Série 5

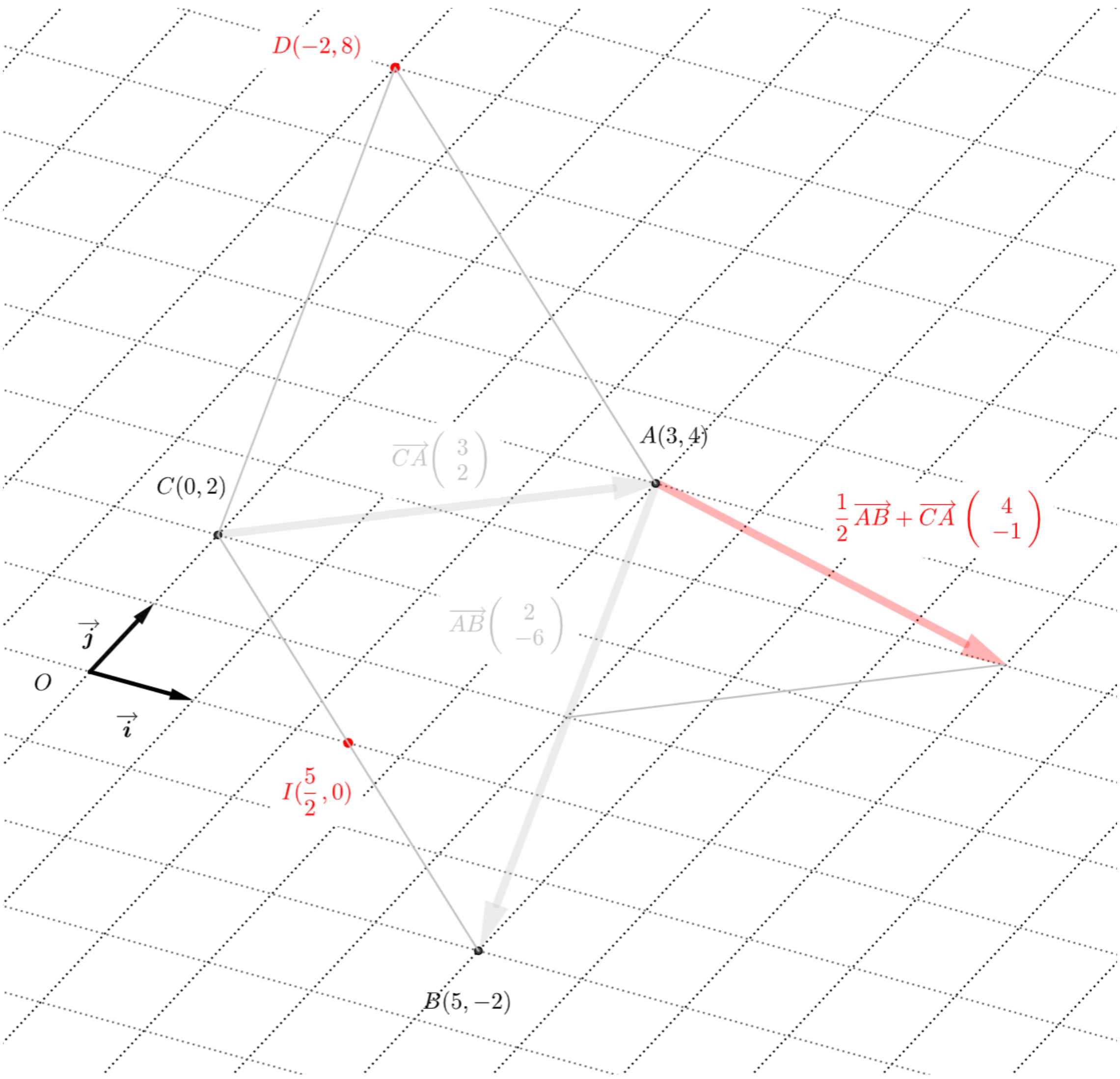
Exercice 1. Dans le plan muni d'un repère, on donne :

$$A(3,4),\ B(5,-2) \text{ et } C(0,2).$$

Calculer les coordonnées :

a. du milieu I de BC b. du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ c. du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution: Figure d'étude :



a. Pour obtenir les coordonnées du milieu de BC, il suffit de calculer les moyennes arithmétiques des coordonnées de B et C. On trouve donc que I a pour coordonnées :

$$\left(\frac{5+0}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 0\right).$$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ ont repectivement pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}5-3\\-2-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}3-0\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

dans le repère employé. On trouve alors que le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ a quant à lui pour coordonnées :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}.$$

c. Appelons (x, y) les coordonnées de D. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on sait que :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\,.$$

En coordonnées, cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-5 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3=-5 \\ y-4=4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=8\,. \end{cases}$$

On trouve donc que D a pour coordonnées $(-2, 8)$.

