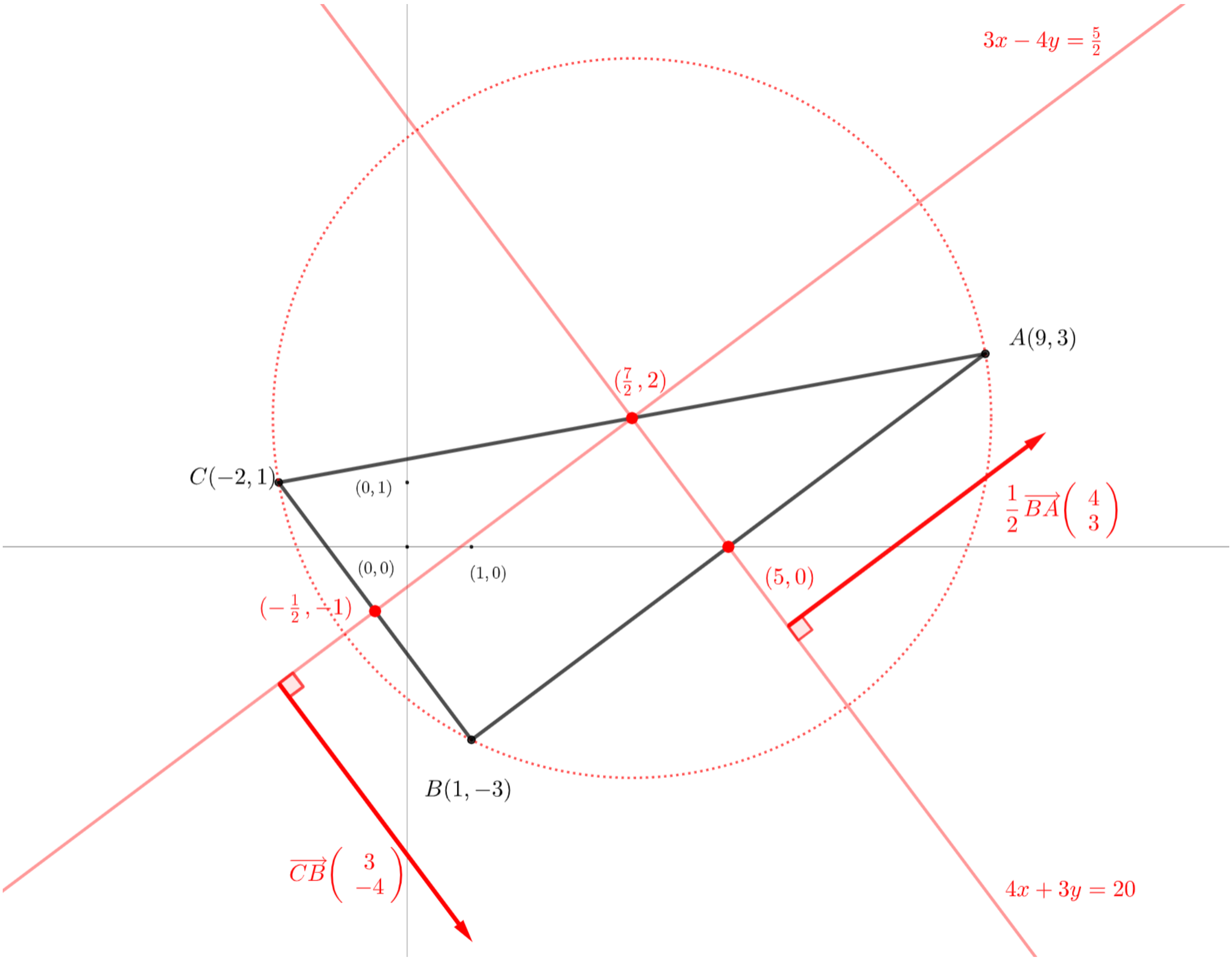
Elle a donc pour équation :

$$3x - 4y = \frac{5}{2}.$$

Les coordonnées du centre du cercle circonscrit à ABC sont donc les solutions du système :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 20 \\ 3x - 4y = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{20-4x}{3} \\ 3x - 4(\dfrac{20-4x}{3}) = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{20-4x}{3} \\ 25x = \dfrac{175}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \dfrac{7}{2} \end{cases}.$$

Le centre du cercle circonscrit à ABC a donc pour coordonnées $(\frac{7}{2}, 2)$. Voici une figure illustrant le raisonnement précédent :



Sur le dessin, il semble que le centre du cercle circonscrit est situé au milieu du segment AC. On peut par exemple le vérifier par un calcul :

$$(\frac{9-2}{2}, \frac{3+1}{2}) = (\frac{7}{2}, 2).$$

Cette propriété a lieu du fait que le triangle ABC est rectangle en B (le centre du cercle circonscrit est alors toujours le milieu de l'hypothénuse).

