Série 10

Exercice 1. Dans l'espace muni d'un repère, on donne :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix},\ \vec{w}\begin{pmatrix}5\\-4\\4\end{pmatrix}.$$

a. Déterminer une équation du plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. Le vecteur $\vec{w}$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$? Si oui, déterminer explicitement les coefficients dans cette combinaison.

Solution:

a. Donnons deux méthodes pour trouver une telle équation.

Méthode 1 (élimination des paramètres). Le vecteur de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ appartient au plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si :

$$\exists s,t\in\mathbb{R}\ \begin{cases}x=2s+4t\\y=-3s+t\\z=s+5t\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\exists t\in\mathbb{R}\ \begin{cases}x-2z=-6t\\y+3z=16t\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad 16(x-2z)+6(y+3z)=0\,.$$

Remarquons qu'il s'agit bien d'une suite d'*équivalences*. En effet, la suite d'implications de gauche à droite est claire, obtenue simplement en faisons des combinaisons des équations. Pour remonter de droite à gauche, on pose successivement :

$$t=\frac{x-2z}{-6}\quad\text{puis}\quad s=z-5t\,.$$

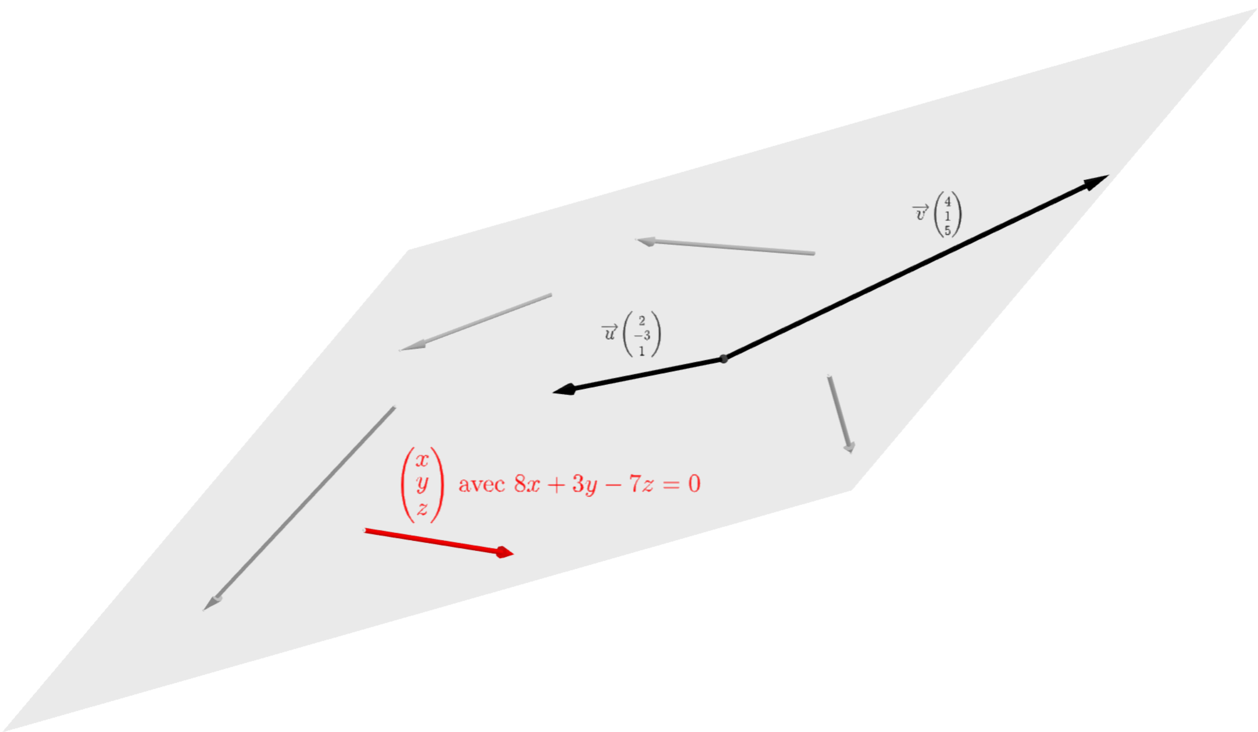
Simplifions alors l'équation trouvée ci-dessus. On obtient :

$$16x-32z+6y+18z=0\quad\Leftrightarrow\quad 16x+6y-14z=0\quad\Leftrightarrow\quad 8x+3y-7z=0\,.$$