Exercice 2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne :

$$A(5,2),\ B(-1,4) \text{ et } C(1,6).$$

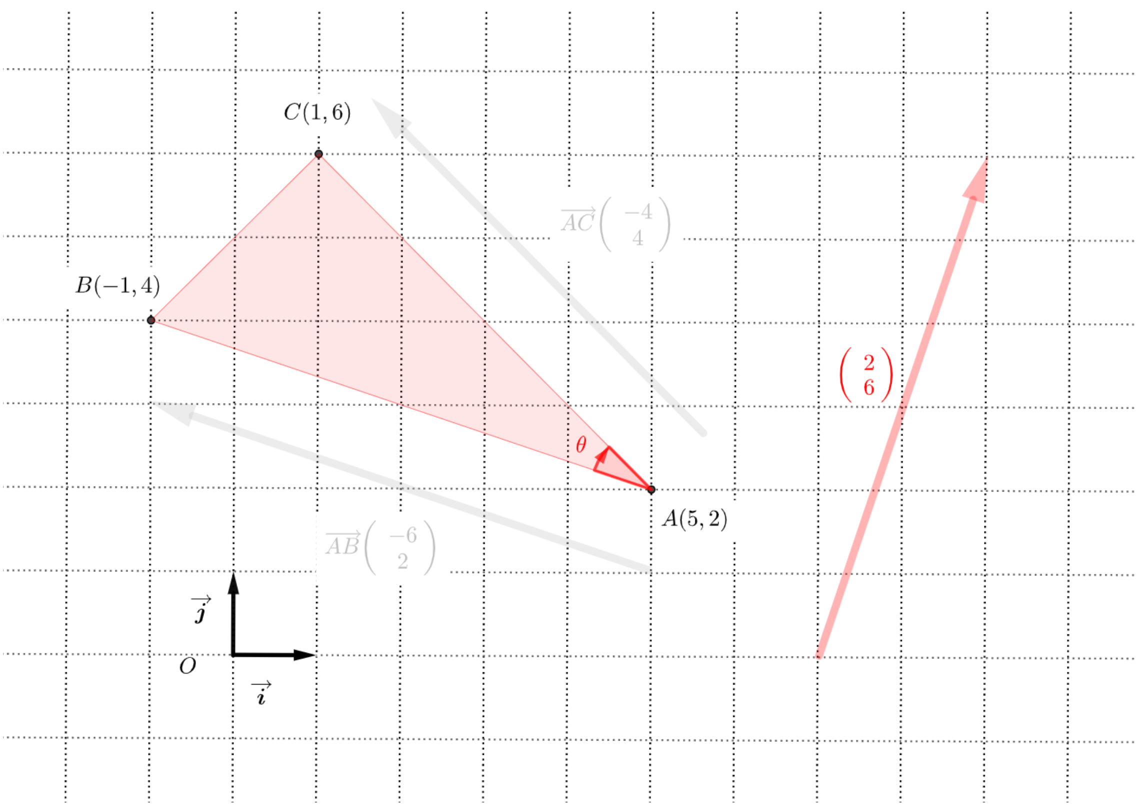
a. Quelle est l'aire du triangle ABC ? Ce triangle est-il orienté directement ou indirectement ?

b. Calculer la norme de $\overrightarrow{AB}$. Déterminer un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de même norme.

c. Déterminer l'angle orienté de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$. *Indication : calculer son sinus et son cosinus.*

Solution:

Figure d'étude :



a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont respectivement pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} -1-5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1-5 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Comme le repère employé est orthonormé direct, on en déduit que l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est égale à :

$$\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -24 + 8 = -16\,.$$

Le triangle ABC a donc pour aire :

$$\frac{1}{2}|-16| = 8$$

(on obtient le triangle en "coupant en deux" le parallélogramme) et il est orienté indirectement (on peut le vérifier sur le dessin ci-dessus : quand on énumère A, B et C dans cet ordre on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre).

b. La formule pour la norme dans un repère orthonormé donne ici :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-6)^2+2^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}\,.$$

Un vecteur :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de même norme si et seulement s'il vérifie :

$$\begin{cases} -6x+2y=0 \\ \sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ \sqrt{x^2+(3x)^2}=2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ \sqrt{10x^2}=2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ x=\pm 2\,. \end{cases}$$

Il y a donc deux vecteurs solutions du problème posé, à savoir :

$$\vec{u}_+\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_-\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Remarque : comme le repère est orthonormé direct, on peut affirmer que le vecteur $\vec{u}_+$ est celui obtenu en faisant tourner $\overrightarrow{AB}$ de $-\frac{\pi}{2}$. En effet, en plus de former un angle droit avec $\overrightarrow{AB}$ et d'être de même norme, on sait que l'angle orienté de $\overrightarrow{AB}$ vers $\vec{u}_+$ est négatif, puisque :

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -36-4 = -40 < 0\,.$$

De même, le vecteur $\vec{u}_-$ est celui obtenu en faisant tourner $\overrightarrow{AB}$ de $+\frac{\pi}{2}$.

c. Notons θ l'angle orienté de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$. Comme le repère utilisé, notons-le $\mathcal{R}$, est orthonormé direct, on sait que :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(-6)\cdot(-4)+2\cdot 4}{\sqrt{(-6)^2+2^2}\sqrt{(-4)^2+4^2}} = \frac{32}{16\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta = \frac{\det_{\mathcal{R}}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-6)^2+2^2}\sqrt{(-4)^2+4^2}} = \frac{-16}{16\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

A l'aide d'une calculatrice on trouve alors $\theta \simeq -26.6°$.

