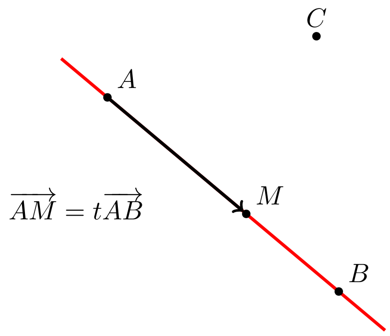
Série 3

Exercice 1. Sur une feuille de papier, placer trois points non-alignés A, B et C. Dans chacun des cas suivants, quel est lieu décrit par l'équation vectorielle donnée ? Le représenter précisément sur la feuille.

a. $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$ b. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}, t \in \mathbb{R}$ c. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} + t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $t \in \mathbb{R}$.

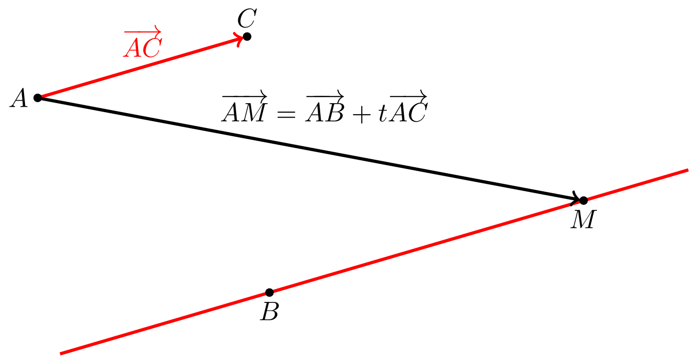
Solution:

a. Figure d'étude :



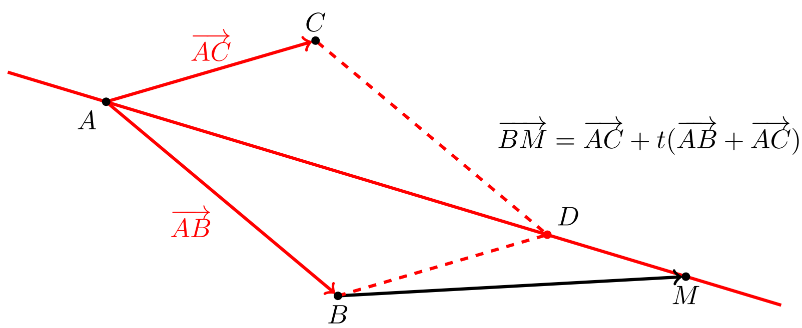
On reconnait ici une équation vectorielle de la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$, autrement dit de la droite (AB).

b. Figure d'étude :



On reconnaît ici une équation vectorielle de la droite passant par B (où le point M se trouve pour $t = 0$) et dirigée par $\overrightarrow{AC}$, autrement dit de la parallèle à (AC) passant par B.

c. Figure d'étude :



L'équation vectorielle donnée ici correspond à la droite passant par le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire tel que $ABDC$ est un parallélogramme (où le point M se trouve pour $t = 0$) et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Il s'agit donc de la droite (AD).

Exercice 2. Dessiner une droite d sur laquelle se trouvent trois points A, B, C vérifiant :

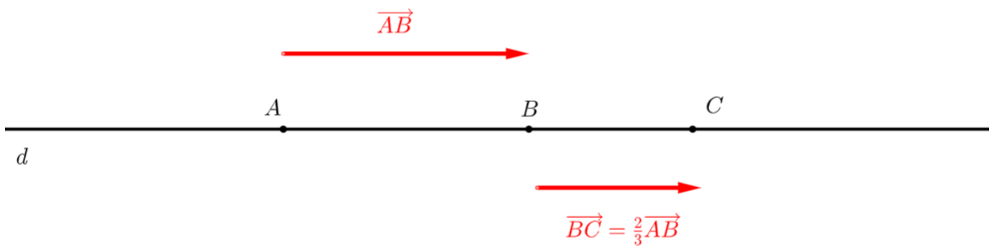
$$\overrightarrow{BC} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\,.$$

a. Quelle est l'abscisse de B dans le repère $(C, \overrightarrow{AC})$ de d ?

b. Dans un repère de d d'origine A on sait que B a pour abscisse 3. Quelle est l'abscisse de C ?

c. Placer sur d un repère dans lequel A et B ont pour abscisses respectives 1 et 4.