Exercice 5. Dans le plan, on donne un triangle ABC quelconque ainsi que les points I et J vérifiant :

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JA} = -3\overrightarrow{JC}.$$

a. Placer les données sur un dessin.

b. Soit d la droite d'équation $6x + 4y = 3$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Montrer que $d = (IJ)$.

c. Donner des équations paramétriques et cartésiennes de d dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

Solution:

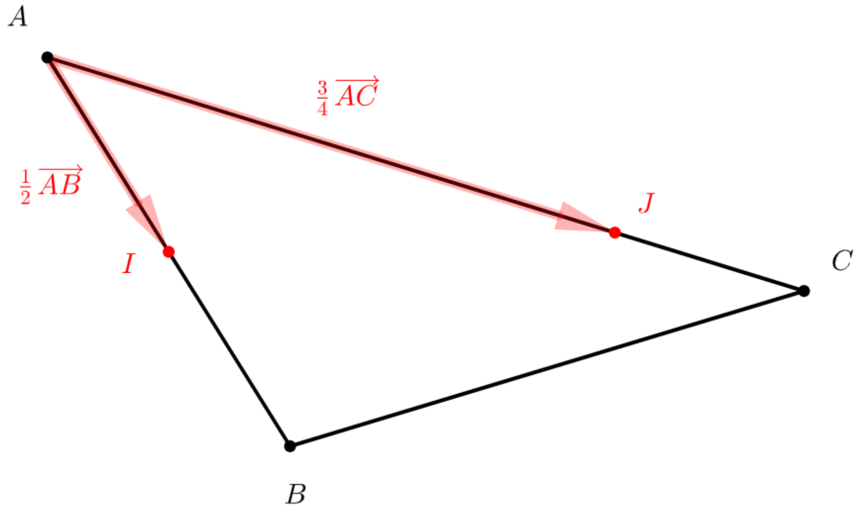
a. Retravaillons les expressions données afin de localiser plus facilement les points I et J :

$$\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{BI}}_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AI} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

On en déduit que I est en fait le milieu du segment AB. On trouve aussi :

$$\overrightarrow{JA} = -3 \underbrace{\overrightarrow{JC}}_{\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}} \quad \Leftrightarrow \quad 4\overrightarrow{JA} = -3\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AJ} = \tfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

Le point J est donc obtenu en translatant A par le vecteur $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

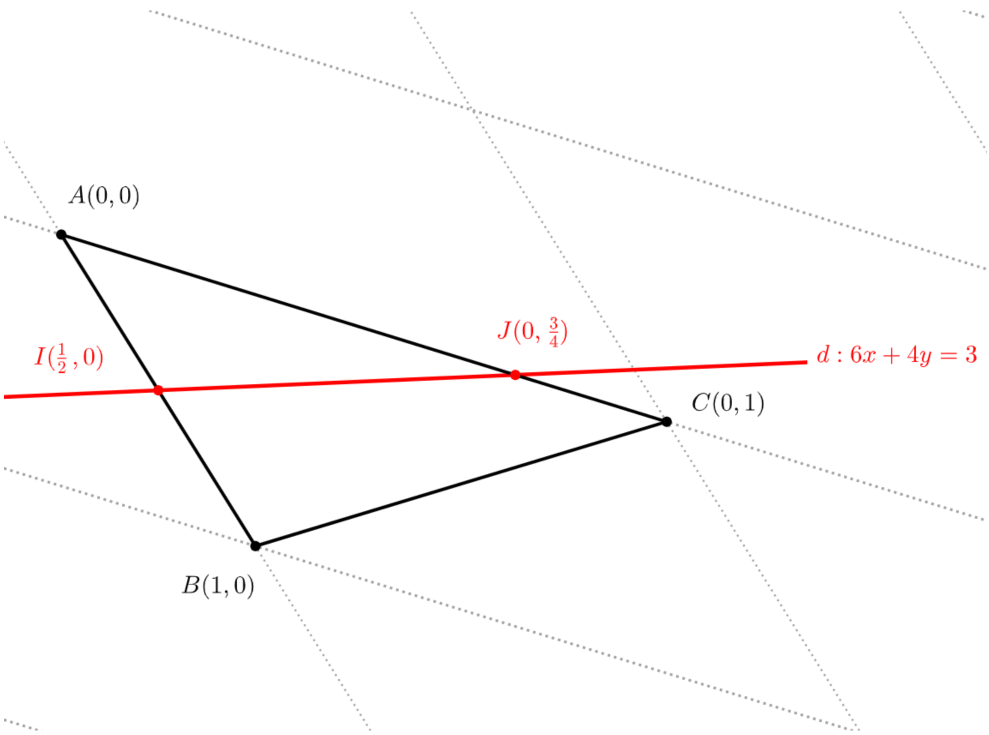


b. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, le point I a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$, car :

$$\overrightarrow{AI} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

et le point J a pour coordonnées $(0, \frac{3}{4})$, car, d'après ce qu'on trouvé en a., on a :

$$\overrightarrow{AJ} = \tfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$