Exercice 3. Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne :

$$A(-1,3),\ B(2,1) \text{ et } C(1,5).$$

a. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment BC dans le repère $(C,\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$.
b. Un point J a pour coordonnées $(2,1)$ dans $(B,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$. Quelles sont ses coordonnées dans $(O,\vec{i},\vec{j})$?
c. Calculer les coordonnées du point O dans le repère $(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

Solution: Avant de résoudre l'exercice, rappelons que les coordonnées du point M dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont obtenues en décomposant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (reliant l'origine au point étudié) sur les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Autrement dit :

$$M(x,y) \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}\,.$$

La connaissance des coordonnées dans un repère permet donc d'écrire une égalité vectorielle, qui, correctement manipulée, donne accès aux coordonnées dans un autre repère. C'est de cette manière qu'on va résoudre les questions proposées.

a. Pour trouver les coordonnées de I dans le repère $(C,\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$, on doit décomposer le vecteur $\overrightarrow{CI}$ sur les vecteurs de base $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$. On trouve :

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

On trouve donc que I a pour coordonnées $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ dans le repère proposé.

b. Comme J a pour coordonnées $(2,1)$ dans le repère $(B, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\,.$$

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on sait que ce vecteur a pour coordonnées :

$$2\begin{pmatrix}2-(-1)\\1-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-2\\5-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

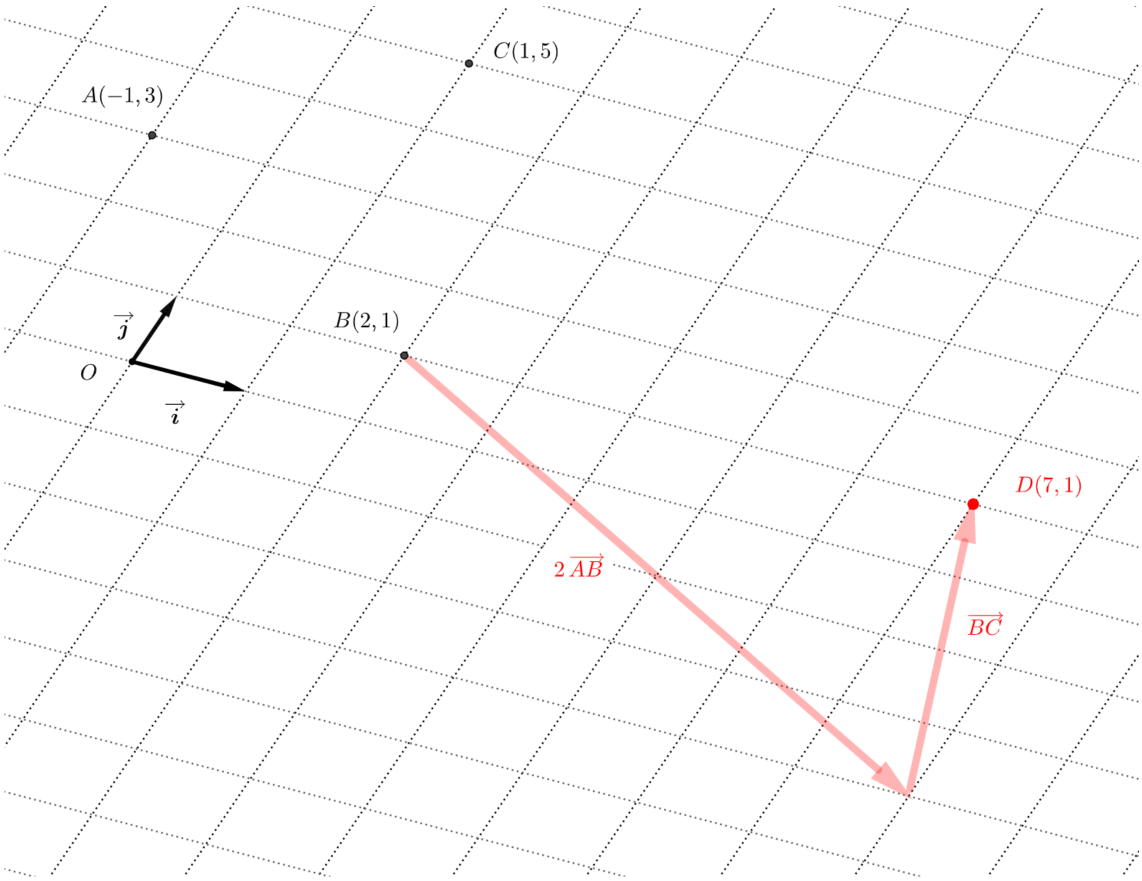
Autrement dit, en termes vectoriels, on a :

$$\overrightarrow{BJ} = 5\vec{\imath}$$

Pour trouver les coordonnées de J dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on doit maintenant décomposer $\overrightarrow{OJ}$ sur les vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$:

$$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BJ} = (2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + 5\vec{\imath} = 7\vec{\imath} + \vec{\jmath}\,.$$