Solution: Figure d'étude :



Avant de répondre aux questions posées, rappelons qu'un repère de d est un couple :

$$(O, \overrightarrow{v})$$

où O est un point de d et $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur non nul de d. L'abscisse d'un point M de d dans ce repère est le "rapport $\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{v}}$" entre les deux vecteurs colinéaires $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire, de manière plus formelle, le réel t vérifiant :

$$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{v}\,.$$

a. Avec les notations introduites ci-dessus, on a ici :

$$O = C\,,\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} \ \text{ et } \ M = B.$$

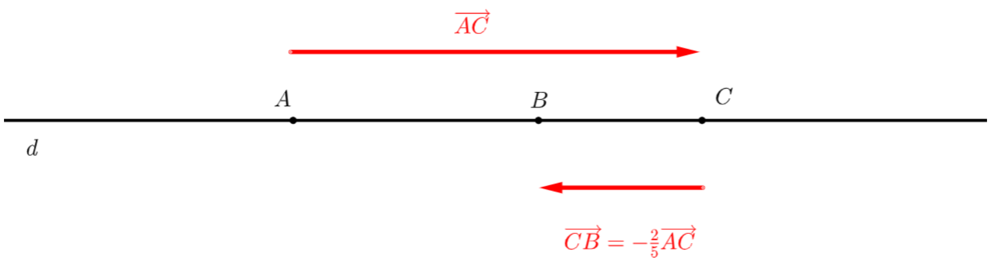
On doit donc chercher le "rapport $\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AC}}$". Calculons alors ce dernier vecteur :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}\,.$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\,.$$

L'abscisse recherchée vaut donc $-\frac{2}{5}$. Contrôlons notre résultat sur le dessin :



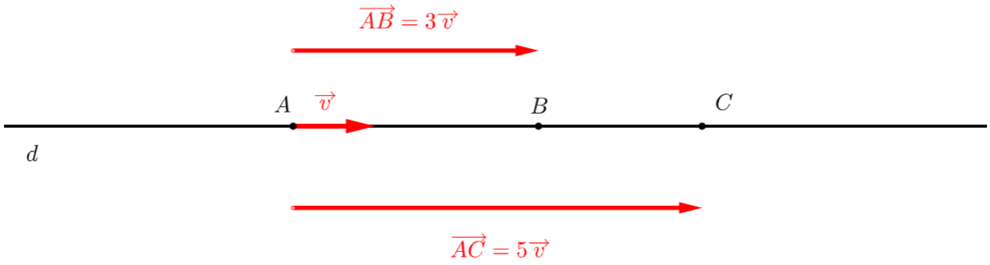
b. Cette fois-ci, on sait d'après l'énoncé que $O = A$ et que $t = 3$ pour $M = B$. On en déduit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{v} \ \text{ ou, autrement dit, } \ \overrightarrow{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

On cherche l'abscisse de C, c'est-à-dire le "rapport $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{v}}$". En utilisant le calcul fait en a., on trouve alors :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{2}(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}) = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{v}\,.$$

L'abscisse recherchée vaut donc 5.



c. Pour cette dernière question, on sait que $t = 1$ pour $M = A$ et $t = 4$ pour $M = B$. On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{v}\,.$$

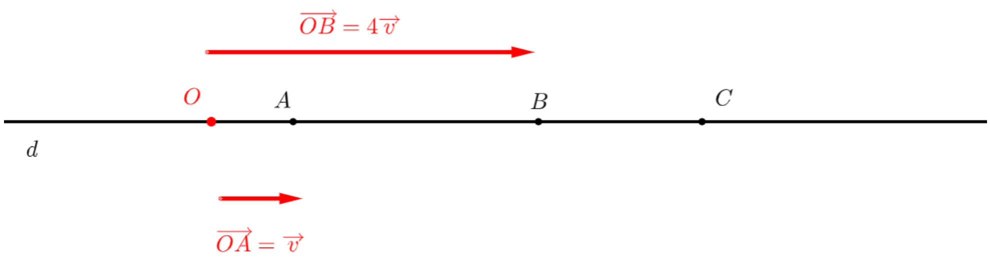
On en déduit que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{v} \quad \text{ou, autrement dit,} \quad \overrightarrow{v} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

(c'est le même $\overrightarrow{v}$ qu'à la question précédente). Par ailleurs, pour placer l'origine O sur le dessin, il suffit de translater A du vecteur $-\overrightarrow{v}$, puisque l'on a :

$$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{v}\,.$$

On obtient donc le dessin suivant :



Exercice 3. Sur une feuille de papier, dessiner un parallélogramme $ABCD$. On donne aussi :

$$d : \overrightarrow{AM} = (2-t)\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}t\overrightarrow{DC}\,, \ t \in \mathbb{R}\,.$$

a. Où se trouve le point M lorsque $t = 2$? Et lorsque $t = 1$?

b. Montrer que d est une droite et en donner un vecteur directeur. Tracer d sur le dessin.