Méthode 2 (déterminant). Le vecteur de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ appartient au plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si on a :

$$\begin{vmatrix}2&4&x\\-3&1&y\\1&5&z\end{vmatrix}=0\quad\Leftrightarrow\quad\begin{vmatrix}-3&1\\1&5\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}2&4\\1&5\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}2&4\\-3&1\end{vmatrix}z=0\quad\Leftrightarrow\quad -16x-6y+14z=0\quad\Leftrightarrow\quad 8x+3y-7z=0\,.$$

Voici un dessin illustrant la situation :



b. Les coordonnées de $\vec{w}$ vérifient l'équation trouvée au a. :

$$8 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) - 7 \cdot 4 = 40 - 12 - 28 = 0\,.$$

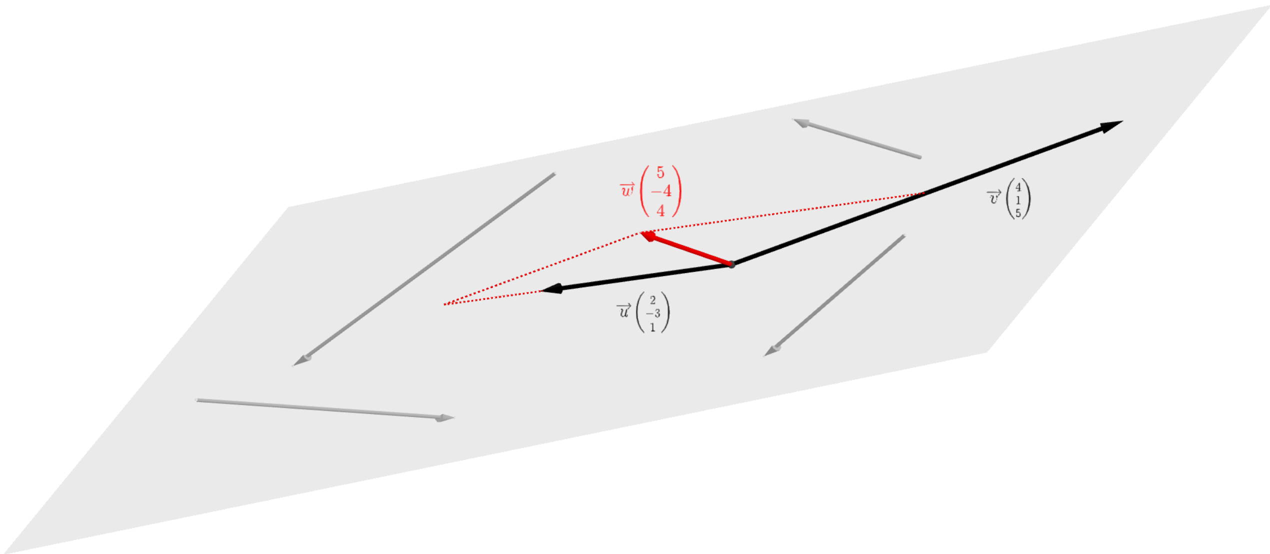
On peut donc affirmer $\vec{w}$ est bien combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par ailleurs, on a aussi vu ci-dessus (Méthode 1) comment calculer le s et le t correspondant :

$$t = \frac{5 - 2 \cdot 4}{-6} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad s = 4 - 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

On a donc :

$$\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\,.$$

Géométriquement :



Exercice 2. Dans l'espace muni d'un repère, on donne le plan vectoriel ainsi que le vecteur suivant :

$$V : x + 3y - 4z = 0 \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

a. Déterminer une base de V, c'est-à-dire deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $V = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

b. Si $\vec{w}$ appartient à V, écrire $\vec{w}$ comme $s\vec{u} + t\vec{v}$ où $\vec{u}, \vec{v}$ sont les vecteurs du a. et s et t sont des fonctions de x, y et z.

c. Contrôler votre résultat du b. sur des exemples, c'est-à-dire des choix concrets de vecteur $\vec{w}$ appartenant à V.

d. Recommencer le a., b. et c. avec une autre base de V.

