Série 4

Exercice 1. Sur une feuille de papier, tracer une droite d puis placer dessus trois points A, B et C tels que :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 2 \text{ et } \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}.$$

Dans chacun des cas suivants décrire la droite définie par l'équation normale donnée. La représenter précisément sur la feuille.

a. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ b. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} = 12$ c. $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = -4$.

Solution: Avant de passer à la résolution de cet exercice, rappelons le point de cours suivant. L'équation normale :

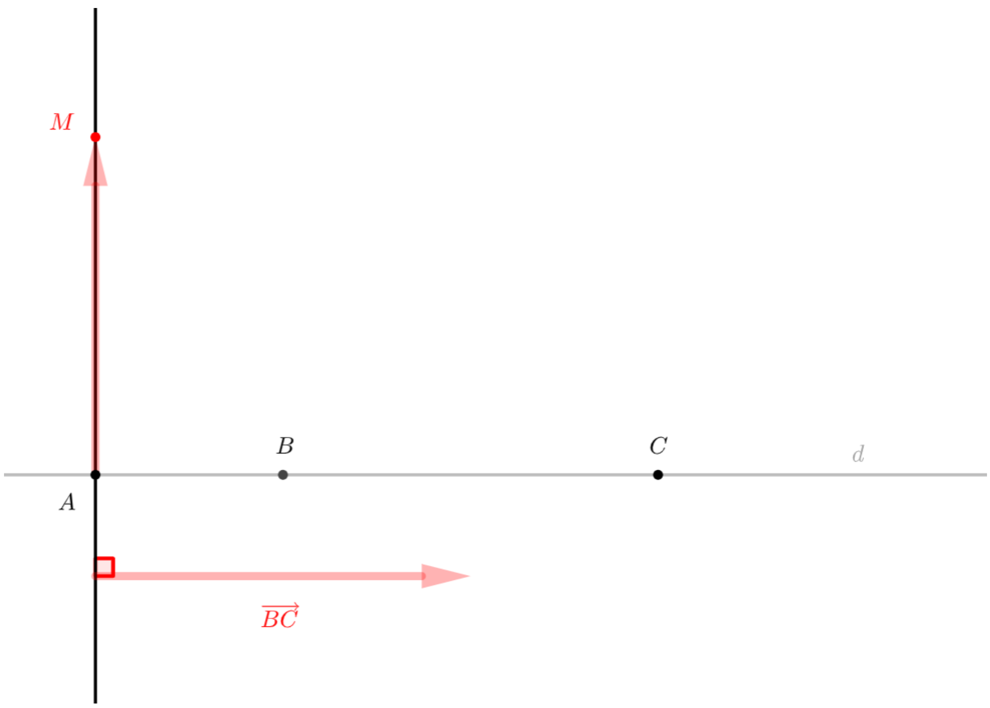
$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n} = \alpha$$

décrit une droite dont la direction est directement lisible sur l'équation, puisqu'il s'agit de la direction orthogonale à $\overrightarrow{n}$. Pour positionner cette droite, il suffit donc d'identifier un point qui lui appartient. Dans certains cas un tel point est directement accessible à partir des données : par exemple quand $\alpha = 0$ le point O convient. Dans les autres cas, on peut toujours produire un tel point en translatant O par le vecteur $\frac{\alpha}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\overrightarrow{n}$. Autrement dit, la droite recherchée est obtenue en "décalant" la droite d'équation :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

de ce vecteur. Passons à la résolution de l'exercice :

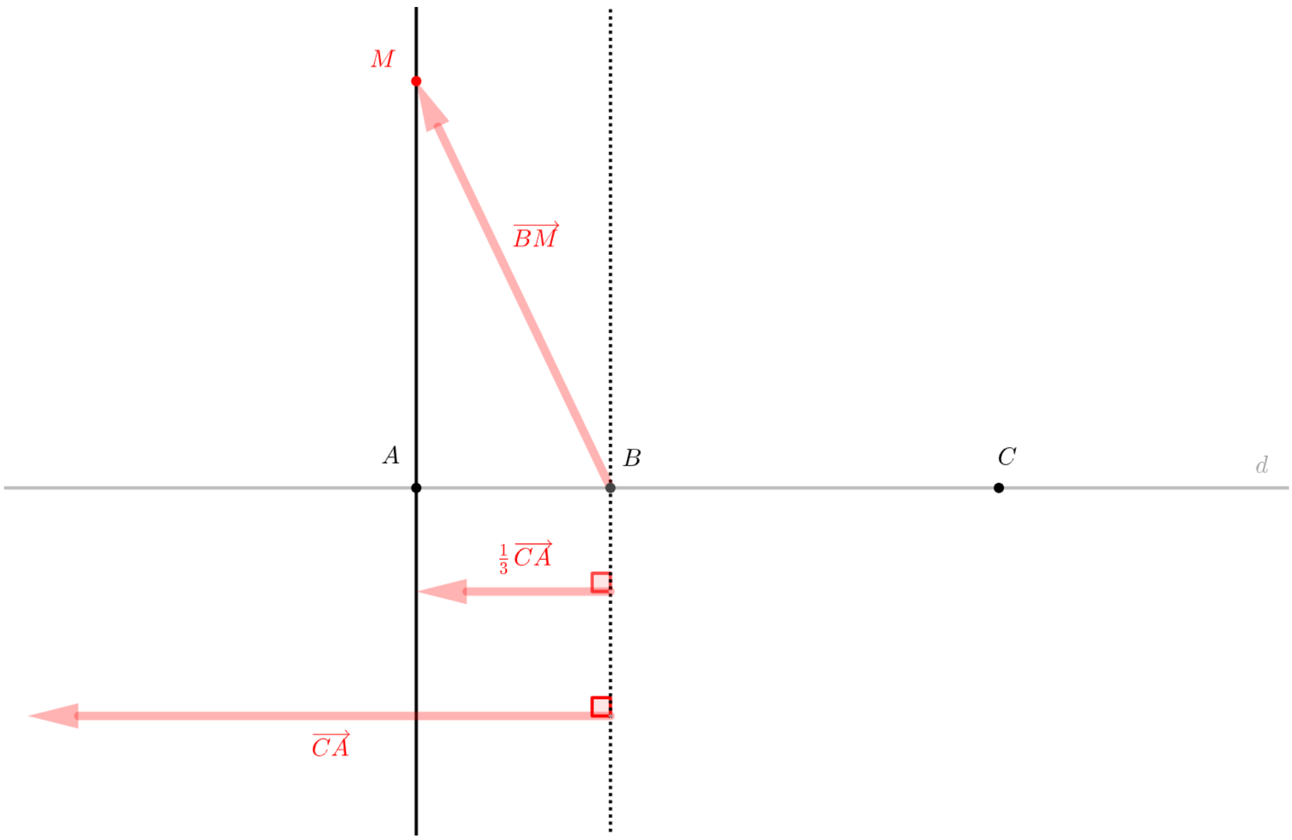
a. Avec les notations ci-dessus, le α vaut ici 0. Par conséquent, la droite décrite est orthogonale à $\overrightarrow{BC}$ et passe par A, autrement dit, c'est la perpendiculaire à d passant par A.



b. La droite décrite est orthogonale à $\overrightarrow{CA}$. Autrement dit, elle est aussi perpendiculaire à d. Par contre, elle ne passe pas par le point d'observation B car α ne vaut pas 0 ici. Pour identifier un point dessus, on peut chercher par exemple à savoir si A ou C convient, en testant si l'équation est satisfaite pour $M = A$ ou $M = C$. On trouve que A fonctionne bien ici, car :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} \cdot (3\overrightarrow{BA}) = 3\|\overrightarrow{BA}\|^2 = 12\,.$$

En définitive, la droite décrite ici est la même qu'au a. : c'est la perpendiculaire à d passant par A.