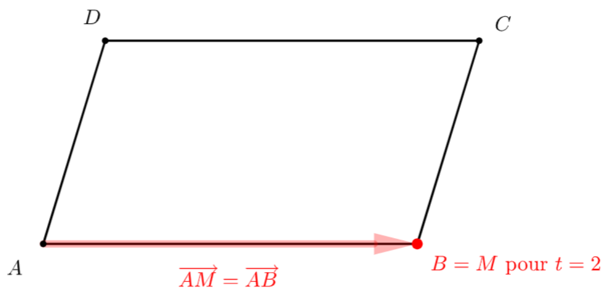
c. On note I le point d'intersection de d et (AC). Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

Solution:

a. Pour $t = 2$ on a :

$$\overrightarrow{AM} = (2-2)\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \text{ et donc } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \ \ \text{(car } ABCD \text{ est un parallélogramme)}$$

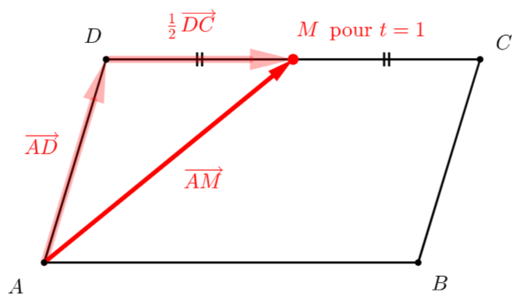
On en déduit que M se trouve en B.



Pour $t = 1$ on trouve :

$$\overrightarrow{AM} = (2-1)\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}1\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\,.$$

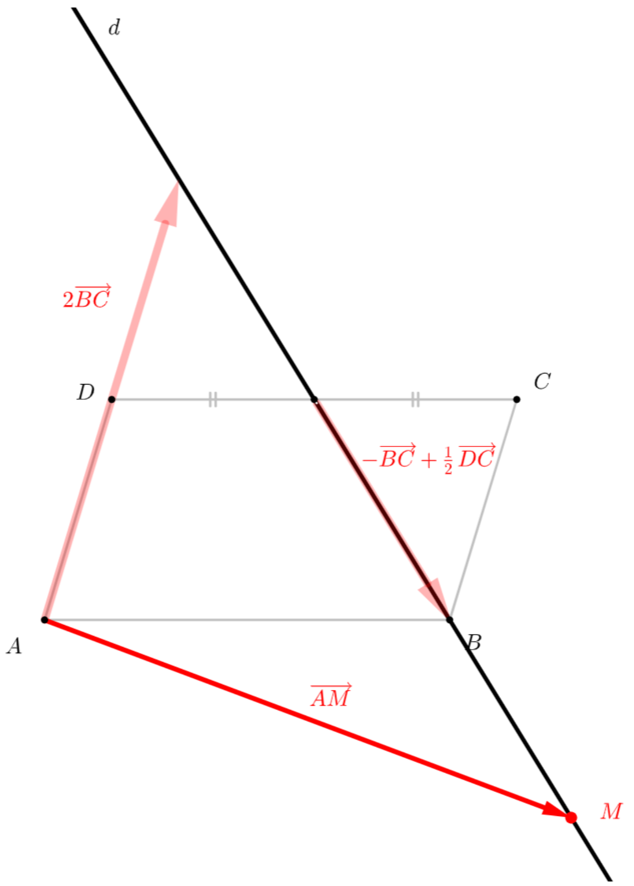
Le point M se trouve alors au milieu du segment CD.



b. Réécrivons l'équation de d sous la forme :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} + t(-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC})\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Sous cette forme, on reconnait bien l'équation d'une droite dirigée par le vecteur (non nul) $-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Pour la tracer sur le dessin, il n'y a plus qu'à relier les deux points identifiés au a.



c. Commençons par écrire une équation vectorielle de la droite (AC) vue depuis A (on choisit le même point d'observation qui a été utilisé pour écrire l'équation vectorielle de d) :

$$(AC) : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{DC}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Le point d'intersection I de d et (AC) se trouve alors en cherchant les réels s et t vérifiant :