Pour montrer que $d = (IJ)$ il n'y a alors plus qu'à constater que les coordonnées de I et de J satisfont bien l'équation de d :

$$6 \cdot \tfrac{1}{2} + 4 \cdot 0 = 3 \quad \text{et} \quad 6 \cdot 0 + 4 \cdot \tfrac{3}{4} = 3.$$

c. Dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, le point I a comme coordonnées $(0, \frac{1}{2})$, car :

$$\overrightarrow{BI} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

Pour trouver les coordonnées de J dans ce repère, exprimons le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Le point J a pour coordonnées $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, si bien que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées

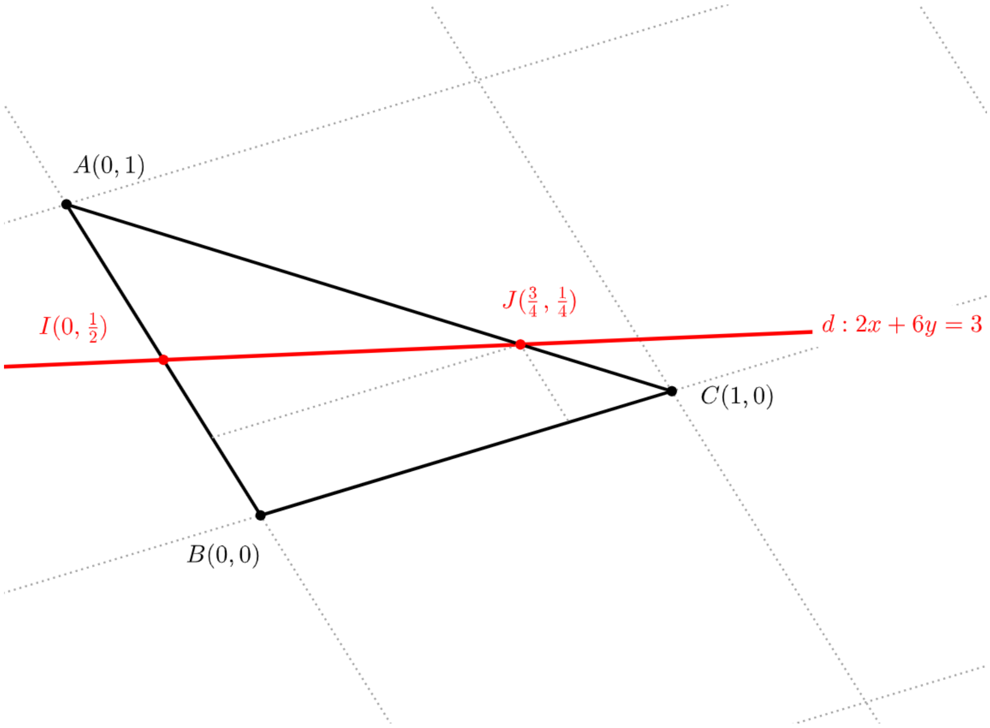
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la droite $d = (IJ)$ admet pour équation paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 3t \\ y = \dfrac{1}{2} - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Elle admet pour équation cartésienne :

$$d : x + 3y = \frac{3}{2} \ \text{ ou encore } \ 2x + 6y = 3.$$



Exercice 6. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne :

$$A(4, -1) \ \text{ et } \ B(-5, 2).$$

Existe-t-il une droite d passant par A et à distance $3\sqrt{2}$ de B ? Si oui, en donner une équation cartésienne.

Solution: Cherchons une telle droite par son équation cartésienne :

$$d : ax + by = c\,.$$

La condition que d passe par A se traduit par :

$$4a - b = c\,.$$

Sous cette condition, exprimons maintenant que B se trouve à distance $3\sqrt{2}$ de d. D'après la formule de la distance d'un point à une droite vue au cours (valable ici car le repère est orthonormé), on trouve :

$$\frac{|-5a + 2b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-9a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad |3a - b| = \sqrt{2a^2 + 2b^2}\,.$$