Solution:

a. Il suffit de prendre deux vecteurs appartenant à V et non colinéaires, par exemple :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}.$$

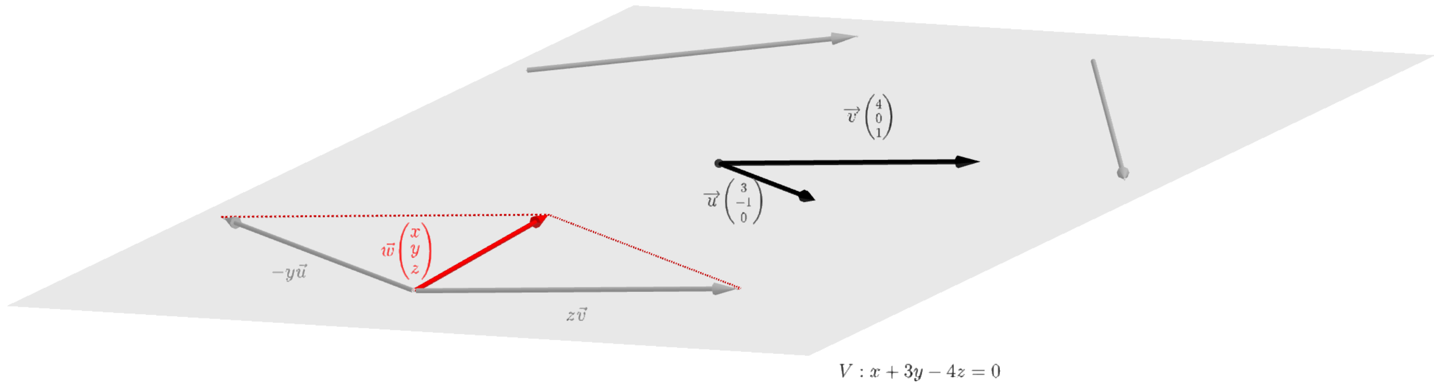
b. Avec le choix de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ fait au a. on a :

$$\vec{w} = s\vec{u} + t\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3s + 4t \\ y = -s \\ z = t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s = -y \\ t = z \\ x = -3y + 4z \end{cases}$$

Dans le dernier système écrit, remarquons que la troisième équation est automatiquement vérifiée puisque $\vec{w}$ appartient à V. On a donc montré :

$$\vec{w} = -y\vec{u} + z\vec{v}\,.$$

Géométriquement, cette décomposition se visualise de la manière suivante :



c. Prenons par exemple $x=y=z=1$. On a alors :

$$\underbrace{\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in V}_{\text{car } 1+3-4=0}, \quad \underbrace{\vec{w}=-\vec{u}+\vec{v}}_{-y=-1 \text{ et } z=1} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Avec $x=5$, $y=-3$ et $z=-1$ on a :

$$\underbrace{\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix}\in V}_{\text{car } 5-9+4=0}, \quad \underbrace{\vec{w}=3\vec{u}-\vec{v}}_{-y=3 \text{ et } z=-1} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\cdots$$

d. Prenons par exemple :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix}.$$

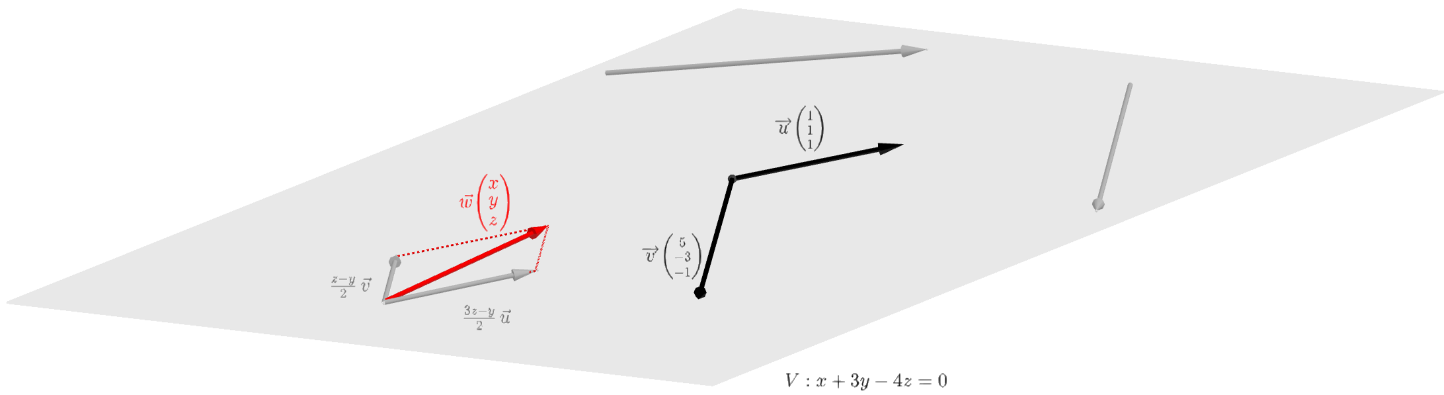
On trouve alors :