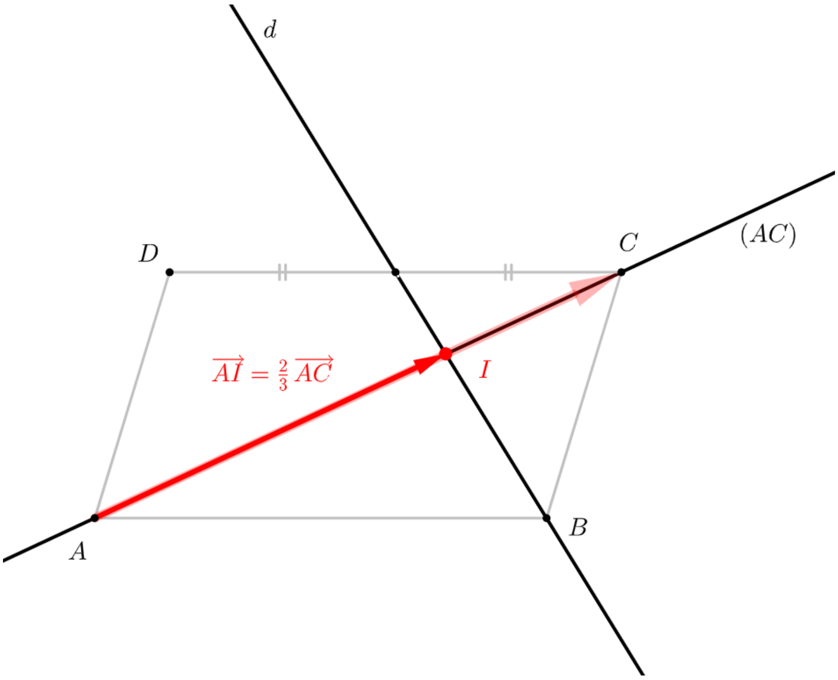
$$\overrightarrow{AI} = (2-s)\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}s\overrightarrow{DC} = t\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{DC}.$$

Comme $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont pas colinéaires, on peut identifier leurs coefficients dans l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{cases} 2-s=t \\ \frac{1}{2}s=t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2-2t=t \\ s=2t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t=\frac{2}{3} \\ s=\frac{4}{3}\,. \end{cases}$$

On trouve alors :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\,.$$



Exercice 4. On donne un triangle ABC vérifiant :

$$\|\overrightarrow{AB}\|=6 \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AC}\|=3\,.$$

On note d la bissectrice en A et I le point sur AB d'abscisse $\frac{2}{3}$ dans le repère $(A,\overrightarrow{AB})$.

a. Ecrire une équation vectorielle de la droite d vue depuis A.
b. Calculer le vecteur $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
c. Ecrire une équation vectorielle de la droite (CI), vue depuis A, en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
d. On note J le point d'intersection de d et (CI). Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

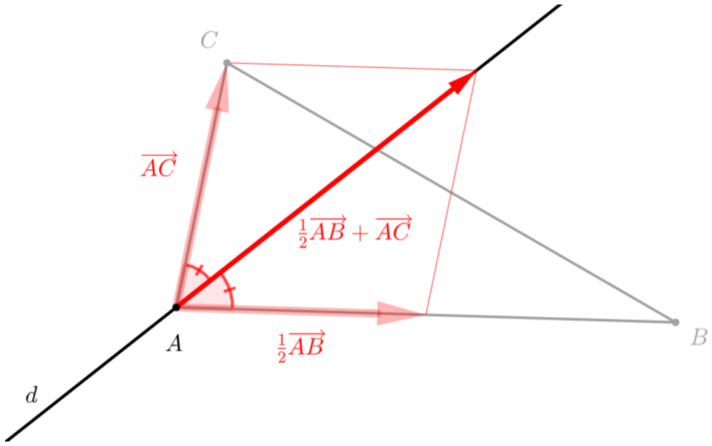
Solution:

a. Comme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est deux fois plus long que $\overrightarrow{AC}$, on sait que les vecteurs suivants sont directeurs de d :

$$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\,,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\,,\ \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\ \ldots$$

Voici un exemple d'équation vectorielle pour d :

$$d:\overrightarrow{AM}=t(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\,,\ t\in\mathbb{R}\,.$$



b. Par définition de l'abscisse, on a :