Finalement, on voit que J a pour coordonnées $(7,1)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



c. Pour calculer les coordonnées demandées, on doit décomposer le vecteur $\overrightarrow{CO}$ sur les vecteurs de base $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$, c'est-à-dire que l'on doit chercher x et y tels que :

$$\overrightarrow{CO} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}\,.$$

En coordonnées dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, cette égalité vectorielle donne :

$$\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}-1-1\\3-5\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2-1\\1-5\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x+y\\-2x-4y\end{pmatrix}.$$

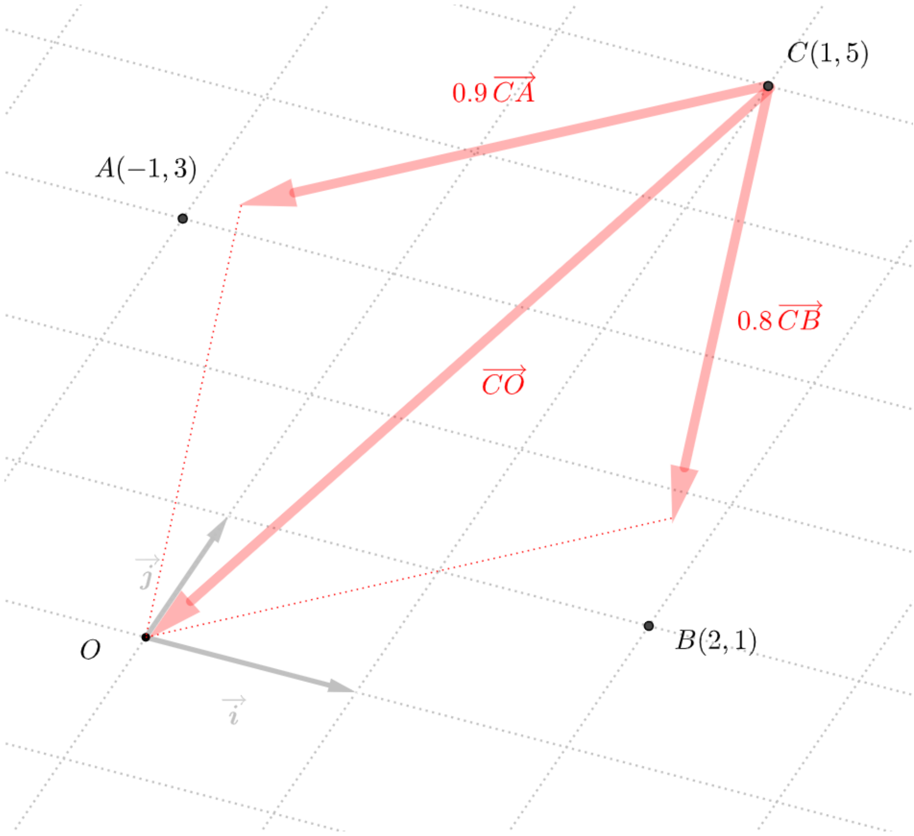
On va donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases}-2x+y=-1\\-2x-4y=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-1\\-2x-4(2x-1)=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-1\\10x=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0.9\\y=0.8\,.\end{cases}$$

Au final, on a donc montré que O a pour coordonnées $(0.9, 0.8)$ dans le repère $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, ou encore que l'on a la décomposition :

$$\overrightarrow{CO} = 0.9\,\overrightarrow{CA} + 0.8\,\overrightarrow{CB}\,.$$

Terminons par un dessin illustrant cette décomposition :



Exercice 4. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne :

$$A(5,-3),\ B(12,-2),\ C(2,4),\ \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.$$

On sait aussi que $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = \sqrt{2}$ et que l'angle orienté de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ vaut $\frac{\pi}{4}$.

a. Trouver l'expression du produit scalaire et de la norme, c'est-à-dire calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ et $\|\overrightarrow{u}\|$ en fonction de x, y, x' et y'.

b. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A et calculer l'angle (géométrique) au sommet A.

c. Quelle est la nature du repère $(O, \vec{i}, \vec{j} - \vec{i})$? Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans ce nouveau repère.

d. Retrouver les résultats du a. et du b. en utilisant le repère introduit au c.