On peut aussi construire cette droite comme indiqué sur le dessin, à savoir en partant de la droite d'équation normale :

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

c'est-à-dire la perpendiculaire à d passant par B (en pointillé sur le dessin) puis en la "décalant" à l'aide du vecteur :

$$\frac{12}{\|\overrightarrow{CA}\|^2}\overrightarrow{CA} = \frac{12}{36}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}\,.$$

Rappelons que ce qui fait fonctionner cette construction, c'est l'équivalence :

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} = 12 \quad \Leftrightarrow \quad p_{\overrightarrow{CA}}(\overrightarrow{BM}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \quad \left(= \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|^2}\,\overrightarrow{CA}\right).$$

Autrement dit, un point M appartient à la droite étudié si et seulement si le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{BM}$ sur $\overrightarrow{CA}$ est égal à $\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, ou encore si et seulement si le projeté orthogonal de M sur d est égal à A.

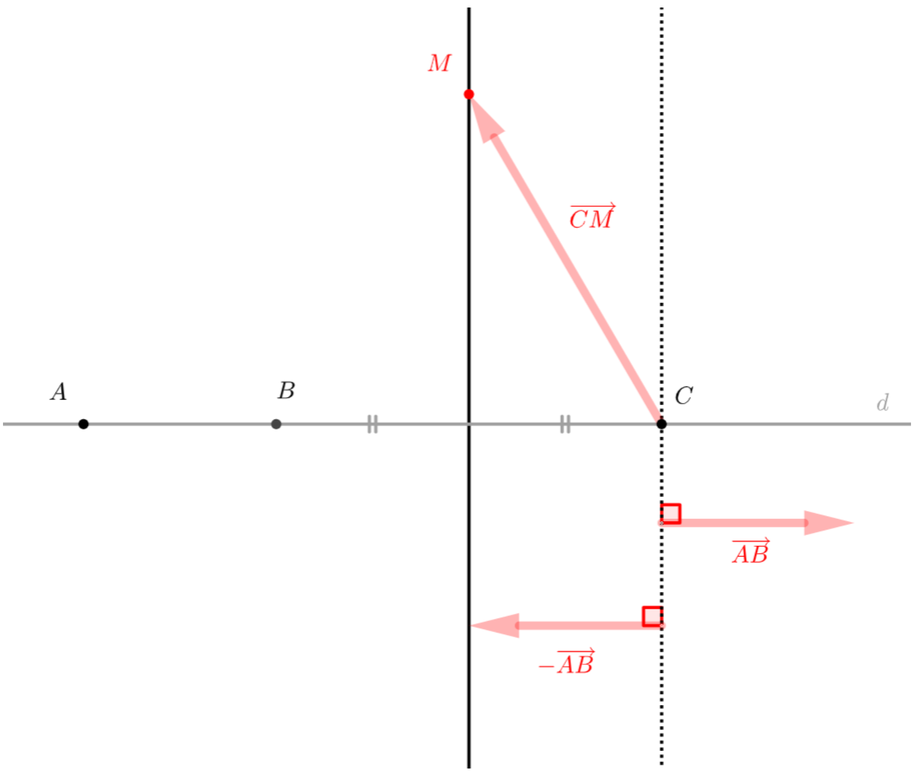
c. La droite étudiée est obtenue en "décalant" la droite d'équation normale :

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0\,,$$

(c'est-à-dire la perpendiculaire à d passant par C) à l'aide du vecteur :

$$\frac{-4}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB} = \frac{-4}{4}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}\,.$$

Il s'agit de la médiatrice du segment BC.



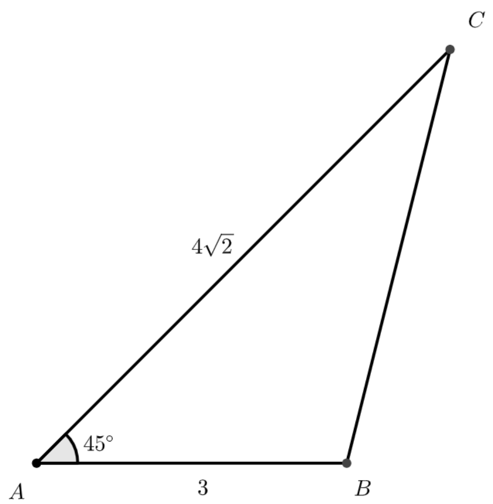
Exercice 2. On donne un triangle ABC vérifiant :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 3\,,\ \|\overrightarrow{AC}\| = 4\sqrt{2}\,,\ \widehat{BAC} = 45°\,.$$

Déterminer une équation normale de chacune des droites ci-dessous, vue depuis A.

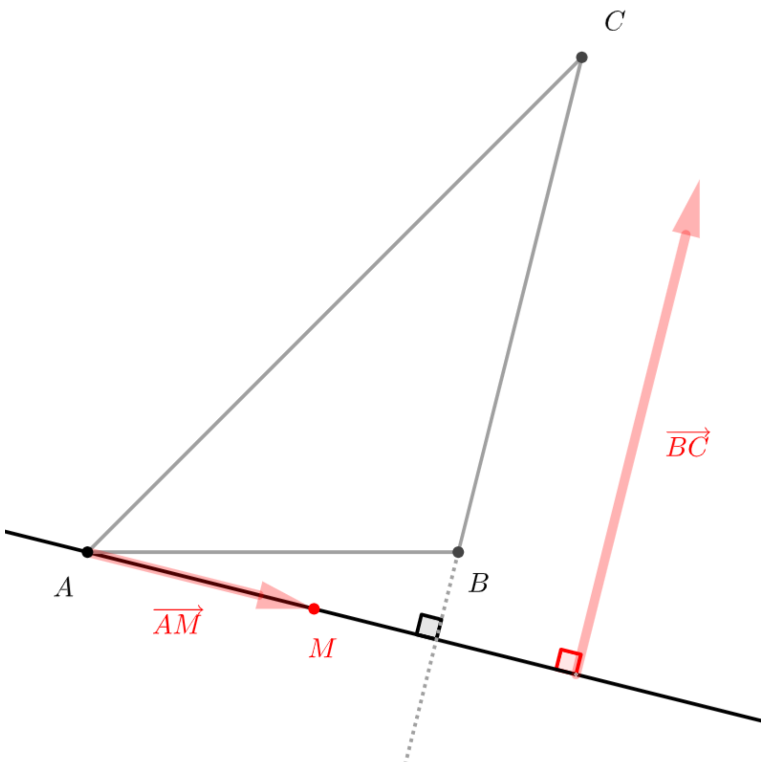
a. la hauteur issue de A b. la hauteur issue de C c. la médiatrice de BC.

