Série 11

Exercice 1. L'espace est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, donner les coordonnées d'un point et celles de deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan π proposé.

a. $\pi : 2x + y - 3z = 7$

b. $\pi : \begin{cases} x = t \\ y = 3 + s \\ z = -1 - t \end{cases}, \ s, t \in \mathbb{R}$

c. $\pi : 2x + z = 5.$

Solution: Dans chaque cas on cherche donc à produire :

$$A \in \pi \quad \text{et} \quad \vec{u}, \vec{v} \ \text{directeurs de } \pi \text{ et non colinéaires}.$$

a. On peut prendre ici :

$$\underbrace{A(2,0,-1)}_{\text{solution de } 2x+y-3z=7}, \qquad \underbrace{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \ \vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}_{\text{solutions non proportionnelles de } 2x+y-3z=0}.$$

b. Dans ce cas on peut poser :

$$\underbrace{A(0,3,-1)}_{\text{pour } s=t=0}, \quad \underbrace{\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \ \vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\text{coefficients devant } s \text{ et } t}.$$

c. Pour le plan proposé on peut prendre :

$$\underbrace{A(2,0,1)}_{\text{solution de } 2x+z=5}, \qquad \underbrace{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \ \vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{solutions non proportionnelles de } 2x+z=0}.$$

Exercice 2. Dans l'espace muni d'un repère on considère le plan π passant par les points :

$$A(3,-1,2), \ B(4,-1,-1) \ \text{ et } \ C(2,0,2).$$

a. Déterminer des équations paramétriques et cartésiennes de π.

b. Si le repère est orthonormé, quelle distance sépare l'origine du plan π ?

Solution:

a. Le plan π passe par $A(3,-1,2)$ et est dirigé par les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} \ \text{et} \ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Il admet donc pour équations paramétriques :

$$\pi : \begin{cases} x = 3 + s - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3s \end{cases}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une équation cartésienne on peut éliminer les paramètres :

$$\exists s,t\in\mathbb{R}\begin{cases}x=3+s-t\\ y=-1+t\\ z=2-3s\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\exists t\in\mathbb{R}\begin{cases}y=-1+t\\ z+3x=11-3t\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad 3y+(z+3x)=-3+11\quad\Leftrightarrow\quad 3x+3y+z=8\,.$$

On peut aussi utiliser le déterminant :

$$\pi:\begin{vmatrix}1&-1&x\\0&1&y\\-3&0&z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\-3&0\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}1&-1\\-3&0\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}z=3x+3y+z=9-3+2=8\,.$$

b. Appliquons la formule donnant la distance d'un point à un plan en repère orthonormé. On obtient :

$$\delta(O,\pi)=\frac{|3\cdot0+3\cdot0+0-8|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{19}}\,.$$

Exercice 3. Dans l'espace muni d'un repère, on donne :

$$A(-1,5,1),\quad d:x-1=3-y=2z+1\quad\text{et}\quad\pi:x-2z+3=0.$$

a. Le point A appartient-il à d ? à π ? La droite d est-elle parallèle à π ?

b. Déterminer une équation cartésienne du plan ρ défini par A et d.

Solution:

a. Mettons les coordonnées de A dans les équations de d et g. On trouve :

$$-1-1=3-5\neq2+1\text{ et }-1-2+3=0$$

Par conséquent A appartient à π mais pas à d. Réécrivons les équations de d sous forme fractionnaire :

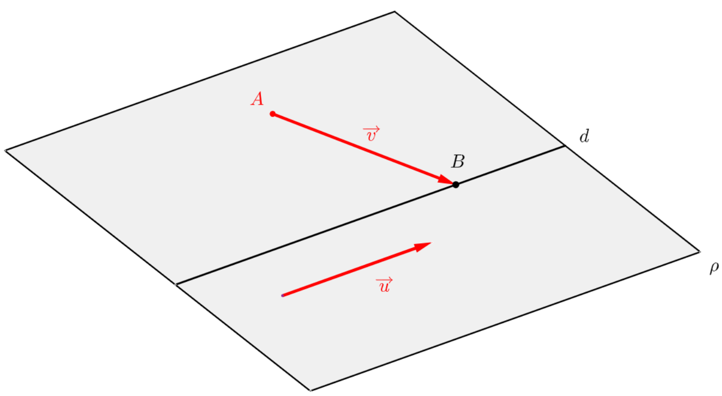
$$d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+\frac12}{\frac12}\,.$$