$$\vec{w}=s\vec{u}+t\vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=s+5t\\y=s-3t\\z=s-t\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x+5z=6s\\y-3z=-2s\\z=s-t\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x+5z+3(y-3z)=0\\y-3z=-2s\\z=s-t\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x+3y-4z=0\\s=\dfrac{3z-y}{2}\\t=s-z=\dfrac{z-y}{2}\end{cases}$$

Dans le dernier système écrit, remarquons que la première équation est automatiquement vérifiée puisque $\vec{w}$ appartient à V. On a donc montré :

$$\vec{w}=\frac{3z-y}{2}\vec{u}+\frac{z-y}{2}\vec{v}.$$

Géométriquement, cette décomposition se visualise de la manière suivante :



Prenons par exemple $x=3$, $y=-1$ et $z=0$. On a alors :

$$\underbrace{\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\in V}_{\text{car } 3-3-0=0}, \quad \underbrace{\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}}_{\frac{3z-y}{2}=\frac{1}{2} \text{ et } \frac{z-y}{2}=\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix}.$$

Avec $x = 0$, $y = 4$ et $z = 3$ on a :

$$\underbrace{\vec{w}\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} \in V}_{\text{car } 0+12-12=0}, \quad \underbrace{\vec{w} = \frac{5}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}}_{\frac{3z-y}{2}=\frac{5}{2} \text{ et } \frac{z-y}{2}=-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix} \cdots$$

Exercice 3. Dans l'espace muni d'un repère, on donne $A(2, 0, -1)$ et $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\4\end{smallmatrix}\right)$. Dans chacun des cas suivants, dire si le point A appartient à la droite d et si le vecteur $\vec{v}$ est directeur de d.

a. $d : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{2}$

b. $d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 3t \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 4t \end{cases}$

c. $d = (BC)$, où $B(3, 3, 3)$ et $C(1, -3, -5)$.

Solution:

a. Les coordonnées de A satisfont les équations cartésiennes de d car :

$$\frac{2+1}{3} = \frac{0+2}{2} = \frac{-1+3}{2} \ (= 1).$$

Par conséquent, le point A se trouve bien sur d. Par ailleurs, le vecteur :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$$

est directeur de la droite d (on peut extraire directement ces coordonnées des dénominateurs apparaissant dans les équations cartésiennes, ou encore produire deux points sur la droite et déterminer le vecteur qui les relie). Comme $\vec{v}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$, on voit que $\vec{v}$ n'est pas directeur de la droite d.

b. Pour déterminer si A appartient à d, cherchons s'il y a une valeur du paramètre t qui lui correspond :

$$\begin{cases} 2 = 2 - t \\ 0 = -1 - 3t \\ -1 = 1 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{3} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Comme aucun réel t ne vérifie ces trois équations simultanément, on peut conclure que le point A n'appartient pas à d. Par ailleurs, le vecteur :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-4\end{pmatrix}$$

est directeur de la droite d (extraction directe de l'équation via les coefficients devant le paramètre). Comme $\vec{v} = -\vec{u}$ on voit que $\vec{v}$ est bien directeur de d.

c. La droite $d = (BC)$ est dirigée par le vecteur :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-6\\-8\end{pmatrix}$$

qui n'est autre que $-2\vec{v}$. On en déduit que $\vec{v}$ est bien directeur de d. Par ailleurs, le vecteur :

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-4\end{pmatrix}$$

est égal à $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On voit alors que A est le milieu de BC, ce qui montre en particulier que A appartient à d.