Solution: Commençons par représenter le triangle ABC sur un dessin.



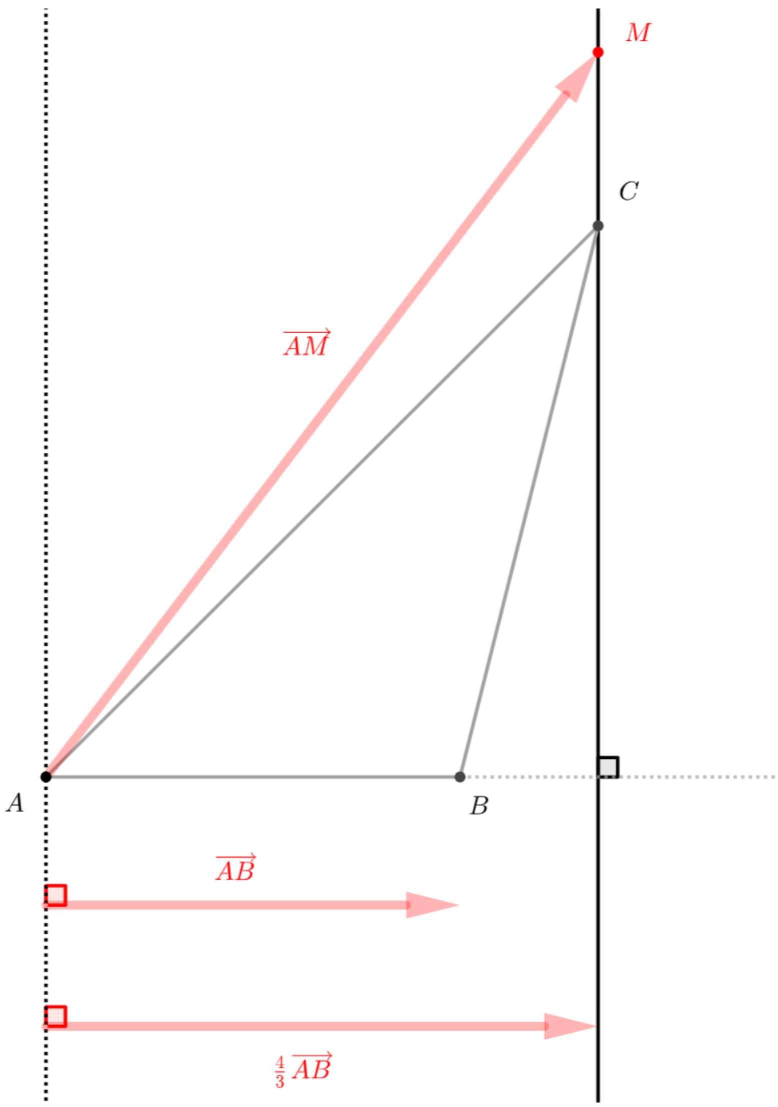
a. La hauteur issue de A passe par A et est normale au vecteur $\overrightarrow{BC}$. Vue depuis A, elle admet donc pour équation normale :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,.$$



b. La hauteur issue de C passe par C et est normale au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Vue depuis A, elle admet donc pour équation normale :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{AB}\| \cos \widehat{BAC} = 4\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\,.$$



Comme indiqué sur le dessin, le décalage entre la perpendiculaire à (AB) passant par A et la hauteur issue de C est donné par le vecteur (indépendant de M) :

$$p_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AM}) = \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\,\overrightarrow{AB} = \frac{12}{9}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\,.$$

c. La médiatrice de BC passe par le milieu I de BC et est normale au vecteur $\overrightarrow{BC}$. Vue depuis A, elle admet donc pour équation normale :

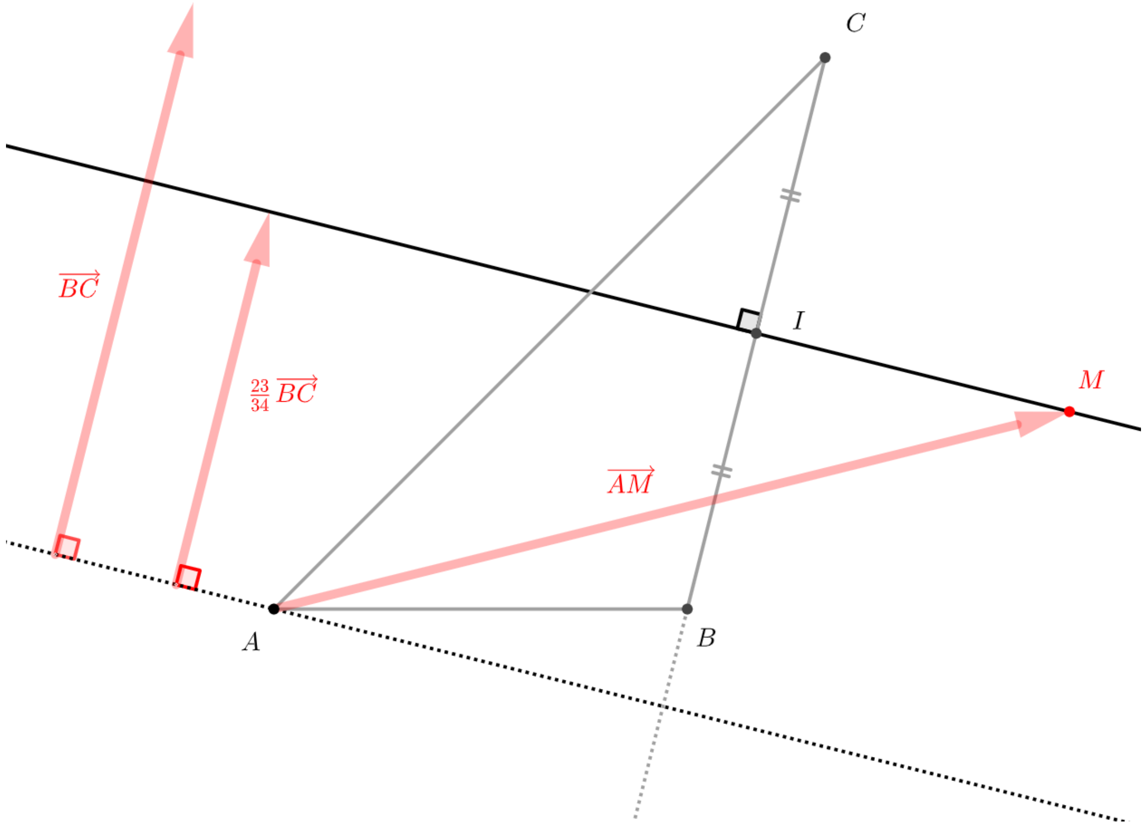
$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}\,.$$