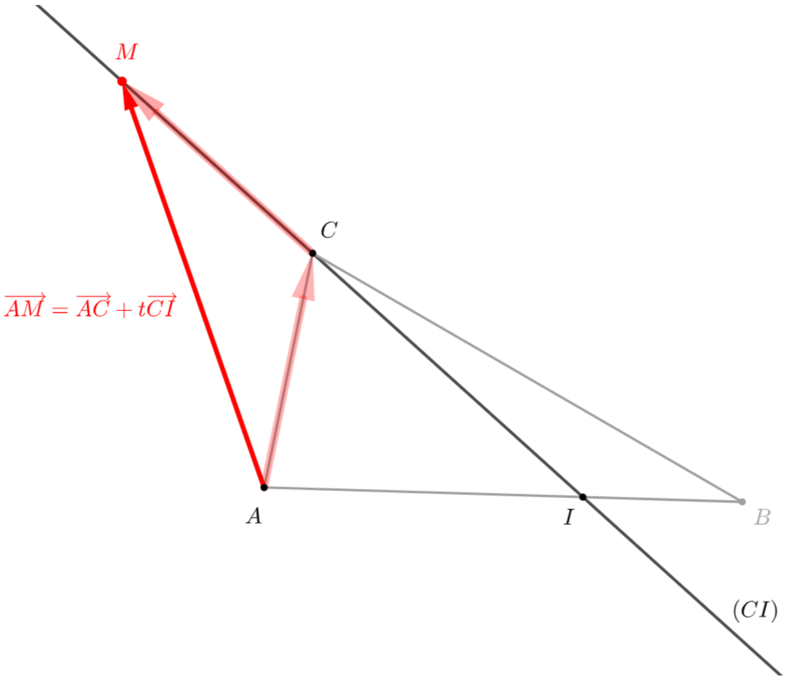
$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\,.$$

On obtient alors :

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\,.$$

c. La droite (CI) passe par C et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CI}$. Elle admet donc pour équation vectorielle :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + t(-\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$



d. Le point d'intersection J de d et (CI) se trouve en cherchant les réels s et t vérifiant :

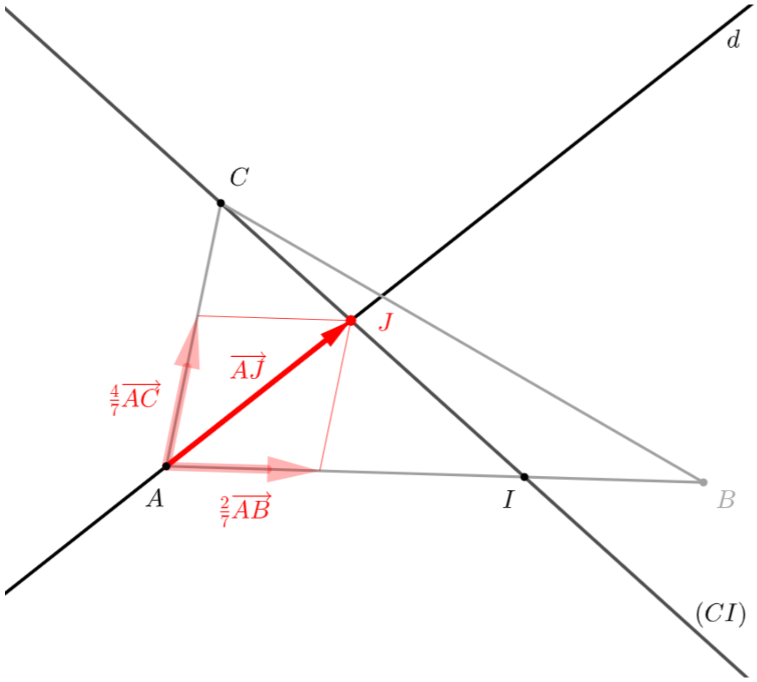
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}s\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}.$$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, on peut identifier leurs coefficients dans l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{cases} \frac{s}{2} = \frac{2t}{3} \\ s = 1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{4t}{3} \\ \frac{4t}{3} = 1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{4t}{3} \\ \frac{7t}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{4}{7} \\ t = \frac{3}{7}\,. \end{cases}$$

On trouve alors :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\,.$$



Exercice 5. On donne un triangle ABC non-aplati dont on note I, J, K les milieux respectifs des côtés BC, AC, AB.

a. Ecrire des équations vectorielles des médianes (BJ) et (CK), vues depuis le point A, en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

