Série 2

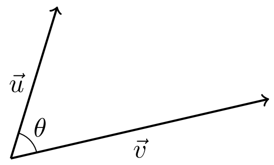
Exercice 1. Sachant que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesurent respectivement 3 et 5 et forment entre eux un angle de 60° :

a. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ puis déterminer le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

b. Quelle est la norme du vecteur $2\vec{u} + \vec{v}$? *Indication : calculer le carré de cette norme.*

c. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte à ce que le vecteur $\vec{u} + \alpha\vec{v}$ soit orthogonal à $\vec{u}$.

Solution: Figure d'étude :



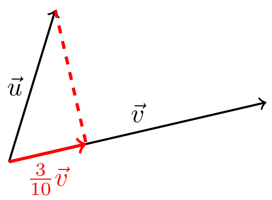
On a donc $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\theta = 60°$.

a. Par définition du produit scalaire, on trouve :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta = 3 \cdot 5 \cdot \cos(60°) = \tfrac{15}{2}.$$

Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est donc :

$$p_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{3}{10}\vec{v}.$$



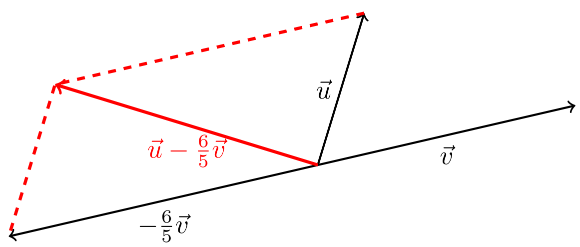
b. On trouve :

$$\|2\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) = 4 \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{=\|\vec{u}\|^2=9} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{=\|\vec{v}\|^2=25} + 4\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{=\frac{15}{2}} = 91.$$

La norme de $2\vec{u} + \vec{v}$ vaut donc $\sqrt{91} \simeq 9.53$.

c. Le réel α vérifie la condition demandée si et seulement si :

$$\underbrace{(\vec{u} + \alpha\vec{v}) \cdot \vec{u}}_{=\|\vec{u}\|^2+\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}} = 0 \text{ c'est-à-dire } 9 + \tfrac{15}{2}\alpha = 0 \text{ ou encore } \alpha = -\tfrac{6}{5}.$$



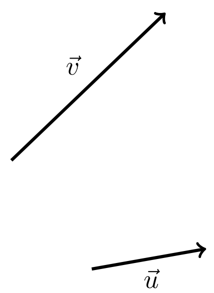
Exercice 2. Sur une feuille de papier, dessiner deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Dans chacun des cas suivants, représenter sur votre dessin les vecteurs $\vec{w}$ du plan vérifiant la condition donnée. Justifier votre construction.

a. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

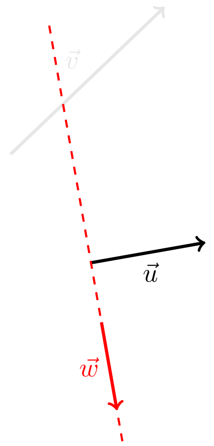
b. $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = 3\vec{u} \cdot \vec{w}$. *Indication : se ramener à un produit scalaire nul.*

c. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v}$. *Indication : interpréter la condition en terme de projection orthogonale.*

Solution: Figure d'étude :



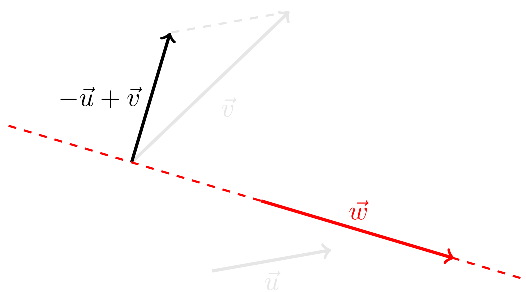
a. On sait qu'un vecteur $\vec{w}$ vérifie $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ si et seulement s'il est orthogonal à $\vec{w}$. Autrement dit, si et seulement s'il est directeur de la droite dessinée en pointillés rouges ci-dessous (ou de n'importe quelle droite orthogonale à $\vec{u}$).



b. On commence par transformer la condition proposée en utilisant les règles de calcul algébrique vérifiées par le produit scalaire :

$$(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = 3\vec{u} \cdot \vec{w} \Leftrightarrow (2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} - 3\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow (-\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0.$$