Or :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad\text{et}\quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

si bien que :

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2) = \frac{1}{2}(32-9) = \frac{23}{2}\,.$$



Comme indiqué sur le dessin, le décalage entre la hauteur issue de A et la médiatrice de BC est donné par le vecteur (indépendant de M) :

$$p_{\overrightarrow{BC}}(\overrightarrow{AM}) = \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}\,\overrightarrow{BC} = \frac{\frac{23}{2}}{17}\overrightarrow{BC} = \frac{23}{34}\overrightarrow{BC}\,,$$

où l'on a utilisé que :

$$\|\underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}_{\text{calculé au b.}} = 9 + 32 - 24 = 17\,.$$

Exercice 3. On donne un triangle ABC et une droite d vérifiant :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{7}\,,\ \|\overrightarrow{AC}\| = 2\,,\ \|\overrightarrow{BC}\| = 3 \ \text{ et }\ d : \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\,.$$

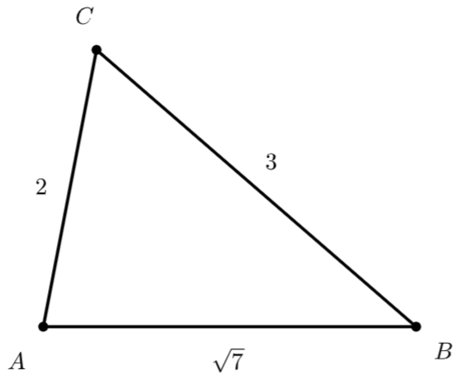
a. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ainsi que le projeté orthogonal $p_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AC})$ de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$.

b. Tracer précisément la droite d sur un dessin.

c. On note I l'intersection de d avec la droite (BC). Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

d. Déterminer une équation vectorielle de d vue depuis A, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Solution: Commençons pas représenter le triangle ABC sur un dessin.



a. En utilisant les propriétés connues du produit scalaire, on trouve :

$$\|\underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2}{2}$$

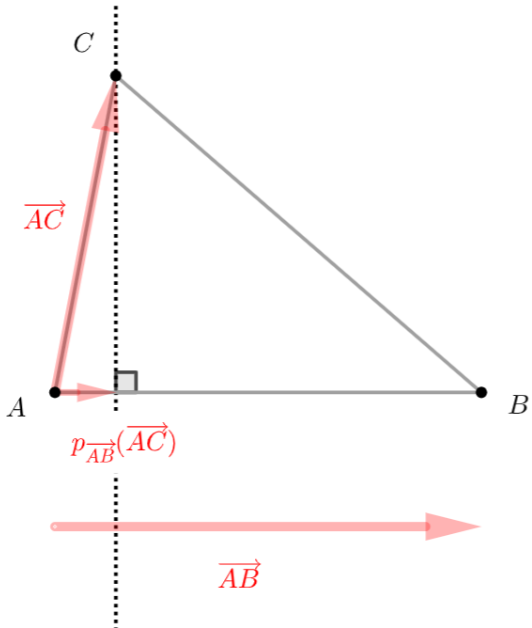
Avec les valeurs données dans l'énoncé, on obtient :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{7+4-9}{2} = 1\,.$$

D'après la formule de projection on trouve alors :

$$p_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\,\overrightarrow{AB} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}\,.$$

Quand on projette $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$ on récupère $\overrightarrow{AB}$ "coupé" en 7 :



b. La droite d est décrite par l'équation normale :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\,.$$

Donnons alors plusieurs constructions de cette droite. Tout d'abord, on sait (construction 1) qu'elle est obtenue en "décalant" celle d'équation normale :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$$

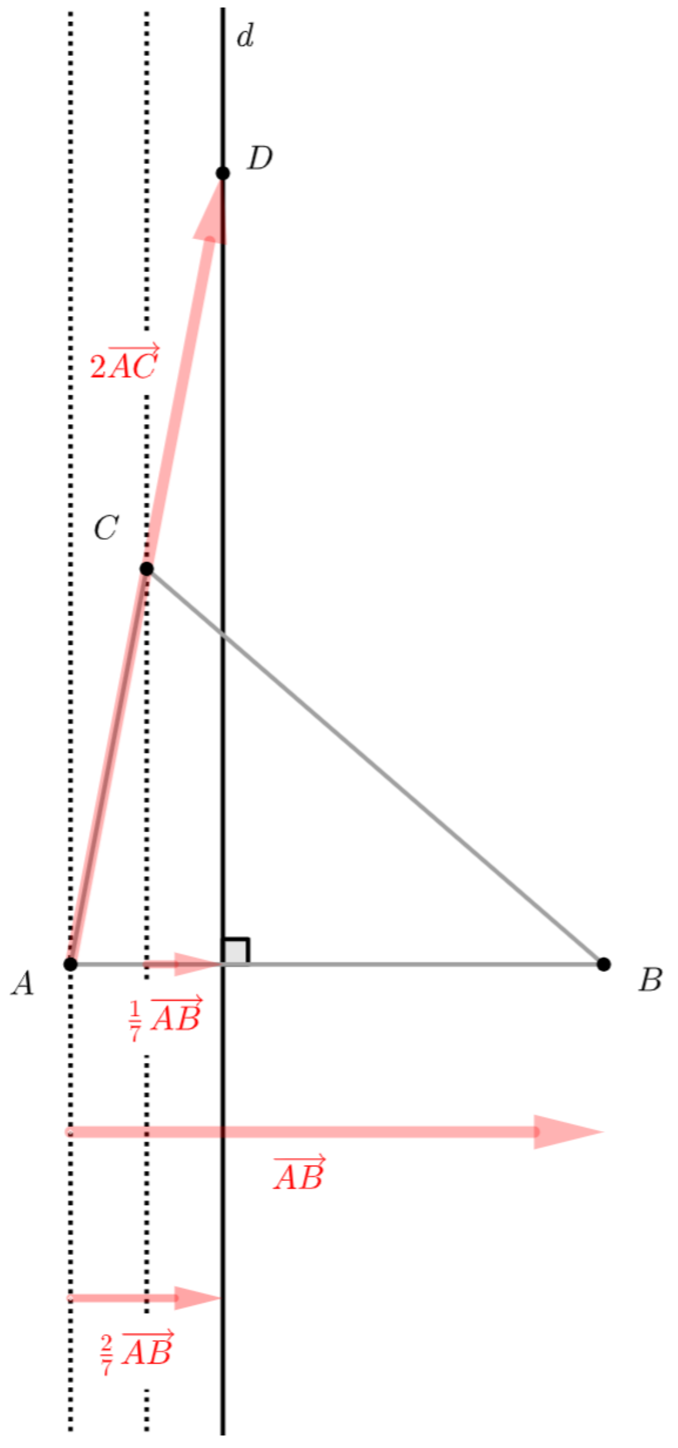
(c'est-à-dire la perpendiculaire à (AB) passant par A) à l'aide du vecteur :

$$\frac{2}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\,\overrightarrow{AB} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}\,.$$