Solution:

a. Par définition des coordonnées dans un repère, on a :

$$\overrightarrow{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}\,.$$

En développant le produit scalaire on trouve alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\|\vec{i}\|^2 + yy'\|\vec{j}\|^2 + (xy' + x'y)\vec{i} \cdot \vec{j}\,.$$

D'après l'énoncé, on sait de plus que :

$$\|\vec{i}\|^2 = 1\,,\ \|\vec{j}\|^2 = 2 \quad \text{et} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 1\,.$$

On obtient donc l'expression suivante pour le produit scalaire :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + 2yy' + xy' + x'y\,.$$

Pour la norme, on trouve :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 2xy}\,.$$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix}12-5\\-2-(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}2-5\\4-(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$$

Calculons alors leurs normes à l'aide de la formule trouvée au a. :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{7^2 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot 7\cdot 1} = \sqrt{65} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2\cdot 7^2 + 2\cdot(-3)\cdot 7} = \sqrt{65}\,.$$

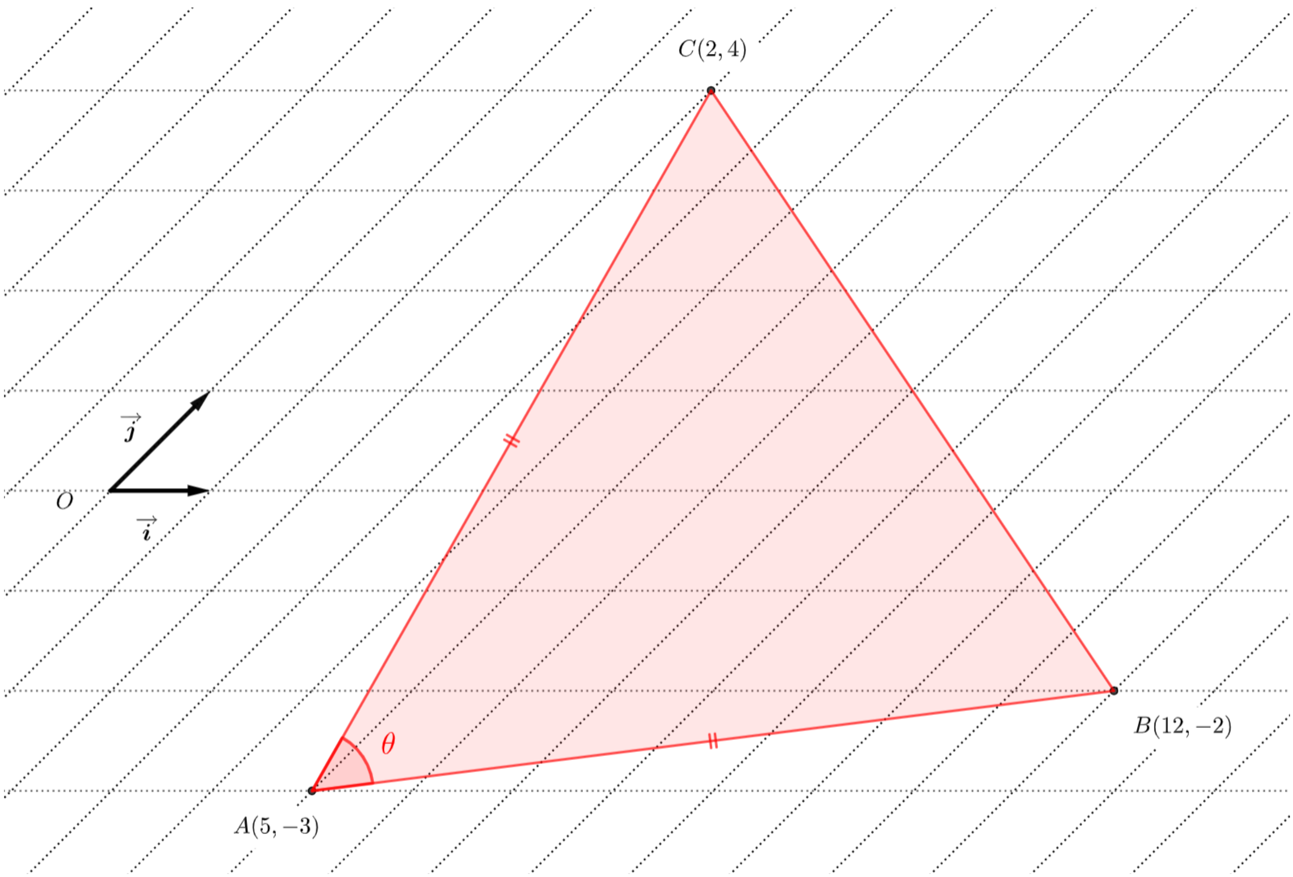
Les côtés AB et AC ont la même longueur : ABC est isocèle en A. Appelons θ l'angle géométrique au sommet A. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}\,.$$

En utilisant l'expression du produit scalaire trouvée au a. et les calculs effectués ci-dessus, on obtient maintenant :

$$\cos\theta = \frac{7\cdot(-3) + 2\cdot 1\cdot 7 + 7\cdot 7 + 1\cdot(-3)}{(\sqrt{65})^2} = \frac{39}{65} = \frac{3}{5}\,.$$

A l'aide d'une calculatrice on trouve $\theta \simeq 53.1°$.



c. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}-\vec{i}$ ont repectivement pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Les formules obtenues au a. permettent donc d'obtenir :

$$\|\vec{j}-\vec{i}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot(-1)\cdot(-1)} = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i}\cdot(\vec{j}-\vec{i}) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) = 0$$