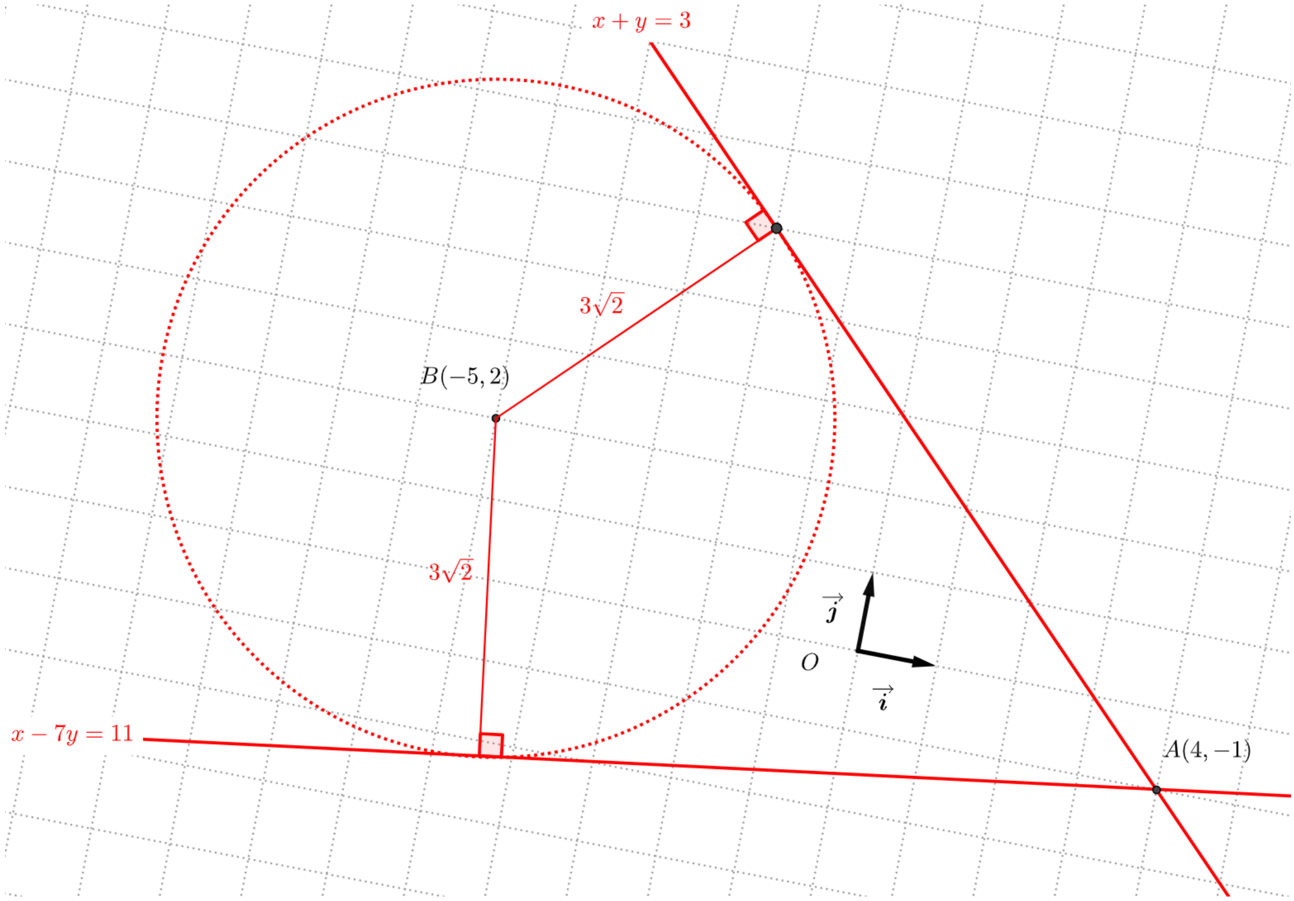
En élevant au carré, on trouve alors :

$$(3a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 7a^2 - 6ab - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (7a + b)(a - b) = 0\,.$$

Il y a deux droites solutions du problème posé, à savoir celles d'équations :

$$\underbrace{x + y = 3}_{b=a \text{ et } c=3a} \quad \text{et} \quad \underbrace{x - 7y = 11}_{b=-7a \text{ et } c=11a}$$

Voici un dessin représentant la situation étudiée dans cette exercice :