Le calcul de projeté effectué au a. permet alors aussi (construction 2) de construire d en décalant la hauteur issue de C par le vecteur $\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}$. Enfin (construction 3) on peut lire directement sur l'équation que la droite d est orthogonale à $\overrightarrow{AB}$. Pour construire un point de d, on peut utiliser le calcul de produit scalaire effectué au a. :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1 \quad\Rightarrow\quad (2\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB} = 2 \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 2}_{D\in d}, \quad \text{où } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}\,.$$

Voici un dessin faisant apparaitre ces trois constructions :



c. Commençons par décrire la droite (BC) par une équation vectorielle, vue depuis A. Par exemple :

$$(BC) : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t\underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}\,,\ t\in\mathbb{R}\,.$$

Le point I se trouve à la fois sur d et sur (BC). Il correspond donc à la valeur du paramètre t telle que :

$$\underbrace{((1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})}_{\overrightarrow{AI}}\cdot\overrightarrow{AB}=2 \quad\Leftrightarrow\quad (1-t)\|\overrightarrow{AB}\|^2+t\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=2$$

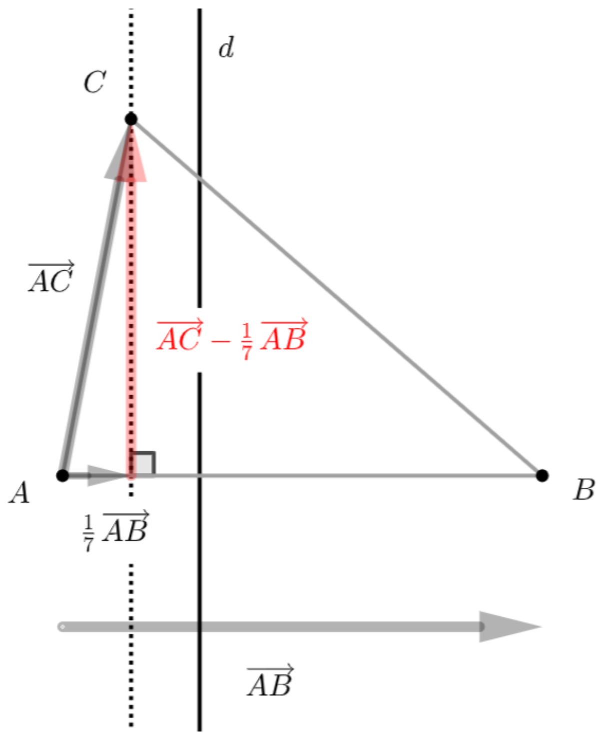
En utilisant le calcul effectué au a. on trouve alors :

$$7(1-t)+t=2 \quad\Leftrightarrow\quad 7-6t=2 \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{5}{6}\,.$$

Par conséquent, on a montré que les décompositions suivantes ont lieu :

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}\,.$$

d. Pour écrire une équation vectorielle de d vue depuis A il faut choisir un point de d (comme vu au b. on peut par exemple pour cela translater le point A des vecteurs $2\overrightarrow{AC}$ ou $\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$) et un vecteur directeur de d. Afin de trouver un tel vecteur, on peut utiliser le calcul de projeté effectué au a. pour faire apparaitre un vecteur "vertical" en faisant la différence entre $\overrightarrow{AC}$ et son projeté sur $\overrightarrow{AB}$:



Voici alors quelques équations vectorielles décrivant d vue depuis A :

$$d:\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}+t(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{7}\overrightarrow{AB})\,,\ t\in\mathbb{R}$$

$$d:\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}+t(7\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\,,\ t\in\mathbb{R}$$

$$d:\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+t(\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AC})\,,\ t\in\mathbb{R}\ \ldots$$

Exercice 4. Sur une feuille de papier, dessiner un rectangle $ABCD$ et la droite d vérifiant :

$$\|\overrightarrow{AB}\|=3\,,\ \|\overrightarrow{AD}\|=1 \text{ et } d:\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=0\,.$$

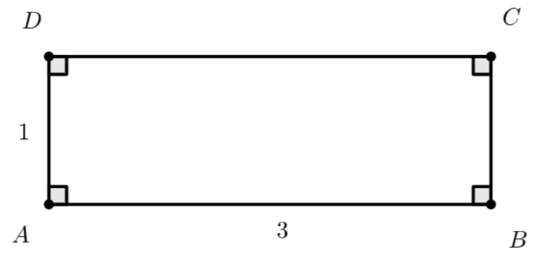
Tracer aussi la médiatrice g de la diagonale AC.

a. Ecrire une équation normale de d vue depuis B. Quelle est la distance de B à d ?

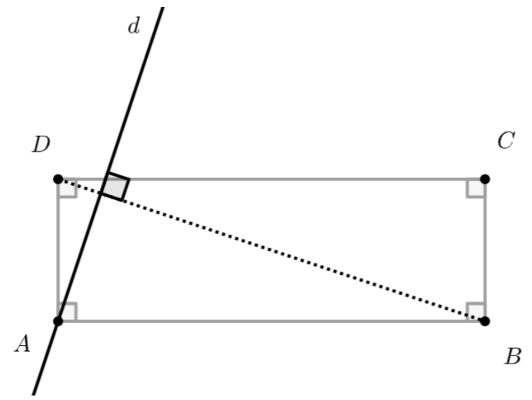
b. Déterminer une équation normale de g vue depuis B.

c. On note I le point d'intersection de d et g. Exprimer $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

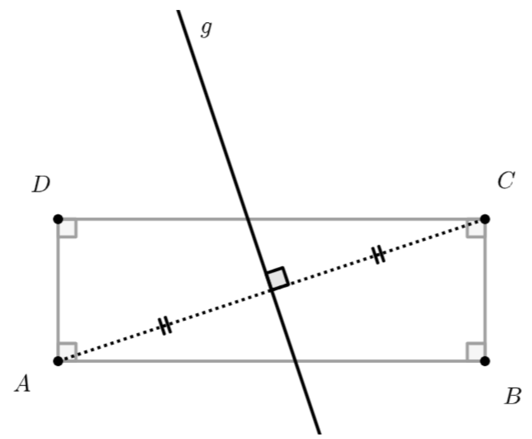
Solution: Commençons par représenter le rectangle $ABCD$.



La droite d passe par A et est normale au vecteur $\overrightarrow{BD}$: c'est donc la perpendiculaire à (BD) passant par A.