Exercice 4. L'espace est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, donner les coordonnées d'un point et celles d'un vecteur directeur non nul de la droite d proposée.

a. $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

b. $d : \dfrac{x-1}{2} = y = 4z - 2$

c. $d : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

Solution:

a. La droite d proposée ici est décrite par des équations paramétriques. Les termes constants dans ces équations fournissent un point se trouvant sur d (correspondant au paramètre $t = 0$) :

$$A(1, 2, -3)\,.$$

Remarquons que toute autre valeur de t conviendrait bien sûr également. Par ailleurs, les coefficients devant le paramètre t dans les équations sont les coordonnées d'un vecteur directeur de d :

$$\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Tout vecteur colinéaire à celui-ci conviendrait bien sûr aussi.

b. La droite d proposée ici est décrite par des équations cartésiennes. Tout triplet (x, y, z) satisfaisant ces équations donne donc les coordonnées d'un point sur d. Par exemple :

$$A(-3, -2, 0) \in d \text{ car } \frac{-3-1}{2} = -2 = 4 \cdot 0 - 2 \ (= -2).$$

Pour trouver un vecteur directeur de d, on peut produire un autre point sur d, comme par exemple $B(5, 2, 1)$ et calculer le vecteur joignant nos deux points :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}.$$

On peut aussi extraire directement un vecteur directeur depuis les équations, mais pour cela il faut réécrire d'abord celles-ci sous "forme fractionnaire" :

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

Sous cette forme, on peut effectivement affirmer directement que la vecteur :

$$\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

(dont les coordonnées sont les dénominateurs dans les équations) est directeur de d.

c. En raisonnant comme en a., on voit que la droite d donnée ici passe par A et est dirigée par $\vec{v}$, où :

$$A(0, 3, -2) \ \text{ et } \ \vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Exercice 5. L'espace est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, écrire des équations paramétriques et cartésiennes de la droite d définie par les données.

a. $A(2, 0, 5)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$ b. $A(1, 1, -1)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ c. $A(0, 1, 3)$ et $B(0, -2, 3)$.

Solution:

a. D'après les données, on peut écrire directement :

$$d : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 5 + 5t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant le paramètre t on trouve alors des équations cartésiennes de d :

$$d : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{5} \ (= t).$$

b. D'après les données, on peut écrire directement :

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

De même qu'en a. on va maintenant éliminer le paramètre t pour produire des équations cartésiennes de d :

$$d : x - 1 = 1 - y, \ z = -1.$$

Rappelons que pour trouver ces équations, on exprime t en fonction de x et y (c'est-à-dire en fonction des variables où il apparait effectivement) puis on égalise. On conserve par ailleurs la relation $z = -1$ qui est vérifiée par tout point de d mais dans laquelle le paramètre n'apparait pas.

c. La droite d est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc aussi par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Elle admet par conséquent les équations paramétriques suivantes :

$$d : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Elle a donc pour équations cartésiennes :

$$d : x = 0, \ z = 3.$$

Remarquons qu'ici le paramètre t est déjà absent dans x et z, il n'y a donc rien à faire pour "l'éliminer".

Exercice 6. L'espace est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de la droite d donnée avec chacun des plans de coordonnées, puis expliquer comment celle-ci se positionne par rapport aux axes et plans de coordonnées.