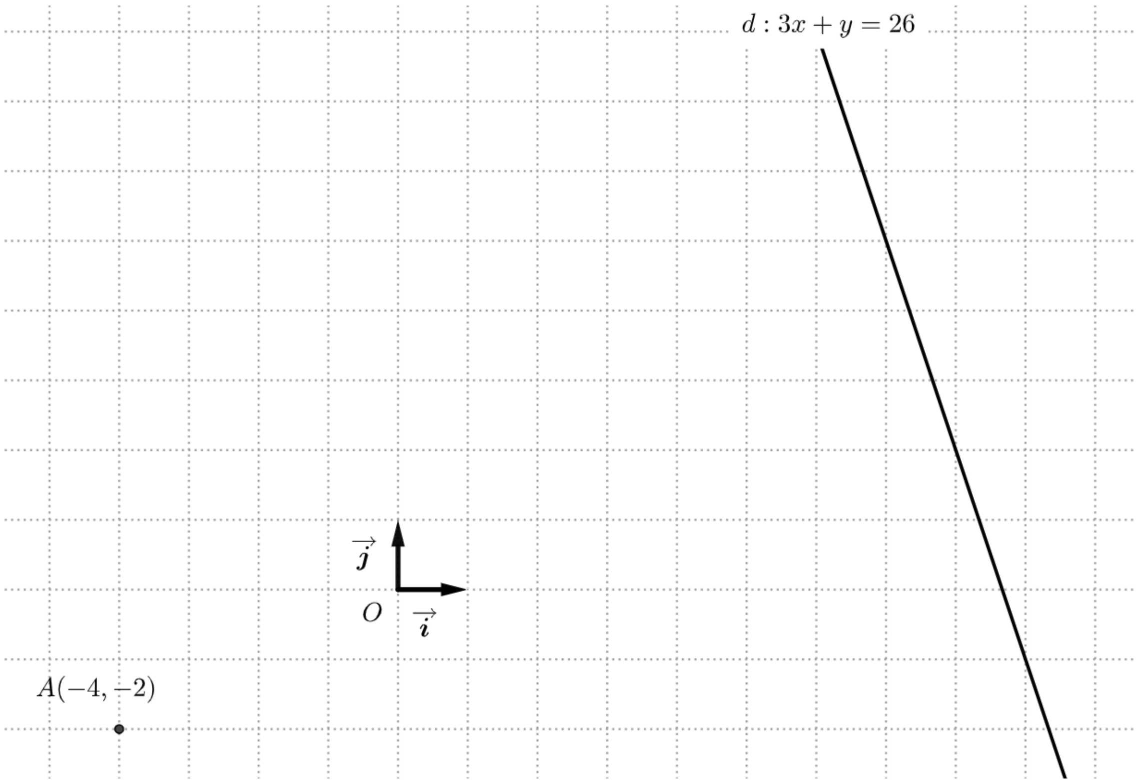


Exercice 7. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne :

$$A(-4,-2) \text{ et } d: 3x+y-26=0.$$

Trouver les coordonnées de B et C sachant que ABC est isocèle en B, d'aire 120 et que d est la hauteur issue de B. *Indication : faire un dessin. Que peut-on-dire de la perpendiculaire à d passant par A ?*

Solution: Pour commencer, plaçons les données sur un dessin :



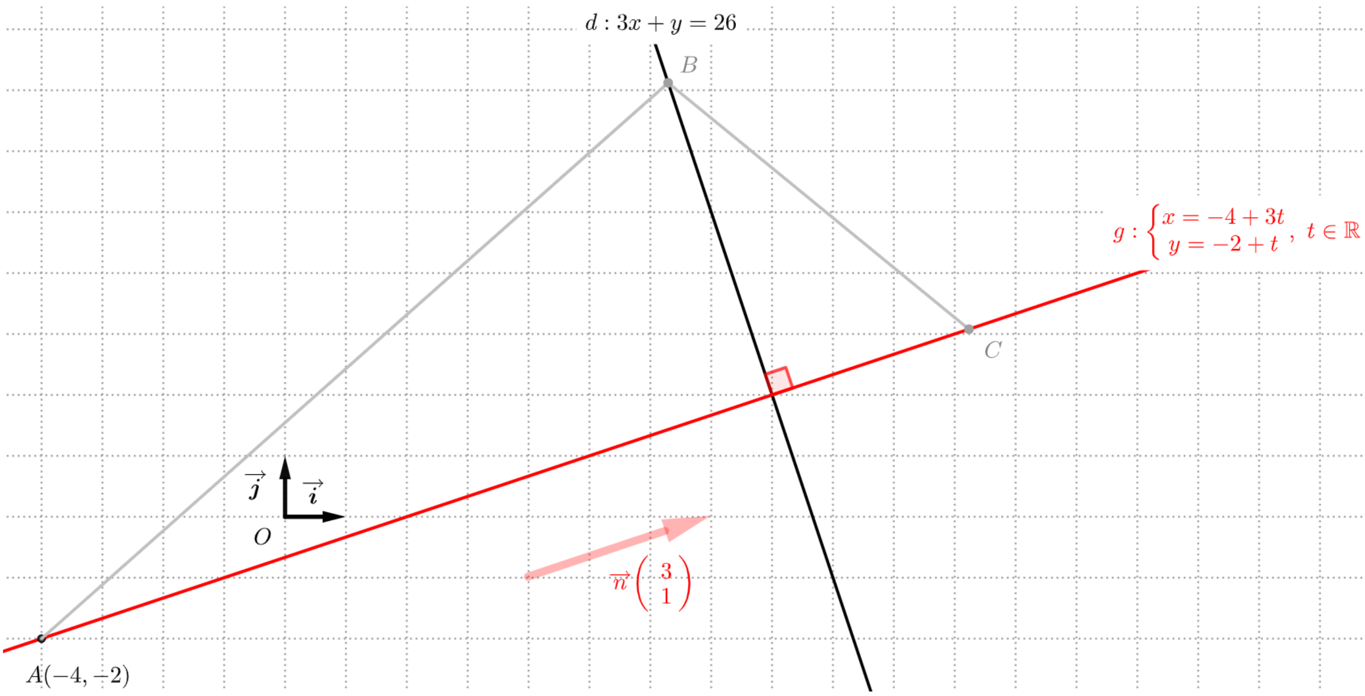
Il nous faut maintenant placer sur le dessin les points B et C satisfaisant les conditions données dans l'énoncé. Plutôt que de chercher à satisfaire ces trois conditions simultanément, on va les introduire l'une après l'autre, dans l'ordre suivant :

$$\underbrace{d \text{ est la hauteur issue de } B}_{\text{condition } (C_1)}, \quad \underbrace{ABC \text{ est isocèle en } B}_{\text{condition } (C_2)}, \quad \underbrace{ABC \text{ est d'aire } 120}_{\text{condition } (C_3)}.$$