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}-\vec{i}$ sont unitaires et forment un angle droit : le repère proposé est orthonormé. Pour trouver les coordonnées de $\vec{u}$ dans ce repère, on cherche à le décomposer sur les deux vecteurs de base, à savoir $\vec{i}$ et $\vec{j}-\vec{i}$. On trouve :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x+y)\vec{i} + y(\vec{j}-\vec{i}) \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix} \text{ dans le repère } (O,\vec{i},\vec{j}-\vec{i})\,.$$

d. Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j}-\vec{i})$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}x'+y'\\y'\end{pmatrix}\,.$$

Comme ce repère est orthonormé, on peut employer les formules "habituelles" pour le produit scalaire et la norme. On obtient de cette manière :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x+y)(x'+y') + yy' = xx' + xy' + x'y + 2yy'$$

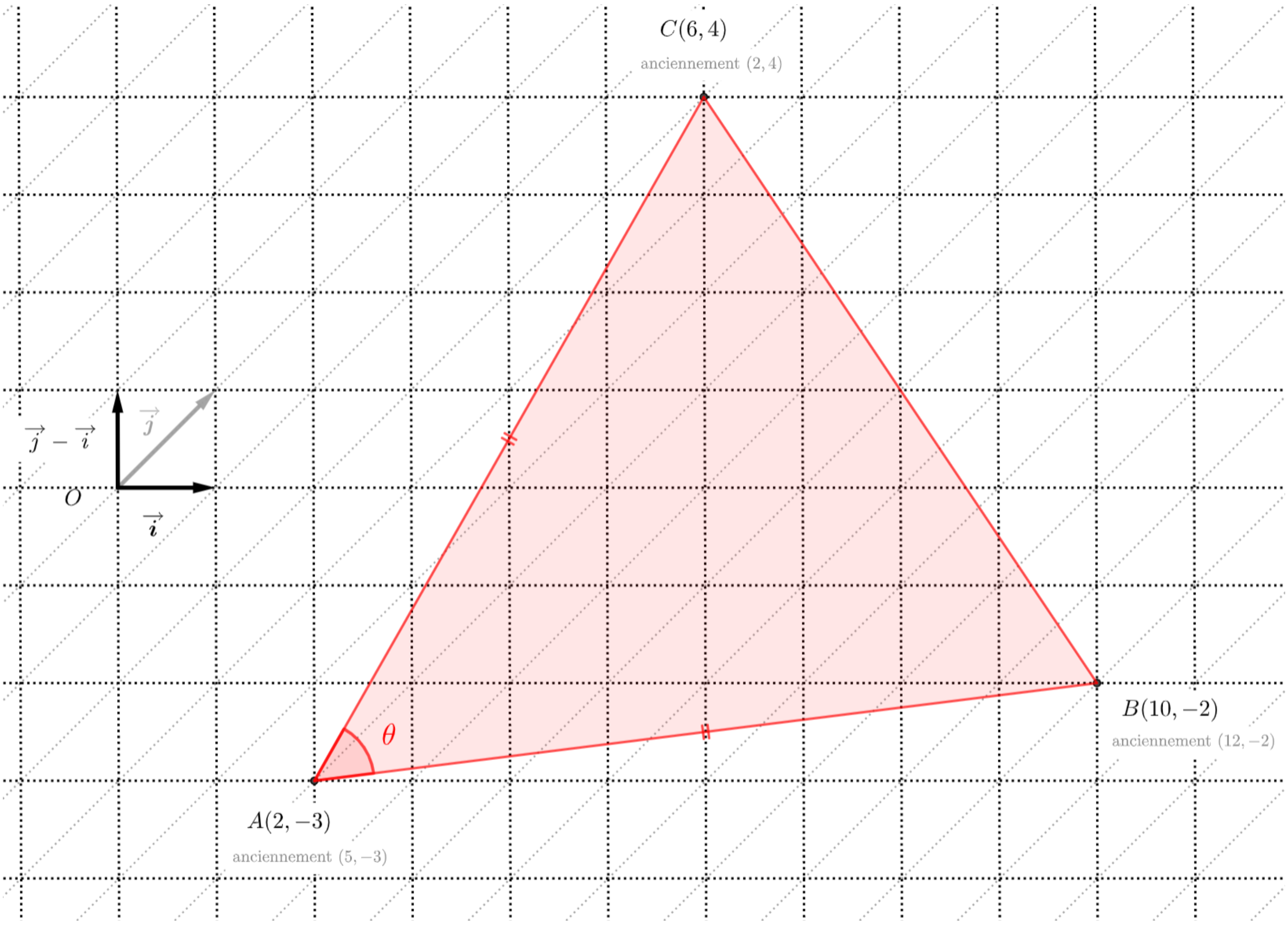
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x+y)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + 2y^2}\,.$$