Sous cette forme, on voit que le vecteur :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\\frac12\end{pmatrix}$$

est directeur de d. Or $\vec{u}$ est aussi directeur de π, puisqu'il vérifie l'équation homogène $x-2z=0$ du plan vectoriel associé à π. Par conséquent, d est parallèle (strictement) à π.

b. Figure d'étude :



Le plan ρ recherché contient A et est dirigé par le vecteur $\vec{u}$ trouvé au a. (car d est contenu dans ρ). Pour trouver un autre vecteur directeur de ρ non colinéaire à $\vec{u}$, joignons A à un point B de d, par exemple celui de coordonnées $(2,2,0)$. On obtient de cette manière le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\-1\end{pmatrix}$. Le plan ρ admet donc une équation cartésienne du type :

$$\begin{vmatrix}x&2&3\\y&-2&-3\\z&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&2&3\\x+y&0&0\\z&1&-1\end{vmatrix}=-(x+y)\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}=5(x+y)=\text{cte}.$$

La valeur de la constante est obtenue en exprimant que ρ passe par A. On trouve :

$$x + y = 4.$$

Exercice 4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne :

$$A(1, -2, 1), \quad \pi : x - 2y + z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad \rho : x + y - z + 2 = 0.$$

a. Calculer des équations de la droite $d = \pi \cap \rho$.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan σ contenant A et perpendiculaire à d.

Solution:

a. Pour identifier la droite d, résolvons le système obtenu en mettant ensemble les équations de π et ρ :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Les coordonnées des points de d ont donc la forme suivante :

$$(x, y, z) = (x, 2x - 1, 3x + 1) = (0, -1, 1) + x(1, 2, 3).$$

On en déduit que d passe par le point $B(0, -1, 1)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Elle admet donc pour équations cartésiennes :

$$d : x = \tfrac{y+1}{2} = \tfrac{z-1}{3}.$$

b. Comme le repère utilisé est orthonormé, un plan perpendiculaire à d a une équation cartésienne du type :

$$x + 2y + 3z = \text{cte}$$

puisqu'il est normal au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si ce plan passe de plus par A, on voit qu'il admet pour équation :

$$\sigma : x + 2y + 3z = 1 - 4 + 3 = 0.$$

Exercice 5. Dans l'espace, on donne deux plans π et ρ distincts et un point A vérifiant :

$$\pi \text{ et } \rho \text{ non parallèles} \;,\; A \notin \pi \quad \text{et} \quad A \notin \rho\,.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

a. Si une droite est parallèle à π et ρ, alors elle est parallèle à leur intersection.

b. Si une droite intersecte π et ρ, alors elle intersecte $\pi \cap \rho$.

c. Il existe une droite passant par A, intersectant π et n'intersectant pas ρ.

d. Une droite passant par A intersecte forcément π ou ρ.