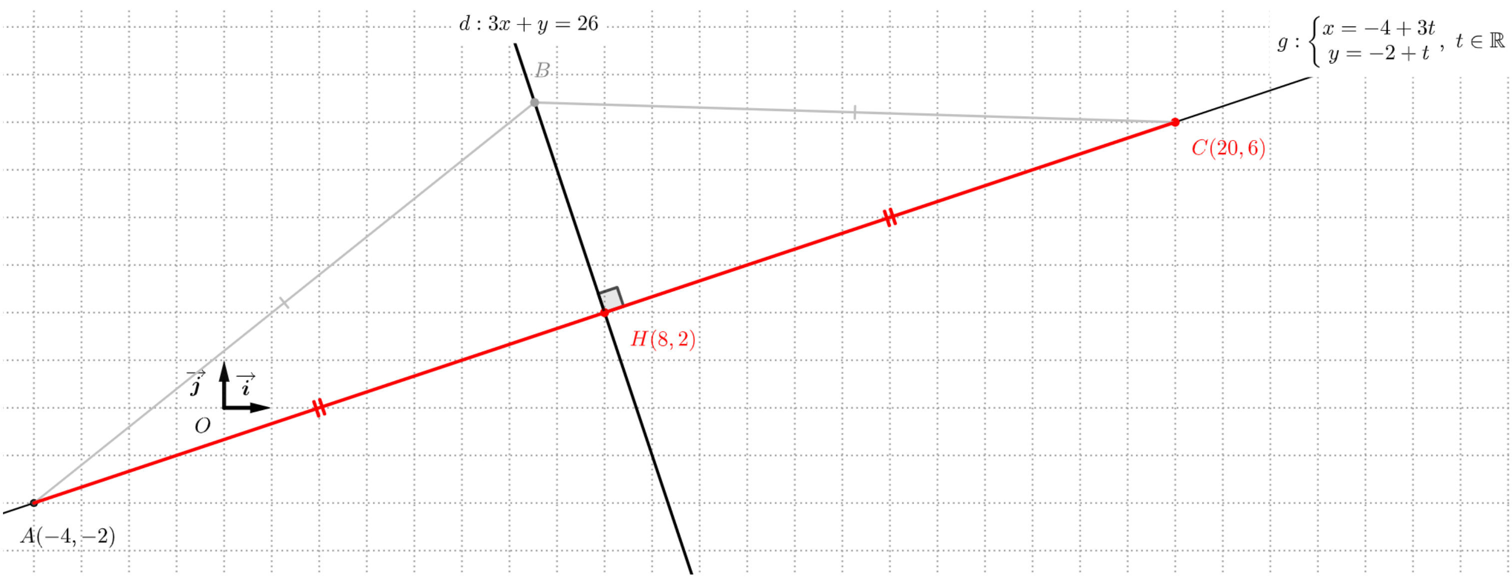
Pour satisfaire la condition (C_1), on doit placer B sur la droite d et C sur la droite g perpendiculaire à d passant par A, qui admet pour équations paramétriques :

$$g : \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -2 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

puisqu'elle passe par $A(-4, -2)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}\,\binom{3}{1}$ (qui est normal à d).



Dans cette configuration, cherchons maintenant à satisfaire la condition (C_2). Pour cela, il faut et il suffit que les segments AB et BC aient la même longueur. Autrement dit, que d soit la médiatrice de AC, ou encore que le point d'intersection H de d et g soit le milieu de AC.



Le point H étant à l'intersection de d et g, il correspond à la valeur du paramètre t satisfaisant :

$$3(-4 + 3t) + (-2 + t) - 26 = 0 = 10t - 40, \text{ autrement dit } t = 4.$$

On en déduit alors que H a pour coordonnées $(8, 2)$. Comme ce point est le milieu de AC, on a :

$$\begin{cases} \frac{x_C - 4}{2} = 8 \\ \frac{y_C - 2}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 20 \\ y_C = 6 \end{cases}$$

Le point C a donc pour coordonnées $(20, 6)$. Cherchons maintenant à satisfaire de plus la condition (C_3). D'après la formule vue au cours pour l'aire d'un triangle, on a, en notant $\mathcal{R}$ le repère employé (qui est orthonormé direct) :

$$ABC \text{ d'aire } 120 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}|\underbrace{\det_{\mathcal{R}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}_{\begin{vmatrix} x_B+4 & 24 \\ y_B+2 & 8 \end{vmatrix}}| = 120 \quad \Leftrightarrow \quad |8x_B - 24y_B - 16| = 240 \quad \Leftrightarrow \quad |x_B - 3y_B - 2| = 30.$$