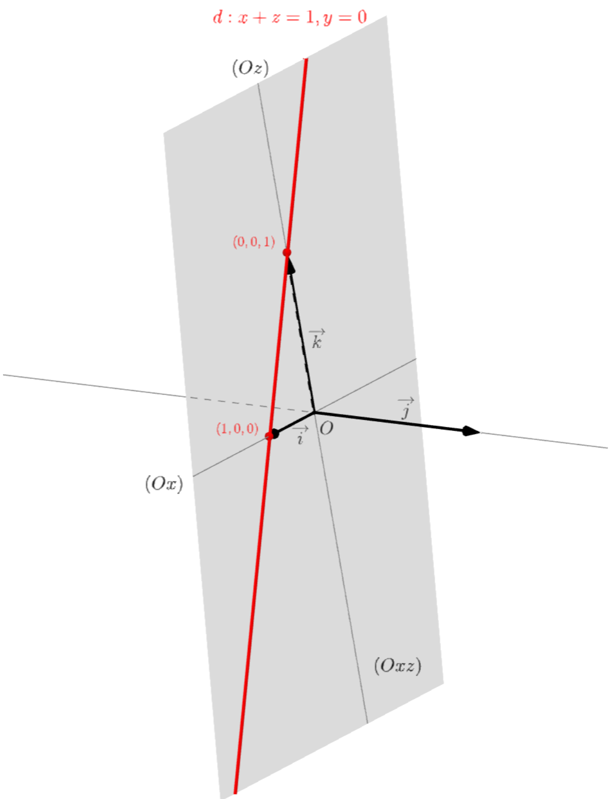
a. $d : x + z = 1, \ y = 0$

b. $d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

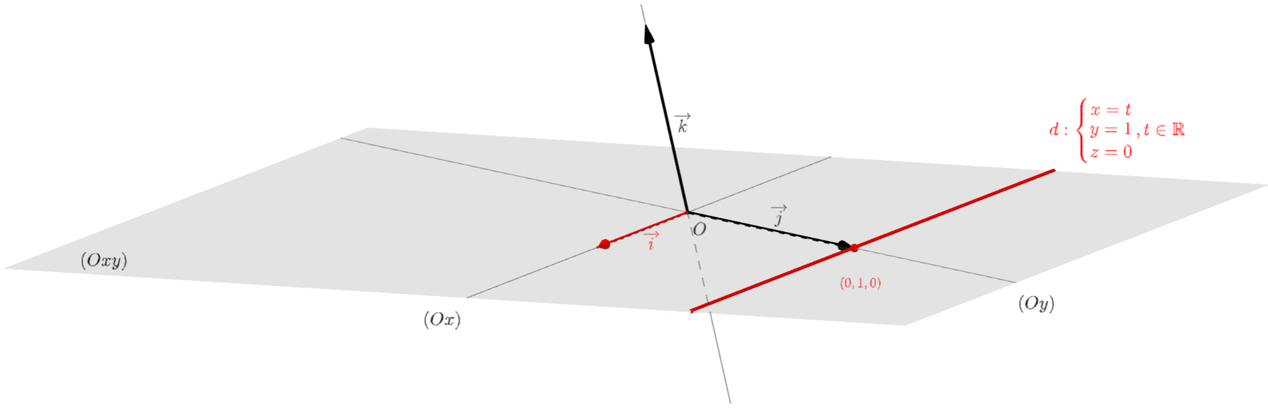
c. $d : x = 3, \ z = 1.$

Solution: Rappelons qu'un plan de coordonnée est le lieu où l'une des coordonnées s'annule, et un axe de coordonnées celui où deux coordonnées s'annulent. Par exemple, le plan (Oxz) est le lieu où $y = 0$, et l'axe (Oz) celui où $x = y = 0$.

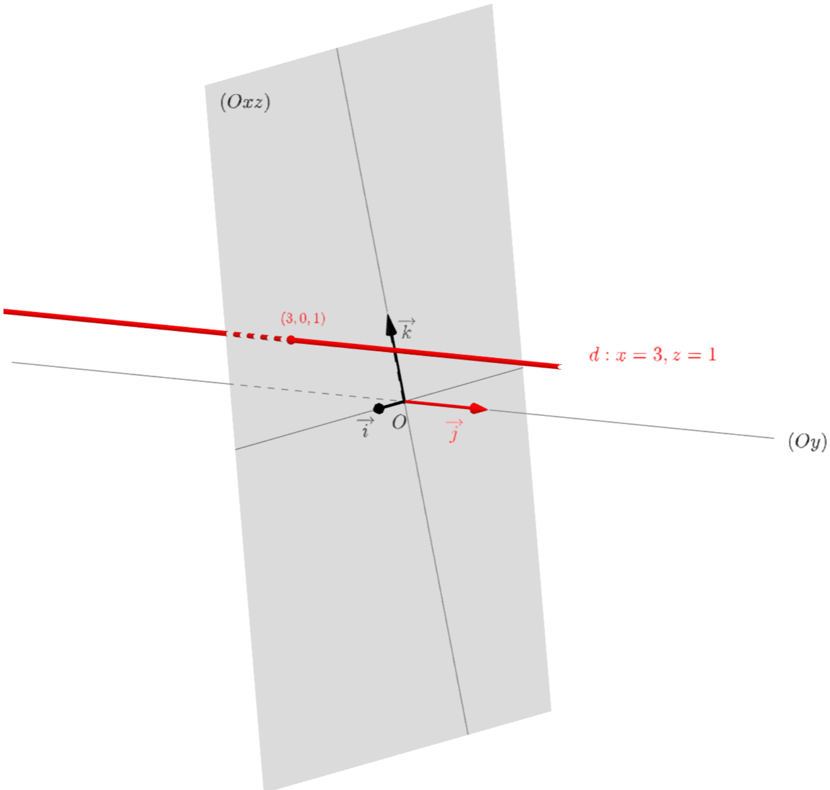
a. La relation $y = 0$ est vérifiée par tous les points de la droite. Par conséquent, d est contenue dans le plan (Oxz). Par ailleurs, elle intersecte le plan (Oxy) au point de coordonnées $(1, 0, 0)$, qui se trouve sur l'axe (Ox) et le plan (Oyz) à celui de coordonnées $(0, 0, 1)$, qui se trouve sur l'axe (Oz). La droite est donc ici obtenue en reliant les deux points $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$, qui se trouvent respectivement sur les axes de coordonnées (Ox) et (Oz).