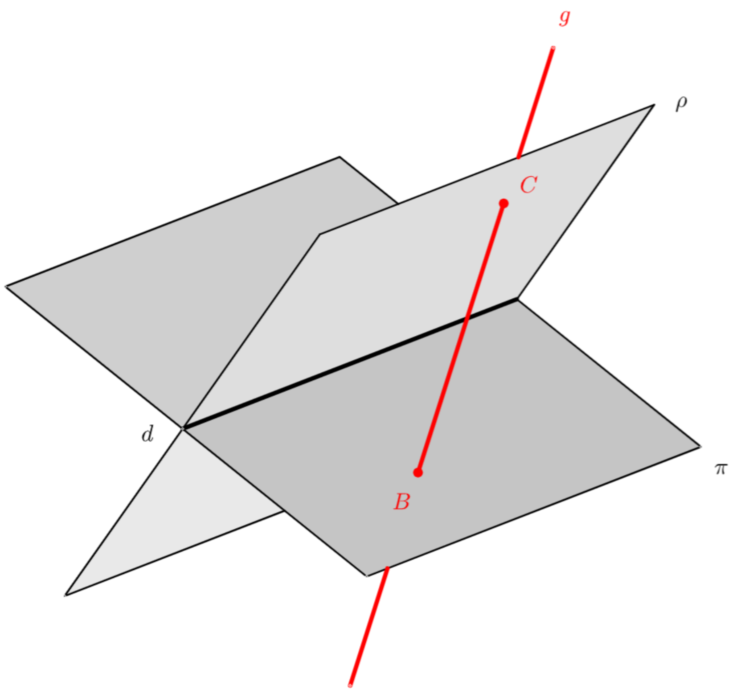
Solution: Remarquons tout d'abord que l'intersection :

$$d = \pi \cap \rho$$

est une droite, car π et ρ sont distincts et non parallèles.

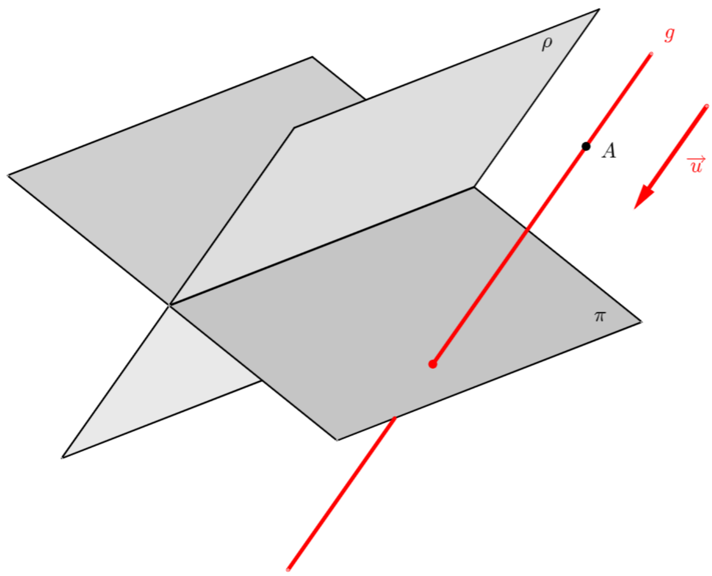
a. C'est vrai. Un vecteur directeur d'une telle droite g doit être directeur à la fois de π et de ρ, et donc de leur intersection d. Par conséquent, d et g partagent un vecteur directeur : elles sont parallèles.

b. C'est faux. Considérons un point B de π et un point C de ρ tous deux situés hors de d et posons $g = (BC)$.



La droite g n'est ni contenue dans π (car sinon C appartiendrait à π), ni parallèle à π (car sinon B n'appartiendrait pas à π). Par conséquent, elle intersecte π uniquement au point B. De même, elle intersecte ρ uniquement au point C. Par conséquent, la droite g intersecte π et ρ mais n'intersecte pas leur intersection $\pi \cap \rho$.

c. C'est vrai. Il suffit de considérer une droite g passant par A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ directeur de ρ mais non directeur de π. Cette droite est en effet parallèle à ρ et sécante à π.