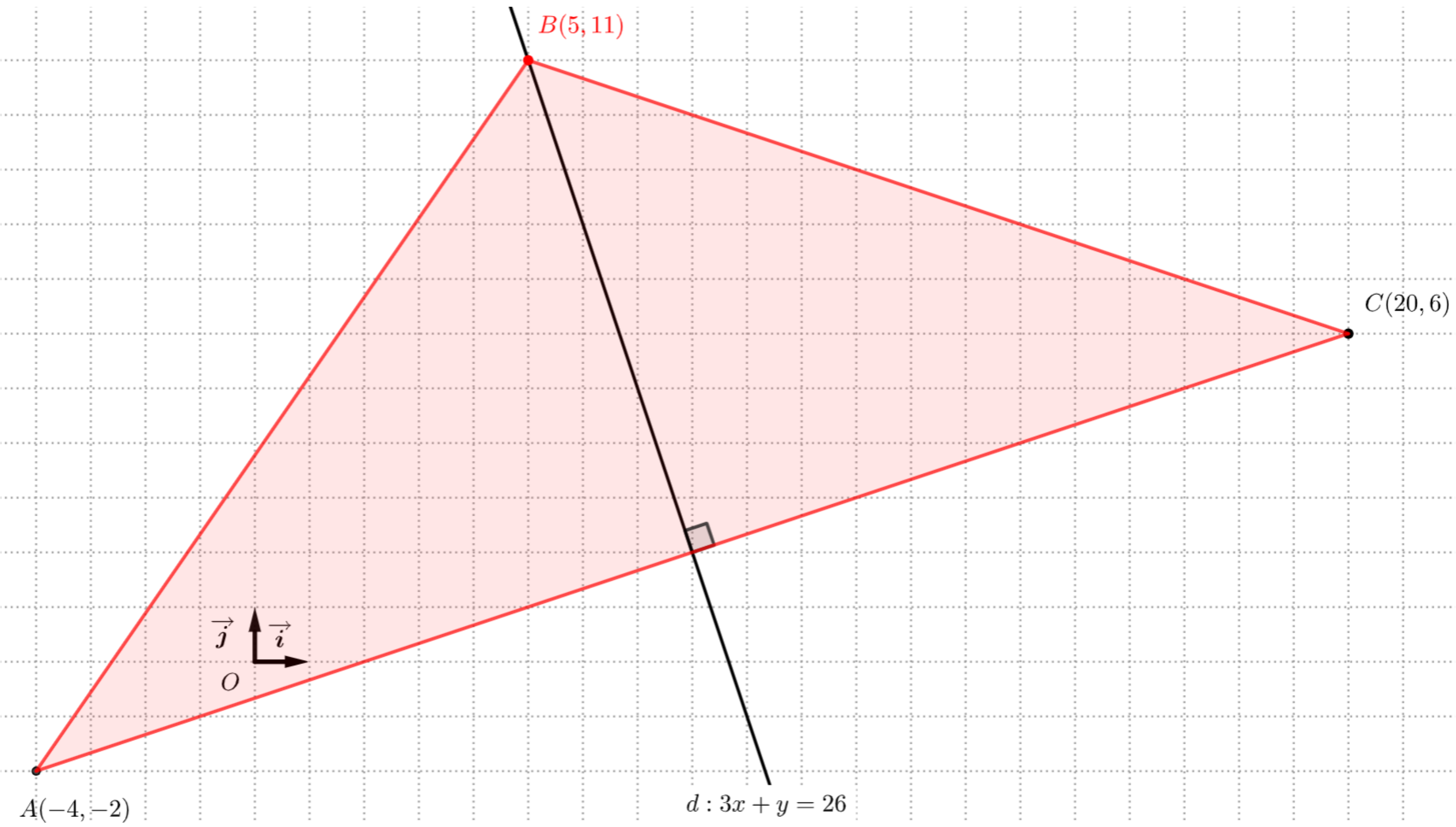
Comme B appartient à d, on a aussi :

$$y_B = 26 - 3x_B.$$

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$|10x_B - 80| = 30\,, \quad \text{ou encore} \quad |x_B - 8| = 3.$$

On trouve finalement $x_B = 5$ ou $x_B = 11$, ce qui conduit à deux points B possibles : $B(5, 11)$ ou $B(11, -7)$. Voici le dessin pour le premier cas (le deuxième est symétrique par rapport à g) :