On retrouve donc bien les formules du a. Pour le b., commençons par calculer les coordonnées de A, B et C dans le nouveau repère. Pour cela, on peut aussi passer par des décompositions de vecteurs :

$$\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} - 3\vec{j} = 2\vec{i} - 3(\vec{j} - \vec{i})\,, \quad \overrightarrow{OB} = 12\vec{i} - 2\vec{j} = 10\vec{i} - 2(\vec{j} - \vec{i})\,, \quad \overrightarrow{OC} = 2\vec{i} + 4\vec{j} = 6\vec{i} + 4(\vec{j} - \vec{i})$$

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j} - \vec{i})$, on a donc :

$$A(2,-3)\,,\ B(10,-2)\,,\ C(6,4)\,.$$



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont donc pour coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix} 10-2 \\ -2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 6-2 \\ 4-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

La formule pour la norme en repère orthonormé donne alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}\,.$$

Pour l'angle θ, on utilise la formule du produit scalaire en repère orthonormé :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{8 \cdot 4 + 1 \cdot 7}{(\sqrt{65})^2)} = \frac{39}{65} = \frac{3}{5}\,.$$

On retrouve bien les résultats obtenus au b.

Exercice 5. Dans le plan muni d'un repère, on donne les vecteurs suivants, où α est un paramètre réel :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\ \vec{v}\begin{pmatrix} 1+2\alpha \\ \alpha - 2 \end{pmatrix}\,.$$

a. Déterminer la valeur de α sachant que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b. On suppose le repère orthonormé. Trouver α sachant que le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ a pour norme :

$$\|p_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})\| = 2\sqrt{10}\,.$$

Solution:

a. Utilisons le fait que la colinéarité est détectée par le déterminant nul (propriété valable dans n'importe quel repère) :

$$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3 & 1+2\alpha \\ 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{3(\alpha-2)-(1+2\alpha)}_{\alpha-7} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 7\,.$$

Vérification : pour $\alpha = 7$, le vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\binom{15}{5} = 5\binom{3}{1}$, il est égal à $5\overrightarrow{u}$.

b. Par formule de projection, on sait que :

$$p_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}\,.$$

Comme le repère est orthonormé on a aussi :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 3(1+2\alpha)+(\alpha-2) = 1+7\alpha \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}\,,$$

si bien que :

$$\|p_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})\| = \frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{|1+7\alpha|}{\sqrt{10}}\,.$$

On trouve alors :

$$\|p_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})\| = 2\sqrt{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|1+7\alpha|}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \quad \Leftrightarrow \quad |1+7\alpha| = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 1+7\alpha = \pm 20 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -3 \text{ ou } \alpha = \frac{19}{7}\,.$$

Il y a donc deux solutions au problème posé, à savoir -3 et $\frac{19}{7}$.

Exercice 6. Dans le plan muni d'un repère, on donne :

$$A(-4,5), B(2,3) \text{ et } G(1,6).$$

Trouver les coordonnées de C sachant que G est le centre de gravité du triangle ABC.

Solution: Pour résoudre la question posée, introduisons le milieu I de AB, qui a pour coordonnées :

$$(\frac{-4+2}{2}, \frac{5+3}{2}) = (-1,4).$$

On sait alors que le centre de gravité du triangle ABC se situe au $\frac{2}{3}$ de la médiane issue de C. Vectoriellement, cela se traduit par la relation suivante :

$$\overrightarrow{CG} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{CI}.$$