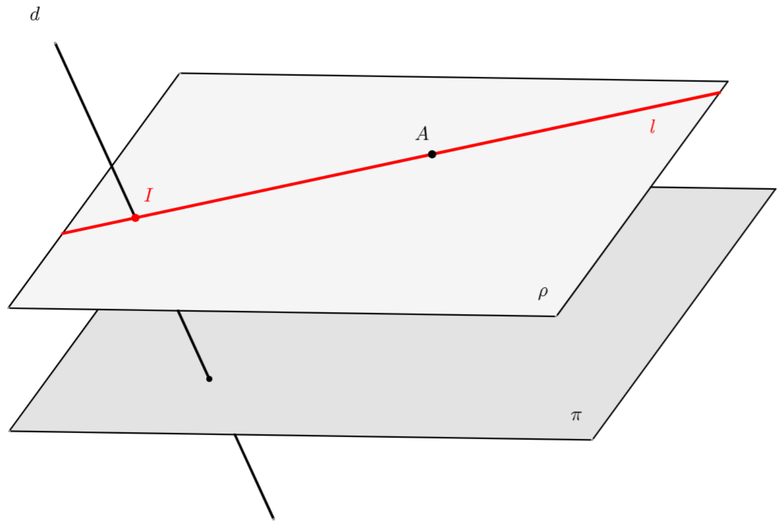
d. C'est faux. La parallèle à d passant par A n'intersecte ni π ni ρ (et c'est la seule droite dans ce cas !).

Exercice 6. Dans l'espace muni d'un repère, on donne le point $A(-3, -2, 1)$, la droite d et le plan π suivant :

$$d : \frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}, \quad \pi : 3x - 5y + 4z = 12.$$

Déterminer des équations cartésiennes d'une droite l passant par A, parallèle à π et intersectant d.

Solution: Figure d'étude :



La droite recherchée passe par A et est parallèle à π : elle est donc contenue dans le plan ρ parallèle à π et passant par A. Pour trouver une équation cartésienne de ce plan ρ, on conserve la partie variable de l'équation de π et on change la constante de sorte à ce que l'équation obtenue soit satisfaite par les coordonnées de A.

$$\rho : 3x - 5y + 4z = -9 + 10 + 4 = 5.$$

La droite d admet pour équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

L'intersection de d et ρ correspond donc à la valeur de t telle(s) que :

$$3(6 + 2t) - 5(-2 - t) + 4(3t) = 5 \quad \text{c'est-à-dire} \quad t = -1.$$

Le plan ρ et la droite d s'intersectent au point $I(4, -1, -3)$. Par ailleurs, la droite l est contenue dans ρ et intersecte d. Elle doit donc passer par I. On en déduit donc que $l = (AI)$. Cette droite passe donc par $A(-3, -2, 1)$ et est dirigée par :

$$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors qu'elle a pour équations cartésiennes :

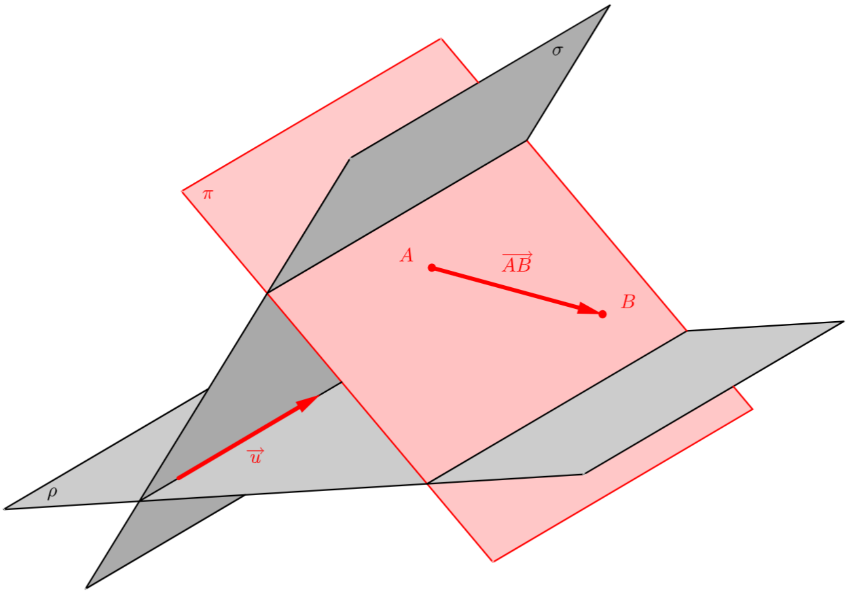
$$l : \frac{x + 3}{7} = y + 2 = \frac{z - 1}{-4}.$$

Exercice 7. Dans l'espace muni d'un repère, on donne :

$$A(-1, 2, 1), \ B(0, 3, \tfrac{5}{2}), \ \rho : x + y - z = 1, \ \sigma : x - 3y + z + 1 = 0.$$

Déterminer une équation cartésienne d'un plan π contenant A et B, et tel que l'intersection $\pi \cap \rho \cap \sigma$ est vide.