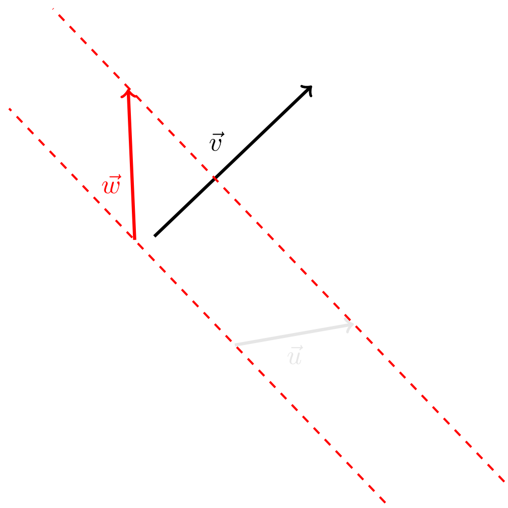
Les vecteurs recherchés ici sont donc ceux orthogonaux à $-\vec{u} + \vec{v}$. Ce sont donc exactement ceux qui sont directeurs de la droite représentée en pointillés rouges ci-dessous (ou de toute autre droite qui lui est parallèle) :



c. Une manière d'interpréter la condition donnée ici est de dire que les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$ ont la même projection vectorielle sur $\vec{v}$. En effet :

$$p_{\vec{v}}(\vec{w}) = p_{\vec{v}}(\vec{u}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Pour se représenter tous les vecteurs satisfaisant cette condition, on peut tracer les deux droites orthogonales à $\vec{v}$ passant par les extrémités de $\vec{u}$ (ou plus précisément de la flèche utilisée pour représenter $\vec{u}$). Les vecteurs recherchés sont ceux obtenus en joignant un point de la première droite (passant par "l'origine" de $\vec{u}$) à un point de la deuxième (celle passant par "l'extrémité" de $\vec{u}$).



Exercice 3. Dans le plan, on donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{5}, \quad 2\vec{u} + \vec{v} \text{ et } 11\vec{u} - 7\vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

a. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et en déduire l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte à ce que la projection orthogonale de $\vec{u} + \alpha\vec{v}$ sur $\vec{u}$ soit de norme 2.

c. Existe-t-il un vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} \cdot \vec{u} = 1$ et $\vec{w} \cdot \vec{v} = 3$? Si oui, décrire ce vecteur en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Solution:

a. Pour calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, utilisons les informations données dans l'énoncé :

$$(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (11\vec{u} - 7\vec{v}) = 22\|\vec{u}\|^2 - 14\vec{u} \cdot \vec{v} + 11\vec{v} \cdot \vec{u} - 7\|\vec{v}\|^2 = 9 - 3\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ d'où l'on déduit } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3.$$

En particulier, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ font entre eux un angle θ vérifiant :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta, \text{ autrement dit, } \cos\theta = \tfrac{3}{\sqrt{10}}.$$

On trouve approximativement $\theta \simeq 18,4°$.

b. D'après la formule de projection, on a :

$$p_{\vec{u}}(\vec{u} + \alpha\vec{v}) = \frac{(\vec{u} + \alpha\vec{v}) \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = (1 + \alpha\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2})\vec{u} = (1 + \tfrac{3}{2}\alpha)\vec{u} \text{ et donc } \|p_{\vec{u}}(\vec{u} + \alpha\vec{v})\| = \left|1 + \tfrac{3}{2}\alpha\right| \sqrt{2}.$$

La condition demandée est donc satisfaite si et seulement si :

$$\left|1 + \tfrac{3}{2}\alpha\right| \sqrt{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \tfrac{3}{2}\alpha = \pm\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tfrac{2}{3}(-1 \pm \sqrt{2}).$$

c. D'après le résultat du a., on peut affirmer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'exprime comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{u} = 1 \\ \vec{w} \cdot \vec{v} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\|\vec{u}\|^2 + \beta\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \\ \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\|\vec{v}\|^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ 3\alpha + 5\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

On voit donc qu'il existe une unique solution au problème posé, à savoir $\vec{w} = -4\vec{u} + 3\vec{v}$.

Exercice 4. Dans un parallélogramme $ABCD$, les côtés AB et AD mesurent 6 et $\sqrt{13}$ et la diagonale AC mesure 5.

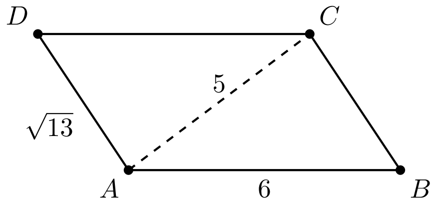
a. Combien mesure l'autre diagonale ?

b. Quel est le lieu des points M tels que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$?

c. Calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$. Quel est le lieu des points M tels que $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DM} = 25$?

Solution:

Figure d'étude :



a. Commençons par calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ en s'aidant des données. On trouve :

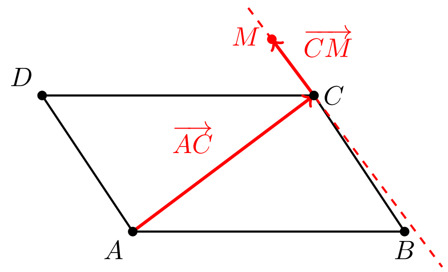
$$\underbrace{\|\overrightarrow{AC}\|^2}_{25} = \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2 = \underbrace{\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AD}\|^2}_{49} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} \text{ si bien que } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -12.$$

On obtient alors :

$$\|\overrightarrow{BD}\|^2 = \|-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2 = \underbrace{\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AD}\|^2}_{49} - 2\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}_{-12} = 73,$$

d'où l'on déduit que la diagonale BD mesure $\sqrt{73}$.