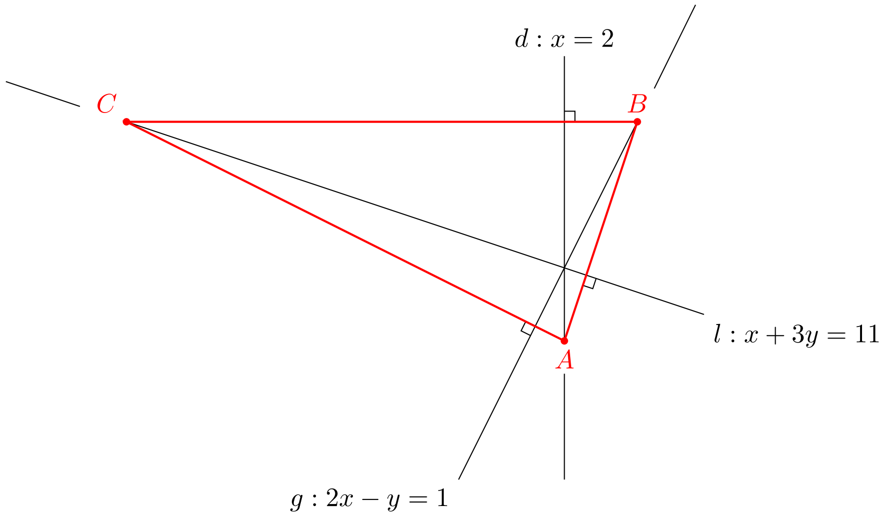


Exercice 8. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne les droites :

$$d : x = 2, \; g : 2x - y = 1 \text{ et } l : x + 3y = 11.$$

Trouver les coordonnées des sommets d'un triangle ABC d'aire $\frac{21}{2}$ tel que d est la hauteur issue de A, g celle issue de B et l celle issue de C. *Indication : exprimer les coordonnées de A, puis celles de B et C en fonction d'un seul paramètre.*

Solution: Figure d'étude :



Le point A a des coordonnées de la forme $(2, t)$ car il est sur la droite d d'équation cartésienne $x = 2$. Cherchons alors les coordonnées de B en fonction de t. Pour cela, observons tout d'abord que B se trouve sur la droite g (puisque cette droite est la hauteur issue de B). De plus, la droite (AB) est perpendiculaire à l, puisque l est la hauteur issue de C. Autrement dit, B se trouve sur la perpendiculaire à l passant par A, qui admet pour équations paramétriques :

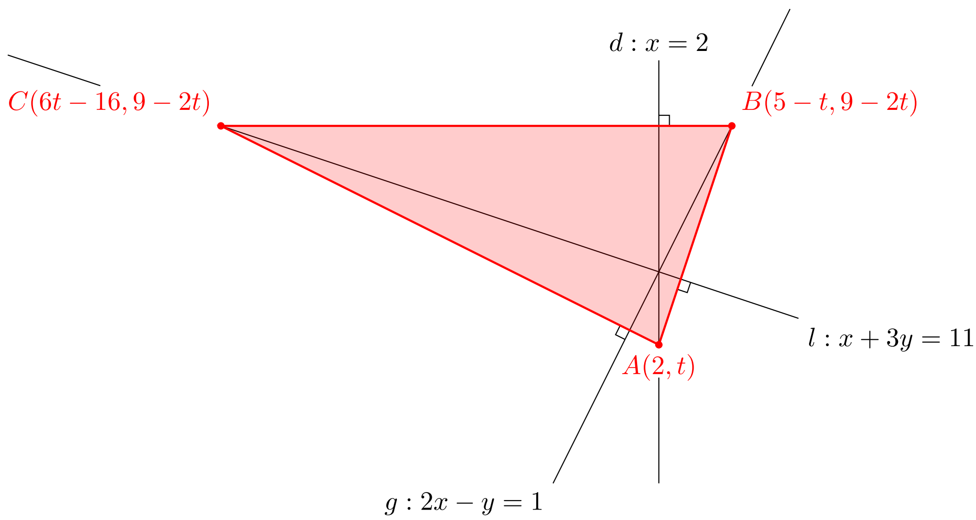
$$\begin{cases} x = 2 + s \\ y = t + 3s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$$

(dans ces équations, le paramètre s varie et le paramètre t est fixe, dépendant de la position du point A sur la droite d). On en déduit que B correspond à la valeur du paramètre s pour laquelle :

$$2(2 + s) - (t + 3s) = 1, \text{ autrement dit, } s = 3 - t.$$

Les coordonnées de B en fonction de t sont donc $(5 - t, 9 - 2t)$. En raisonnant de la même façon, on trouve les coordonnées $(6t - 16, 9 - 2t)$ de C en fonction de t (on se déplace depuis A dans la direction normale à g jusqu'à ce qu'on intersecte l). En résumé, on a donc pour l'instant trouvé les coordonnées des sommets du triangle en fonction du paramètre t :

$$A(2, t), \ B(5 - t, 9 - 2t) \text{ et } C(6t - 16, 9 - 2t).$$



Pour trouver la valeur de t, on va maintenant exprimer la condition sur l'aire du triangle ABC via la formule faisant intervenir le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le repère utilisé (qui est orthonormé direct) :

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 3 - t & 6t - 18 \\ 9 - 3t & 9 - 3t \end{pmatrix}\right| = \frac{21}{2} \Leftrightarrow (3 - t)^2 = 1 \Leftrightarrow t \in \{2, 4\}.$$

Pour $t = 2$ on trouve le triangle de sommets $A(2, 2)$, $B(3, 5)$, $C(-4, 5)$, et pour $t = 4$ celui de sommets $A(2, 4)$, $B(1, 1)$, $C(8, 1)$.