Solution: Figure d'étude :



Du plan π on connait déjà un point $A(-1,2,1)$ et un vecteur directeur :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

On aura complètement identifié ce plan dès que l'on aura trouvé un autre vecteur directeur non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Pour cela, observons que l'intersection $\rho\cap\sigma$ est une droite parallèle à π. Pour en trouver un vecteur directeur $\vec{u}$ (qui sera donc aussi directeur de π), il suffit de résoudre le système homogène :

$$\begin{cases}x+y-z=0\\x-3y+z=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+y-z=0\\2x-2y=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}y=x\\z=2x\,.\end{cases}$$

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ est donc directeur de π, si bien que ce plan admet pour équation cartésienne :

$$\pi:\begin{vmatrix}1&1&x\\1&1&y\\\frac{3}{2}&2&z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\\frac{3}{2}&2\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}1&1\\\frac{3}{2}&2\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}z=\tfrac{1}{2}(x-y)=\tfrac{1}{2}(-1-2)=-\tfrac{3}{2}\quad\text{ou encore}\quad x-y+3=0.$$

Exercice 8. Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement (faire un croquis) :

a. $\begin{cases}x+y-2z=1\\2x-3y+z=2\end{cases}$ b. $\begin{cases}x+y+z=3\\x+2y+3z=6\\2x+y=2\end{cases}$ c. $\begin{cases}x-3y-7z=0\\3x+y+9z=10\\7x-y+11z=20.\end{cases}$

Solution:

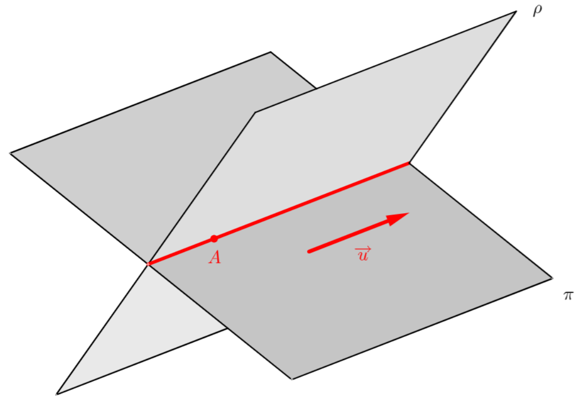
a. On a :

$$\begin{cases}x+y-2z=1\\2x-3y+z=2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+y-2z=1\\-5y+5z=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=1+z\\y=z.\end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc formé des triplets du type :

$$(x,y,z)=(1+z,z,z)=(1,0,0)+z(1,1,1).$$

Interprétation géométrique :



Dans l'espace muni d'un repère, les plans :