b. Il s'agit de la droite perpendiculaire à la diagonale (AC) et passant par C. C'est donc la droite représentée en pointillés rouges ci-dessous :



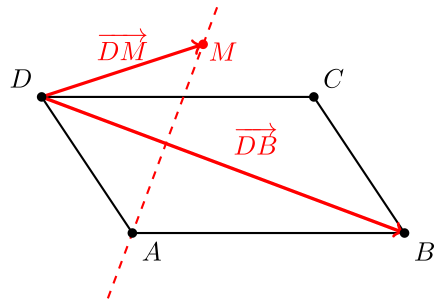
c. On trouve :

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{DA}\|^2 - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 13-(-12) = 25.$$

En observant alors que :

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DM} = 25 \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0,$$

on voit que le lieu recherché est la perpendiculaire à (BD) issue de A.



Exercice 5. Dans le plan, on donne deux points A et B distants de $\delta > 0$.

a. En faisant intervenir le milieu du segment AB, montrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 \geqslant \tfrac{1}{2}\delta^2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} \geqslant -\tfrac{1}{4}\delta^2.$$

b. Montrer que le lieu des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est un cercle. En donner le centre et le rayon.

c. Plus généralement, quel est le lieu des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est une constante fixée ?

Solution:

a. Notons I le milieu de AB. On calcule alors :

$$\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 = \underbrace{\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\|^2}_{\|\overrightarrow{MI}\|^2+\|\overrightarrow{IA}\|^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}} + \underbrace{\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\|^2}_{\|\overrightarrow{MI}\|^2+\|\overrightarrow{IB}\|^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}} = \cdots$$

$$\cdots = 2\|\overrightarrow{MI}\|^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}} + \underbrace{\|\overrightarrow{IA}\|^2}_{\frac{1}{4}\delta^2} + \underbrace{\|\overrightarrow{IB}\|^2}_{\frac{1}{4}\delta^2} = \underbrace{2\|\overrightarrow{MI}\|^2}_{\geqslant 0} + \tfrac{1}{2}\delta^2 \geqslant \tfrac{1}{2}\delta^2.$$

Ceci montre la première inégalité. On procède de la même manière pour la deuxième :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = \|\overrightarrow{MI}\|^2 + \overrightarrow{MI}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}) + \underbrace{\overrightarrow{IA}}_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}\cdot\underbrace{\overrightarrow{IB}}_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} = \underbrace{\|\overrightarrow{MI}\|^2}_{\geqslant 0} - \frac{1}{4}\delta^2 \geqslant -\frac{1}{4}\delta^2.$$

b. D'après le calcul effectué en a., on a :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \frac{1}{4}\delta^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \|\overrightarrow{MI}\| = \frac{1}{2}\delta.$$

Autrement dit, le lieu recherché est formé des points M à distance $\frac{1}{2}\delta$ de I : c'est le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}\delta$ (autrement dit, le cercle de diamètre AB).

c. Donnons-nous une constante $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors, toujours en utilisant le résultat trouvé en a. :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \alpha \quad\Leftrightarrow\quad \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \frac{1}{4}\delta^2 = \alpha \quad\Leftrightarrow\quad (\alpha \geqslant -\frac{1}{4}\delta^2 \text{ et } \|\overrightarrow{MI}\| = \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}\delta^2}).$$

Autrement dit, le lieu recherché est vide si $\alpha < -\frac{1}{4}\delta^2$ et c'est le cercle centré en I et de rayon $\sqrt{\alpha+\frac{1}{4}\delta^2}$ sinon.

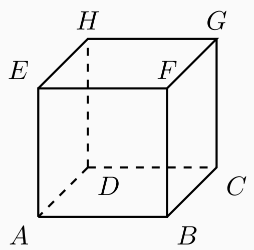
Exercice 6.

La figure ci-contre représente un cube de côté 2.

a. Quels sont les points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$?

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EB}$.

c. Sachant que M appartient au plan (BDF), calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EM}$. *Indication : que peut-on dire des vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BM}$ *?*



Solution:

a. La condition donnée ici est remplie si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont orthogonaux, autrement dit si et seulement si la droite passant par C et M est perpendiculaire à la droite (HG) (ou aussi à la droite (CD)). Les points recherchés sont donc ceux se trouvant sur le plan (BCF).

b. Pour calculer ce produit scalaire, décomposons $\overrightarrow{EB}$ en "passant par A". On obtient :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}) = \underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EA}}_{=0 \text{ car } \widehat{EAC}=90^\circ} + \underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}_{=\|\overrightarrow{AC}\|\|\overrightarrow{AB}\|\cos\widehat{BAC}} = 2\sqrt{2}\times 2\times\cos\frac{\pi}{4} = 4.$$

c. La droite (AC) est perpendiculaire au plan (BDF). Comme le vecteur $\overrightarrow{BM}$ est tracé dans ce plan, on voit donc qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$, ou, autrement dit, que :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM} = 0.$$

En utilisant une relation de Chasles, on trouve alors :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BM}) = \underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EB}}_{=4 \text{ d'après b.}} + \underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM}}_{=0} = 4.$$