Traçons enfin la médiatrice g de AC.



a. Partons de l'équation de d donnée dans l'énoncé et "passons" par B (on fait donc un "décalage" d'observateur). On obtient :

$$\underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} \cdot \underbrace{\overrightarrow{BD}}_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}} = \|\overrightarrow{BA}\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BD} = 9\,.$$

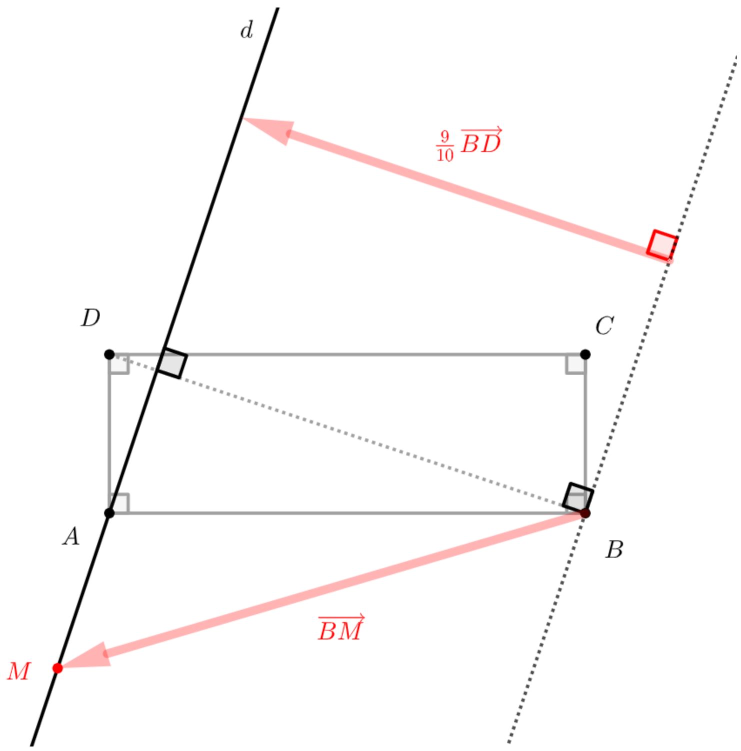
Comme $\overrightarrow{BD}$ a pour norme $\sqrt{10}$, on sait alors que la distance δ de B à d est donnée par la formule :

$$\delta = \frac{9}{\sqrt{10}}\,.$$

Rappelons que cette formule est obtenue en prenant la norme du vecteur :

$$p_{\overrightarrow{BD}}(\overrightarrow{BM}) = \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BD}}{\|\overrightarrow{BD}\|^2}\,\overrightarrow{BD} = \frac{9}{10}\overrightarrow{BD}$$

qui mesure le décalage entre la perpendiculaire à (BD) passant par B et la droite d.



b. Appelons J le milieu de la diagonale AC. La droite g passe par J et est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AC}$. Vue depuis B, elle admet donc pour équation normale :

$$g : \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AC}\,.$$

Utilisons maintenant que le point J est aussi le milieu de l'autre diagonale, à savoir BD (car $ABCD$ est un rectangle et donc en particulier un parallélogramme). On trouve alors :

$$\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \underbrace{\overrightarrow{BD}}_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2) = -4\,.$$

En définitive, on a donc trouvé que, vue depuis B, la droite g admet pour équation normale :

$$g : \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = -4\,.$$

c. Cherchons les réels α et β tels que :

$$\overrightarrow{BI} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BC}\,.$$

Comme I se trouve à l'intersection de d et de g, il vérifie les équations trouvées au a. et au b., si bien que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BD} = 9 \\ \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + \beta\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 9 \\ \alpha\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \end{cases}$$

Calculons les produits scalaires qui sont apparus. On trouve, d'une part :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \underbrace{\overrightarrow{BD}}_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}} = \|\overrightarrow{BA}\|^2 = 9\ ,\ \overrightarrow{BC} \cdot \underbrace{\overrightarrow{BD}}_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}} = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = 1$$

et, d'autre part :

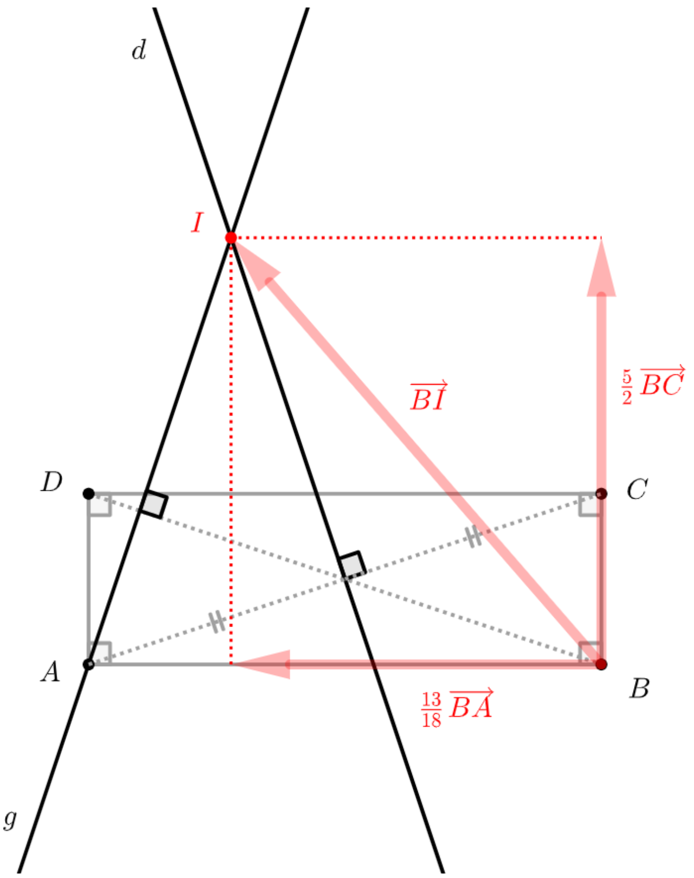
$$\overrightarrow{BA} \cdot \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}} = -\|\overrightarrow{BA}\|^2 = -9\ ,\ \overrightarrow{BC} \cdot \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}} = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = 1\,.$$

Le système ci-dessous devient donc :

$$\begin{cases} 9\alpha + \beta = 9 \\ -9\alpha + \beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha + \beta = 9 \\ 2\beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{13}{18} \\ \beta = \frac{5}{2}\,. \end{cases}$$

On a donc établi que :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{13}{18}\overrightarrow{BA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}\,.$$



Exercice 5. On donne un triangle non aplati ABC dans le plan.

a. Ecrire des équations normales des trois hauteurs du triangle, vues depuis A.

b. Montrer que ces trois hauteurs s'intersectent en un point. *Indication : introduire l'intersection de deux d'entre elles.*

c. En procédant de la même façon, montrer que les trois médiatrices s'intersectent en un point.