$$\pi : x + y - 2z = 1 \quad \text{et} \quad \rho : 2x - 3y + z = 2$$

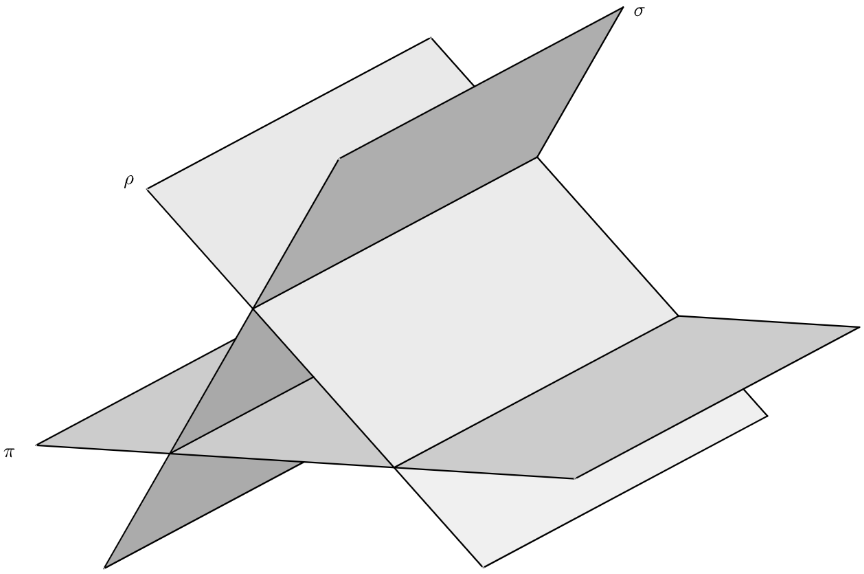
s'intersectent selon la droite passant par $A(1, 0, 0)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

b. On a :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ -y - 2z = -4. \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant manifestement en conflit, le système proposé n'a pas de solution.

Interpétation géométrique :



Dans l'espace muni d'un repère, les plans :

$$\pi : x + y + z = 3, \quad \rho : x + 2y + 3z = 6 \quad \text{et} \quad \sigma : 2x + y = 2$$

vérifient :

$$\pi \cap \rho \cap \sigma = \varnothing\,.$$

Or, ces plans ne sont deux-à-deux ni parallèles ni confondus car leurs directions sont différentes (cela se voit directement car les parties variables de leurs équations ne sont pas proportionnelles). Les deux premiers s'intersectent donc selon une droite, mais cette droite est parallèle au troisième, si bien que l'intersection des trois plans est vide. Les trois plans sont dans la même configuration que les faces d'un Toblérone !

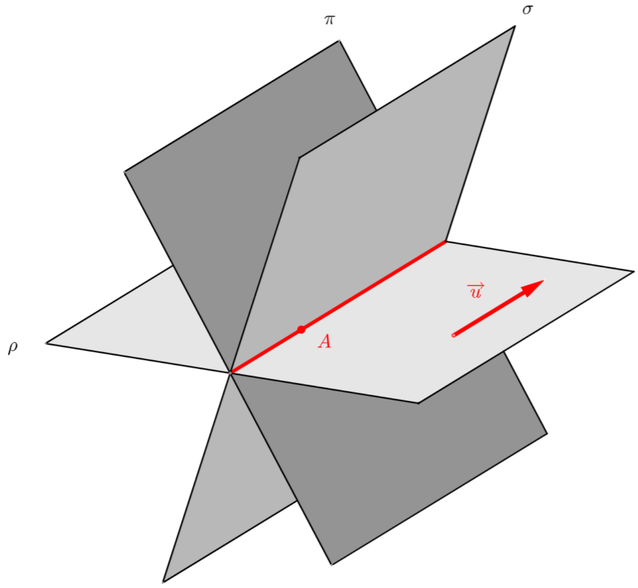
c. On a :

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = 0 \\ 3x + y + 9z = 10 \\ 7x - y + 11z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 7z = 0 \\ 10y + 30z = 10 \\ 7x - y + 11z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 7z = 0 \\ 10y + 30z = 10 \\ 20y + 60z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2z \\ y = 1 - 3z. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc formé des triplets du type :

$$(x, y, z) = (3 - 2z, 1 - 3z, z) = (3, 1, 0) - z(2, 3, -1).$$

Interpétation géométrique :



Dans l'espace muni d'un repère, les plans :

$$\pi : x - 3y - 7z = 0, \quad \rho : 3x + y + 9z = 10 \quad \text{et} \quad \sigma : 7x - y + 11z = 20.$$

s'intersectent selon la droite passant par $A(3, 1, 0)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Ces trois plans sont dans la même configuration que trois pages d'un livre.