b. La droite d décrite ici est contenue dans le plan (Oxy) (car la relation $z = 0$ est satisfaite par tous les points de d), n'intersecte pas le plan (Oxz) (car aucun point sur d ne vérifie $y = 0$), et rencontre le plan (Oyz) au point de coordonnées $(0, 1, 0)$. Elle est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et est par conséquent parallèle à l'axe (Ox). Elle est donc produite en partant du point de coordonnés $(0, 1, 0)$, qui se trouve sur (Oy) en se déplaçant parallèlement à (Ox).



c. La droite d n'intersecte ni le plan (Oxy), ni le plan (Oyz). Elle est parallèle à l'axe (Oy) et intersecte le plan (Oxz) au point de coordonnées $(3, 0, 1)$.



Exercice 7. Dans l'espace muni d'un repère, on donne un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ non nul. Montrer que :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ colinéaire à } \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & \alpha \\ y & \beta \end{vmatrix} = 0\,, \begin{vmatrix} x & \alpha \\ z & \gamma \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} y & \beta \\ z & \gamma \end{vmatrix} = 0\,.$$

Indication : raisonner par double implication.

Solution: On procède par double implication, en commençant par " $\Rightarrow$ ". On suppose donc que $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et on souhaite montrer que les trois déterminants 2×2 sont nuls. La colinéarité se traduit numériquement par l'existence d'un facteur de proportionnalité λ entre $\vec{w}$ et $\vec{u}$:

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors par exemple :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha \\ y & \beta \end{vmatrix} = x\beta - y\alpha = (\lambda\alpha)\beta - (\lambda\beta)\alpha = 0$$

et de même pour les deux autres déterminants. Passons à " $\Leftarrow$ ". On suppose donc cette fois que les trois déterminants 2×2 donnés dans l'énoncé sont nuls :

$$x\beta - y\alpha = 0\,,\ x\gamma - z\alpha = 0\,,\ y\gamma - z\beta = 0\,.$$

Comme $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, on sait que l'un (au moins) des coefficients α, β et γ est non nul. Supposons, pour fixer les idées, que α est non nul (le raisonnement est analogue avec β ou γ non nul). Les deux premières équations ci-dessus peuvent alors se réécrire sous la forme :

$$y = \frac{x}{\alpha}\beta \text{ et } z = \frac{x}{\alpha}\gamma\,.$$

En posant $\lambda = \frac{x}{\alpha}$, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{w} = \lambda\vec{u}$$

ce qui montre bien que $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Exercice 8. (Facultatif) Dans l'espace muni d'un repère, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \sigma \end{pmatrix}$ non colinéaires. Montrer que :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \alpha & \lambda & x \\ \beta & \mu & y \\ \gamma & \sigma & z \end{vmatrix} = 0\,.$$

Indication : procéder par élimination des paramètres. Pour fixer les idées, on supposera que $\alpha \neq 0$.

Solution: Le vecteur $\vec{w}$ appartient au plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement s'il est combinaison linéaire de ces deux vecteurs. Autrement dit :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists s, t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \alpha s + \lambda t \\ y = \beta s + \mu t \\ z = \gamma s + \sigma t \end{cases}.$$

On va maintenant éliminer les paramètres s et t afin de déterminer une équation cartésienne. Pour cela, on va supposer pour fixer les idées que α est non nul. Notons alors Eq_1, Eq_2 et Eq_3 les trois équations dans le système ci-dessus et formons les deux équations :

$$\mathrm{Eq}_2' = \mathrm{Eq}_2 - \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{Eq}_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Eq}_3' = \mathrm{Eq}_3 - \frac{\gamma}{\alpha}\,\mathrm{Eq}_1$$