Solution:

a. La hauteur issue de A passe par A et est orthogonale à $\overrightarrow{BC}$. Elle admet donc pour équation normale :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,.$$

Celle issue de B passe par B et est orthogonale à $\overrightarrow{AC}$. Vue depuis A, elle admet donc pour équation normale :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\,.$$

Enfin, la hauteur issue de C passe par C et est orthogonale à $\overrightarrow{AB}$. Vue depuis A, elle admet donc pour équation normale :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}\,.$$

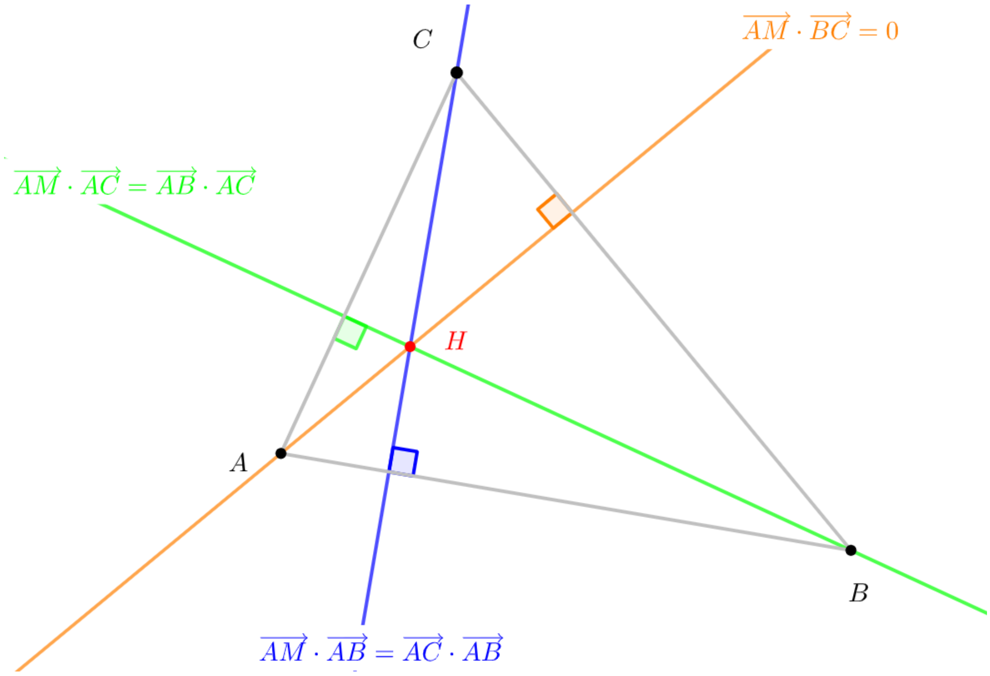
b. Introduisons par exemple H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C (existe car ces deux droites ne sont pas parallèles). D'après le a., il vérifie donc le système d'équation :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}\,. \end{cases}$$

Vérifions que H se trouve sur la hauteur issue de A. Pour cela, on calcule :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0\,.$$

On a donc bien montré que H se trouve sur les trois hauteurs, autrement dit on a prouvé l'existence de l'orthocentre.



c. Commençons par écrire des équations normales pour les trois médiatrices. La médiatrice de AB passe par le milieu de AB et est orthogonale à $\overrightarrow{AB}$. Vue depuis A, elle admet donc pour équation normale :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2\,.$$

La médiatrice de AC passe par le milieu de AC et est orthogonale à $\overrightarrow{AC}$. Vue depuis A, elle admet donc pour équation normale :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|^2\,.$$

La médiatrice de BC passe par le milieu de BC et est orthogonale à $\overrightarrow{BC}$. Vue depuis A, elle admet donc pour équation normale :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|^2\,.$$

Introduisons alors O le point d'intersection des médiatrices de AB et AC (existe car ces deux droites ne sont pas parallèles). Le point O vérifie donc les deux équations :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|^2\,.\end{cases}$$

Pour contrôler que O appartient à la médiatrice de BC, on calcule :

$$\overrightarrow{AO}\cdot\underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|^2-\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2$$

Utilisons ensuite que :

$$\|\underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{BC}\|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\,.$$

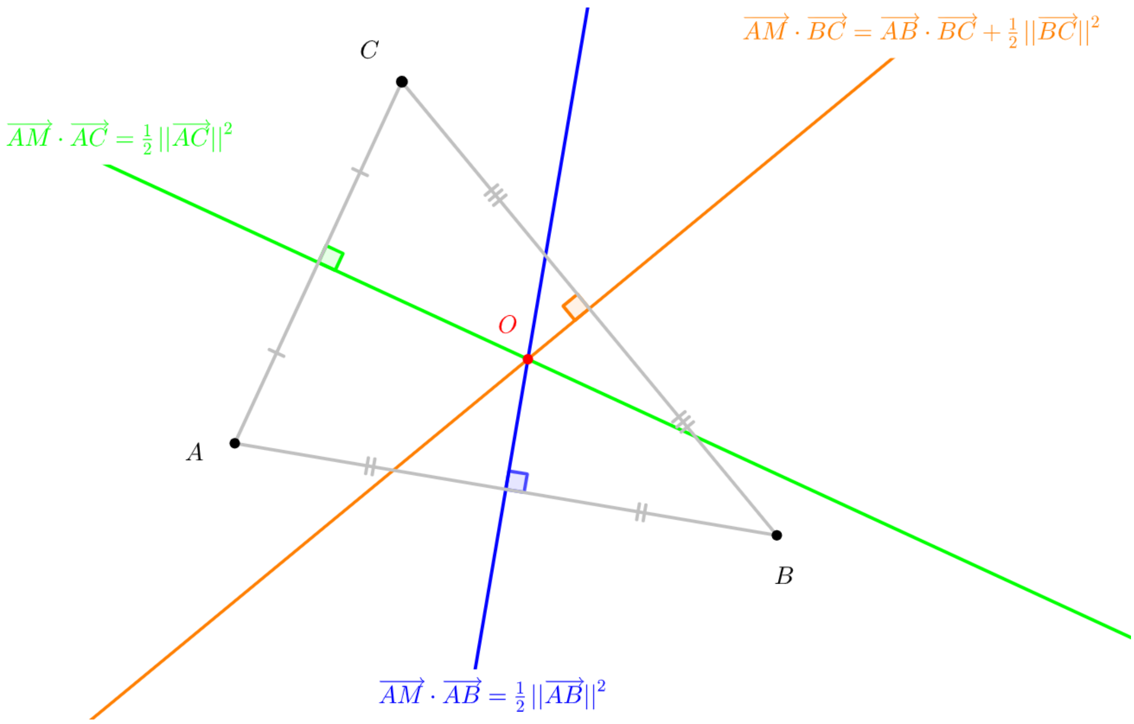
Il vient alors :

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{BC}\|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})-\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|^2\,.$$

On a donc bien montré que O se trouve sur les trois médiatrices, autrement dit on a prouvé l'existence du centre du cercle circonscrit.