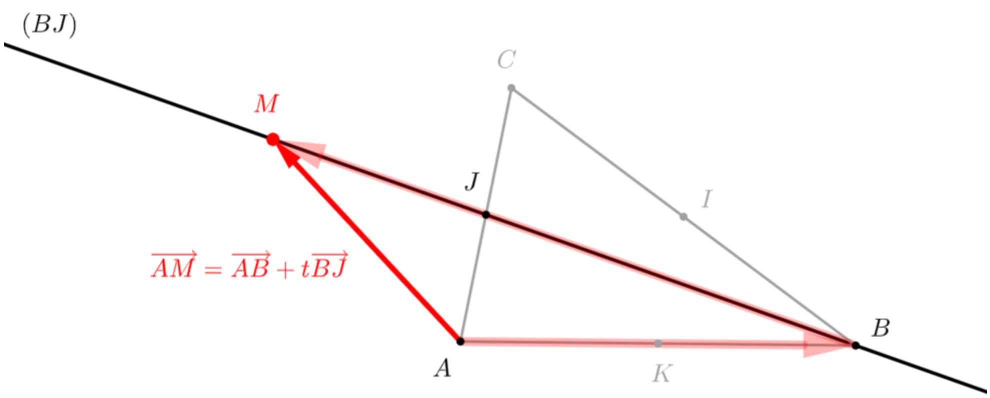
b. On note G le point d'intersection de (BJ) et (CK). Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Montrer que G se trouve aussi sur la médiane (AI) issue de A. *Indication : comparer* $\overrightarrow{AG}$ *et* $\overrightarrow{AI}$.

d. Prouver l'égalité vectorielle :
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}\,.$$

Solution:

a. La médiane (BJ) passe par B et est dirigée par le vecteur :
$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,.$$
Elle admet donc pour équation vectorielle :
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t(-\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}) = (1-t)\overrightarrow{AB} + \tfrac{t}{2}\overrightarrow{AC}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$



De la même façon, la médiane (CK) passe par C et est dirigée par le vecteur :
$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\,.$$
Elle admet donc pour équation vectorielle :
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + t(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \tfrac{t}{2}\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

b. Le point d'intersection G de (BJ) et (CK) se trouve en cherchant les réels s et t vérifiant :

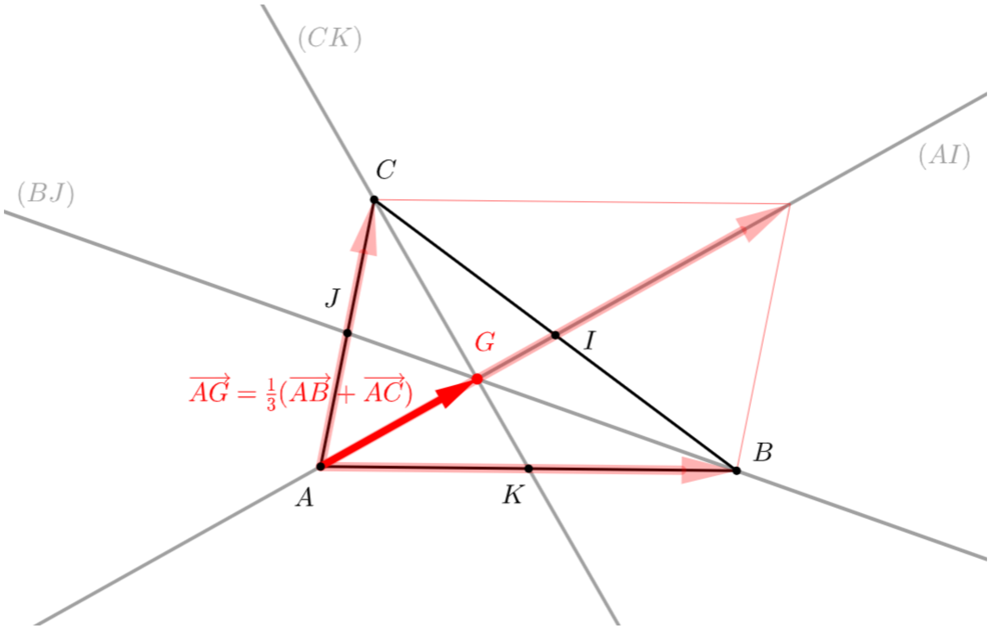
$$\overrightarrow{AG} = (1-s)\overrightarrow{AB} + \tfrac{s}{2}\overrightarrow{AC} = \tfrac{t}{2}\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}.$$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, on peut identifier leurs coefficients dans l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{cases} 1-s = \frac{t}{2} \\ \frac{s}{2} = 1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2-2s \\ \frac{s}{2} = 2s-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2-2s \\ s = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad s = t = \tfrac{2}{3}.$$