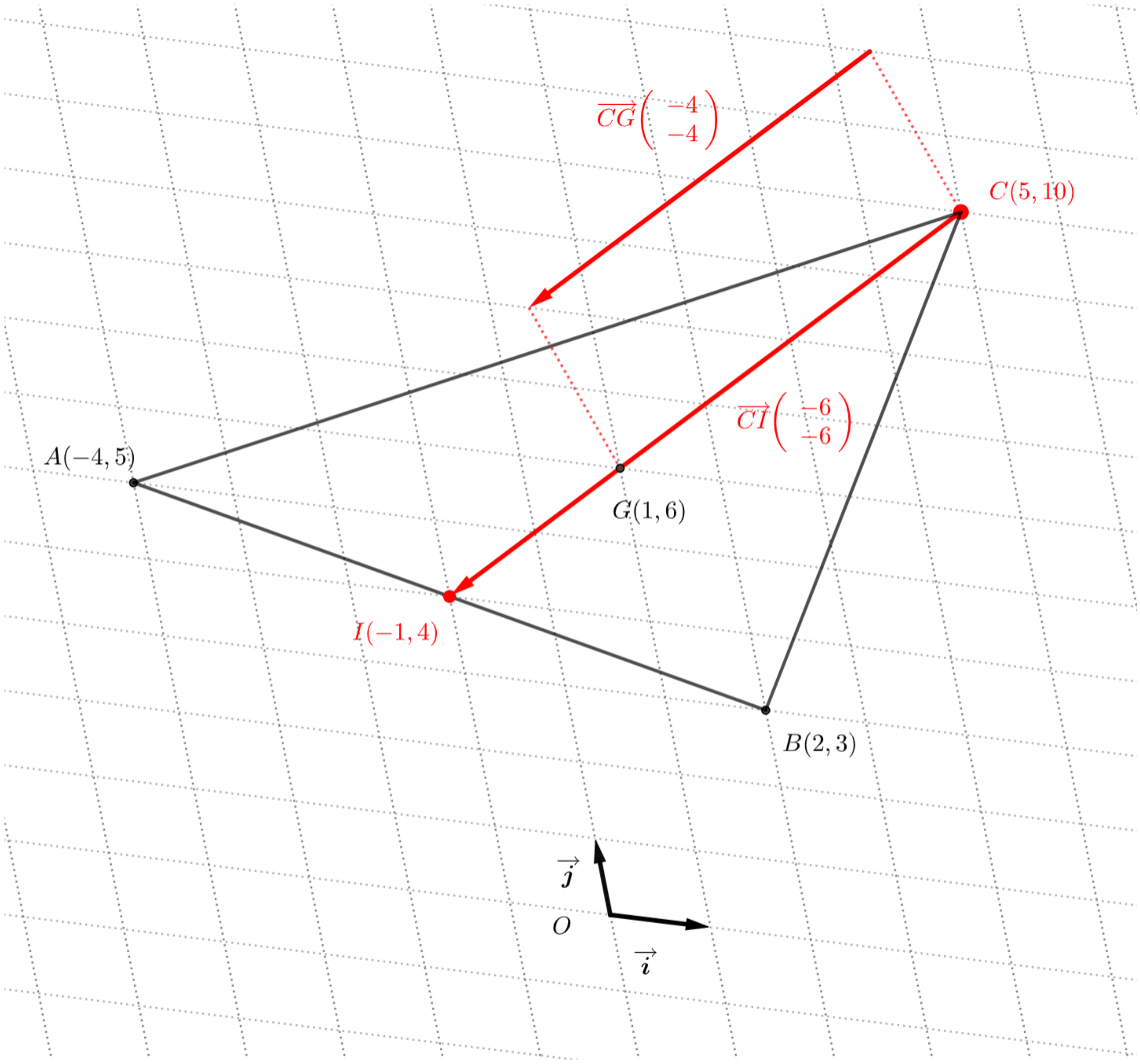
En traduisant cette égalité vectorielle en coordonnées, on trouve :

$$\begin{cases} 1-x = \dfrac{2}{3}(-1-x) \\ 6-y = \dfrac{2}{3}(4-y) \end{cases}$$

où (x,y) sont les coordonnées de C. La résolution de ce système conduit alors à :

$$\begin{cases} 1-x = \dfrac{2}{3}(-1-x) \\ 6-y = \dfrac{2}{3}(4-y) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3-3x = -2-2x \\ 18-3y = 8-2y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 10\,. \end{cases}$$

Le point C a donc pour coordonnées $(5,10)$.



Exercice 7. Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, montrer que :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ colinéaires} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = 0\,.$$

Indication : procéder par double implication. Pour " $\Leftarrow$ " discuter selon que x et y sont nuls ou non.

Solution: On raisonne par double implication, en commençant par :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ colinéaires} \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = 0\,.$$

On suppose donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et on souhaite montrer que le déterminant est nul. Si $\vec{u}$ est le vecteur nul alors la conclusion est claire, puisque :

$$\begin{vmatrix}0 & x'\\ 0 & y'\end{vmatrix} = 0\,.$$

Si $\vec{u}$ est non nul, alors le fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires signifie qu'il existe un réel t tel que :

$$\vec{v} = t\vec{u} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\,.$$

En calculant le déterminant on trouve alors :

$$\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x & tx\\ y & ty\end{vmatrix} = txy - txy = 0\,,$$

d'où la conclusion. Passons à la réciproque :

$$\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ colinéaires.}$$

On suppose donc que :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$$

et on souhaite montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. A nouveau, si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur nul la conclusion est immédiate, puisque tout vecteur est colinéaire au vecteur nul. Si $\overrightarrow{u}$ n'est pas le vecteur nul alors (au moins) l'un des réels x ou y est non nul. Supposons d'abord que x est non nul. Alors :

$$xy' - x'y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{x'}{x} y \quad \Leftrightarrow \quad y' = ty\,,\ \text{où } t = \frac{x'}{x}\,.$$

Il vient alors :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\ \text{ou encore } \overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u}\,,$$

ce qui montre bien que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Si y est non nul on raisonne de la même manière :

$$xy' - x'y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' = \frac{y'}{y} x \quad \Leftrightarrow \quad x' = tx\,,\ \text{où } t = \frac{y'}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u}\,,$$

ce qui montre encore bien que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Remarque : l'idée essentielle de cette preuve est que la colinéarité de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ signifie l'existence d'un rapport "$\frac{\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{u}}$" entre ces deux vecteurs, ce qui se traduit en coordonnées par l'égalité :

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}\,,$$

qui signifie à son tour que le déterminant est nul. Cependant, pour être rendue précise, cette idée doit être discuter selon que $\overrightarrow{u}$ est le vecteur nul ou non, et selon que x ou y sont nuls ou non, puisque ces quantités sont apparues aux dénominateurs dans les fractions que l'on a écrites ci-dessus.