Remarque : si l'on utilise la caractérisation de la médiatrice de AB comme lieu des points équidistants de A et B (et de même pour AC et BC), on montre le résultat voulu plus rapidement, puisque :

$$\underbrace{\|\overrightarrow{OA}\|=\|\overrightarrow{OB}\|\ \text{ et }\ \|\overrightarrow{OA}\|=\|\overrightarrow{OC}\|}_{\text{le point d'intersection des médiatrices de } AB \text{ et } AC\,\ldots}\qquad\Rightarrow\qquad\underbrace{\|\overrightarrow{OB}\|=\|\overrightarrow{OC}\|}_{\ldots\text{ appartient à la médiatrice de } BC}$$



Exercice 6. On donne un triangle non aplati ABC dans le plan, et on note :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = c\,,\ \|\overrightarrow{AC}\| = b \ \text{ et } \ \widehat{BAC} = \theta\,.$$

Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, où O est le centre du cercle circonscrit à ABC.

Solution: On cherche les réels α et β tels que :

$$\overrightarrow{AO} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Dans le triangle ABC, les médiatrices de AB et AC admettent respectivement pour équations normales :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \frac{1}{2}c^2 \ \text{ et } \ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \frac{1}{2}b^2\,.$$

Le point O se trouvant sur ces deux droites, il vérifie les deux équations :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}c^2\\[2mm] \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}c^2\\[2mm] (\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}c^2\\[2mm] \alpha\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}b^2\,.\end{cases}$$

Autrement dit, α et β sont solutions du système :

$$\begin{cases}\alpha\, c^2 + \beta\, bc\cos\theta = \dfrac{1}{2}c^2\\[2mm] \alpha\, bc\cos\theta + \beta\, b^2 = \dfrac{1}{2}b^2\,.\end{cases}$$

Pour trouver α, on peut multiplier la première équation par b, la deuxième par $c\cos\theta$, et faire la différence. On obtient :

$$(\alpha\, bc^2 + \beta\, b^2 c\cos\theta) - (\alpha\, bc^2\cos^2\theta + \beta\, b^2 c\cos\theta) = \frac{1}{2}bc^2 - \frac{1}{2}b^2 c\cos\theta\,,$$

ce qui, en simplifiant, donne :

$$\alpha\, bc^2\underbrace{(1-\cos^2\theta)}_{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}bc(c - b\cos\theta) \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \frac{c - b\cos\theta}{2c\sin^2\theta}\,.$$

Pour trouver β, revenons au système ci-dessus, multiplions la première équation par $b\cos\theta$, la deuxième par c, et faisons la différence. On obtient :

$$(\alpha\, bc^2 \cos\theta + \beta\, b^2 c \cos^2\theta) - (\alpha\, bc^2 \cos\theta + \beta\, b^2 c) = \frac{1}{2} bc^2 \cos\theta - \frac{1}{2} b^2 c,$$

ce qui, en simplifiant, donne :

$$\beta\, b^2 c \underbrace{(\cos^2\theta - 1)}_{-\sin^2\theta} = \frac{1}{2} bc(c\cos\theta - b) \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{b - c\cos\theta}{2b\sin^2\theta}\,.$$

En définitive, on a donc montré :

$$\overrightarrow{AO} = \frac{c - b\cos\theta}{2c\sin^2\theta}\,\overrightarrow{AB} + \frac{b - c\cos\theta}{2b\sin^2\theta}\,\overrightarrow{AC}\,.$$

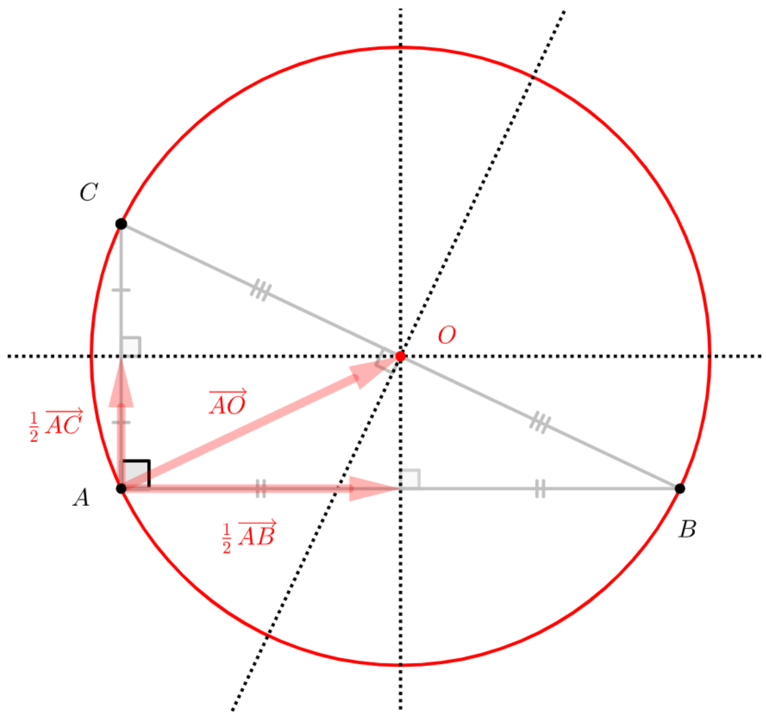
Pour terminer, testons la formule générale que l'on a trouvée dans quelques cas particuliers. Tout d'abord, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on trouve :

$$\alpha = \frac{c - b\cos\frac{\pi}{2}}{2c\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{c}{2c} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b - c\cos\frac{\pi}{2}}{2b\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}\,.$$

Le point O vérifie donc :

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\,.$$

Il se trouve donc au milieu de BC. Géométriquement, cela correspond au fait que dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit se trouve au milieu de l'hypothénuse.



Regardons enfin ce que donne la formule dans le cas d'un triangle équilatéral, c'est-à-dire lorsque :

$$b = c \;\text{ et }\; \theta = \frac{\pi}{3}\,.$$

On obtient alors :

$$\alpha = \frac{b - b\cos\frac{\pi}{3}}{2b\sin^2\frac{\pi}{3}} = \frac{b - \frac{b}{2}}{2b\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{3}{2}b} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b - b\cos\frac{\pi}{3}}{2b\sin^2\frac{\pi}{3}} = \alpha = \frac{1}{3}\,.$$

Le point O vérifie donc :

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\,.$$

Pour comprendre où il se trouve, introduisons le milieu I de BC, qui vérifie :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,.$$

Il vient alors :

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\,.$$

Autrement dit, O se situe au deux-tiers sur le chemin partant de A et rejoignant le milieu de BC : c'est donc aussi le centre de gravité du triangle. On retrouve ici le résultat géométrique suivant : dans un triangle équilatéral, les médiatrices sont aussi les médianes. Le point O d'intersection des médiatrices est donc aussi le point d'intersection des médianes, c'est-à-dire le centre de gravité.