On obtient :

$$\exists s, t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \alpha s + \lambda t \\ y = \beta s + \mu t \\ z = \gamma s + \sigma t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} y - \frac{\beta}{\alpha}x = (\mu - \frac{\beta\lambda}{\alpha})t \\ z - \frac{\gamma}{\alpha}x = (\sigma - \frac{\gamma\lambda}{\alpha})t \end{cases}$$

En effet, l'implication " $\Rightarrow$ " est claire (si les équations Eq_1, Eq_2 et Eq_3 sont satisfaites alors Eq_2' et Eq_3' le sont aussi). Pour la réciproque " $\Leftarrow$ " on réintroduit le paramètre s en posant :

$$s = \frac{x - \lambda t}{\alpha}\,.$$

A présent, on souhaite éliminer le paramètre t, ce que l'on fait en formant l'équation :

$$\mathrm{Eq}'' = (\sigma - \frac{\gamma\lambda}{\alpha})\,\mathrm{Eq}_2' - (\mu - \frac{\beta\lambda}{\alpha})\,\mathrm{Eq}_3'$$

On obtient alors :

$$\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} y - \frac{\beta}{\alpha}x = (\mu - \frac{\beta\lambda}{\alpha})t \\ z - \frac{\gamma}{\alpha}x = (\sigma - \frac{\gamma\lambda}{\alpha})t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma - \frac{\gamma\lambda}{\alpha})(y - \frac{\beta}{\alpha}x) - (\mu - \frac{\beta\lambda}{\alpha})(z - \frac{\gamma}{\alpha}x) = 0$$

En effet, l'implication " $\Rightarrow$ " est claire (si les équations Eq_2' et Eq_3' sont satisfaites alors Eq'' l'est aussi). Pour la réciproque " $\Leftarrow$ " on réintroduit le paramètre t en posant :

$$t = \begin{cases} \dfrac{y - \frac{\beta}{\alpha}x}{\mu - \frac{\beta\lambda}{\alpha}} \text{ si } \mu - \dfrac{\beta\lambda}{\alpha} \neq 0 \\[2ex] \dfrac{z - \frac{\gamma}{\alpha}x}{\sigma - \frac{\gamma\lambda}{\alpha}} \text{ si } \sigma - \dfrac{\gamma\lambda}{\alpha} \neq 0\,. \end{cases}$$

Pour assurer de pouvoit faire cela il faut bien sûr remarquer que l'un (au moins) des coefficients $\mu - \frac{\beta\lambda}{\alpha}$ et $\sigma - \frac{\gamma\lambda}{\alpha}$ est non nul. Or si les deux étaient nuls, on aurait :

$$\mu = \frac{\lambda}{\alpha}\beta \text{ et } \sigma = \frac{\lambda}{\alpha}\gamma \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \sigma \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ce qui contredirait le fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires. Développons alors la dernière équation trouvée. On obtient :

$$(\sigma - \frac{\gamma\lambda}{\alpha})(y - \frac{\beta}{\alpha}x) - (\mu - \frac{\beta\lambda}{\alpha})(z - \frac{\gamma}{\alpha}x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma - \frac{\gamma\lambda}{\alpha})y + (-\frac{\beta}{\alpha}(\sigma - \frac{\gamma\lambda}{\alpha}) + \frac{\gamma}{\alpha}(\mu - \frac{\beta\lambda}{\alpha}))x - (\mu - \frac{\beta\lambda}{\alpha})z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad (\frac{\alpha\sigma - \gamma\lambda}{\alpha})y + (\frac{\gamma\mu - \beta\sigma}{\alpha})x + (\frac{\beta\lambda - \alpha\mu}{\alpha})z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\beta\sigma - \gamma\mu)x - (\alpha\sigma - \gamma\lambda)y + (\alpha\mu - \beta\lambda)z = 0$$

où la dernière équivalence est obtenue en multipliant par $-\alpha$ (qui est non nul). En réécrivant l'équation à l'aide de déterminants, on trouve finalement :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \beta & \mu \\ \gamma & \sigma \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} \alpha & \lambda \\ \gamma & \sigma \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} \alpha & \lambda \\ \beta & \mu \end{vmatrix} z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \alpha & \lambda & x \\ \beta & \mu & y \\ \gamma & \sigma & z \end{vmatrix} = 0\,.$$