On trouve alors :

$$\overrightarrow{AG} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$



c. Cherchons à exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

D'après le résultat trouvé au b. on voit donc maintenant que :

$$\overrightarrow{AG} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires, les points A, G et I sont alignés. Autrement dit, G appartient bien à la médiane (AI) issue de A. Ce point se trouve donc à **l'intersection des trois médianes du triangle** ABC.

d. En utilisant le résultat trouvé au b. on obtient :

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Exercice 6. hello

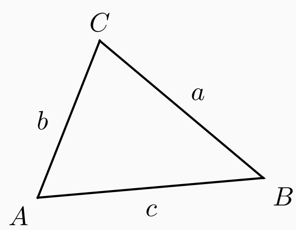
On donne un triangle ABC dont on note a, b, c les longueurs des côtés comme ci-contre.

a. Ecrire des équations vectorielles des trois bissectrices de ABC.

b. Montrer qu'elles s'intersectent en un point I dont on donnera les coordonnées.

c. Prouver l'égalité vectorielle suivante :

$$a\,\overrightarrow{AI} + b\,\overrightarrow{BI} + c\,\overrightarrow{CI} = \vec{0}.$$



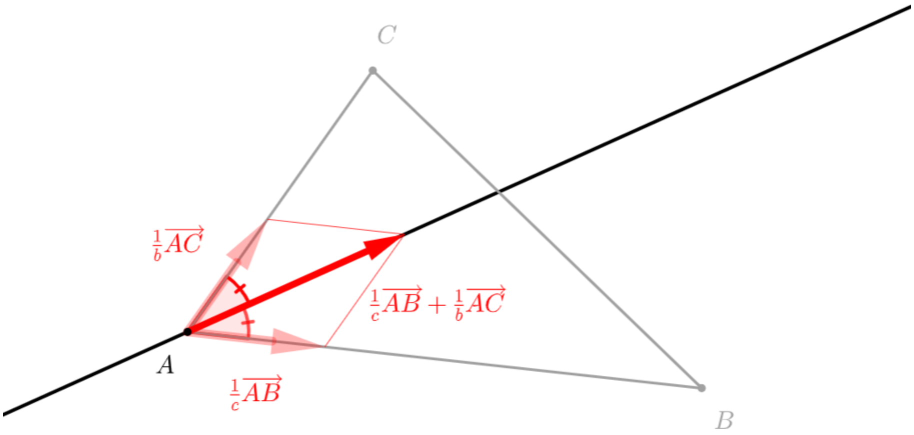
Solution:

a. La bissectrice en A passe par A et est dirigée par le vecteur :

$$\tfrac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{b}\overrightarrow{AC}$$

Elle admet donc pour équation vectorielle :

$$\overrightarrow{AM} = t(\tfrac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{b}\overrightarrow{AC})\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$



On raisonne de la même manière pour les deux autres bissectrices. Celle en B passe par B et est dirigée par :

$$\tfrac{1}{c}\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{a}\overrightarrow{BC}$$

Vue depuis A, elle admet donc pour équation vectorielle :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t(\tfrac{1}{c}\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{a}\overrightarrow{BC})\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

La bissectrice en C passe par C et est dirigée par :

$$\tfrac{1}{b}\overrightarrow{CA} + \tfrac{1}{a}\overrightarrow{CB}$$

Vue depuis A, elle admet donc pour équation vectorielle :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + t(\tfrac{1}{b}\overrightarrow{CA} + \tfrac{1}{a}\overrightarrow{CB})\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

b. D'après le a., le point d'intersection I des bissectrices en A et B se trouve en cherchant les réels s et t vérifiant :

$$\overrightarrow{AI} = s(\tfrac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{b}\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + t(\tfrac{1}{c}\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{a}\overrightarrow{BC}).$$

Ecrivons la dernière égalité uniquement en utilisant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

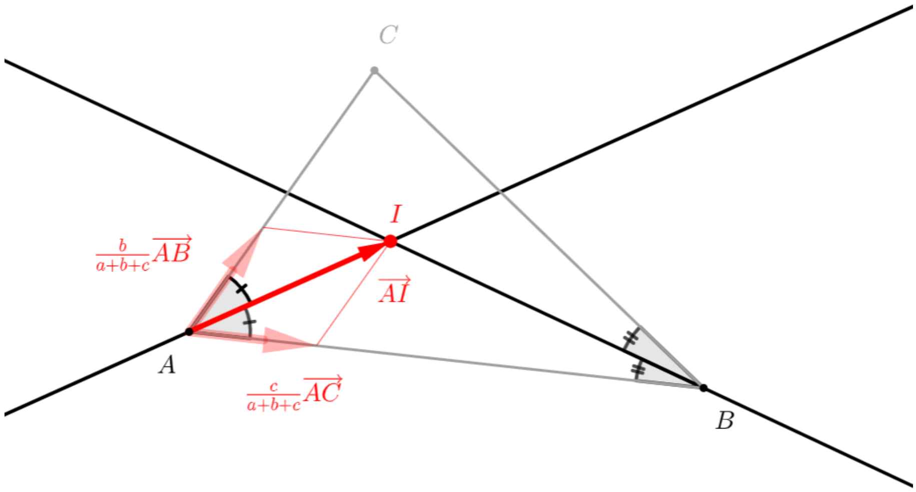
$$\tfrac{s}{c}\overrightarrow{AB} + \tfrac{s}{b}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + t(-\tfrac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{a}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})) = (1 - \tfrac{t}{c} - \tfrac{t}{a})\overrightarrow{AB} + \tfrac{t}{a}\overrightarrow{AC}.$$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, on peut identifier leurs coefficients dans l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{cases} \frac{s}{c} = 1 - \frac{t}{c} - \frac{t}{a} \\ \frac{s}{b} = \frac{t}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{ac}t = 1 - \frac{t}{c} - \frac{t}{a} \\ s = \frac{b}{a}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bt = ac - at - ct \\ s = \frac{b}{a}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{ac}{a+b+c} \\ s = \frac{bc}{a+b+c} \end{cases}$$

En injectant ces valeurs ci-dessus, on trouve alors :

$$\overrightarrow{AI} = \tfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \tfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\,.$$



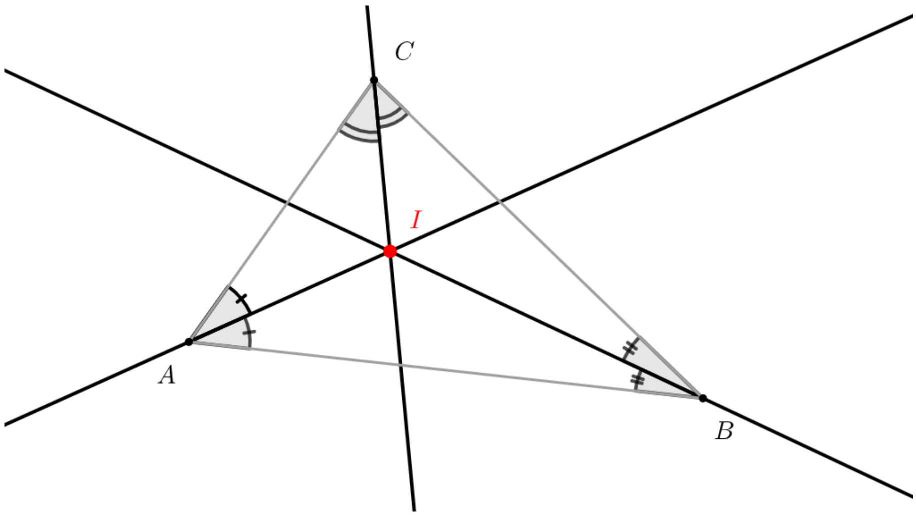
Il nous reste alors à contrôler que I appartient aussi à la bissectrice en C. Pour cela, cherchons à voir que le vecteur $\overrightarrow{CI}$ est colinéaire au vecteur directeur :

$$\tfrac{1}{b}\overrightarrow{CA} + \tfrac{1}{a}\overrightarrow{CB}$$

de cette bissectrice. Grâce à l'égalité obtenue ci-dessus, on trouve :

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} = \tfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \tfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \tfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} - \tfrac{a+b}{a+b+c}\overrightarrow{AC} = \cdots$$
$$\cdots = \tfrac{b}{a+b+c}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \tfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{AC} = \tfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{CB} + \tfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{CA} = \tfrac{ab}{a+b+c}(\tfrac{1}{b}\overrightarrow{CA} + \tfrac{1}{a}\overrightarrow{CB})$$

On a donc bien montré que I est sur la bissectrice en C. Ce point se trouve donc à **l'intersection des trois bissectrices du triangle ABC**.



c. En utilisant le résultat trouvé au b. on obtient :

$$(a+b+c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \quad\Leftrightarrow\quad a\overrightarrow{AI} + b(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB}) + c(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0} \quad\Leftrightarrow\quad a\,\overrightarrow{AI} + b\,\overrightarrow{BI} + c\,\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0}\,.$$