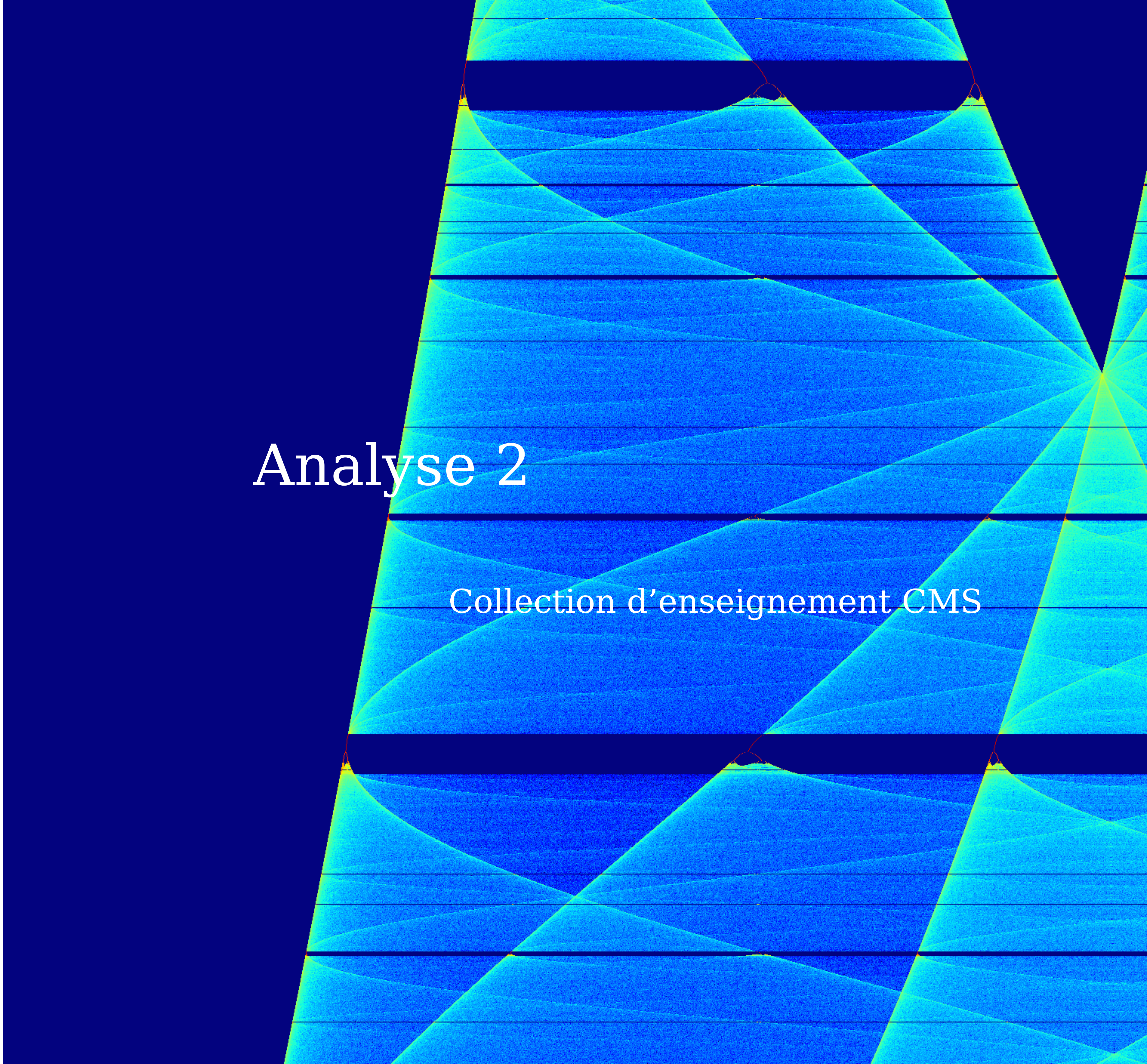


Analyse 2

Collection d’enseignement CMS

Table des matières

1 Trigonométrie

1.1 Notion d’angles

1.2 Les fonction trigonométriques

1.3 Equations élémentaires

1.4 Transformations

1.5 Résolution d’équations trigonométriques

1.6 Résolution du triangle

1.7 Fonctions réciproques

1.8 Dérivées des fonctions trigonométriques

2 Logarithmes et exponentielles

2.1 Le logarithme naturel

2.2 La fonction exponentielle

2.3 Bases générales

2.4 Fonctions hyperboliques

Le but ici est d'étudier la parité de l'exponentielle, ce qui nous amènera vers des fonctions, dites hyperboliques, qui ont des similitudes frappantes avec les fonctions trigonométriques. Commençons par rappeler ce qu'est une fonction (im)paire :

Définition 2.4.1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **paire** (resp. **impaire**) si

- $x \in \mathrm{Def}_f \Leftrightarrow -x \in \mathrm{Def}_f$.
- $\forall x \in \mathrm{Def}_f,\ f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Exemples.

1. Le $\cos(x)$ est une fonction paire : $\cos(-x) =$.
2. Le $\sin(x)$ et la tangente sont des fonctions impaires : $\sin(-x) =$, $\mathrm{tg}(-x) =$ (pour autant que $x \in \mathrm{Def}_{\mathrm{tg}}$).
3. Il y a des fonctions ni paires ni impaires : p- ex . $\exp(-x) \neq \exp(x), -\exp(x)$.

Théorème 2.4.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $x \in \mathrm{Def}_f \Leftrightarrow -x \in \mathrm{Def}_f$. Il existe alors une fonction paire f_+ et une fonction impaire f_-, telles que

$$\forall x \in \mathrm{Def}_f, \quad f = f_+ + f_-.$$

Plus précisément :

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big), \quad f_-(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big).$$

Démonstration. Vérifions la parité :

$$f_+(-x) = \qquad\qquad = f_+(x),$$

$$f_-(-x) = \qquad\qquad = -f_-(x).$$

$f_+(x)$ est donc paire et $f_-(x)$ est impaire. De plus, si $x \in \mathrm{Def}_f$:

$$f_+(x) + f_-(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad = f(x).$$

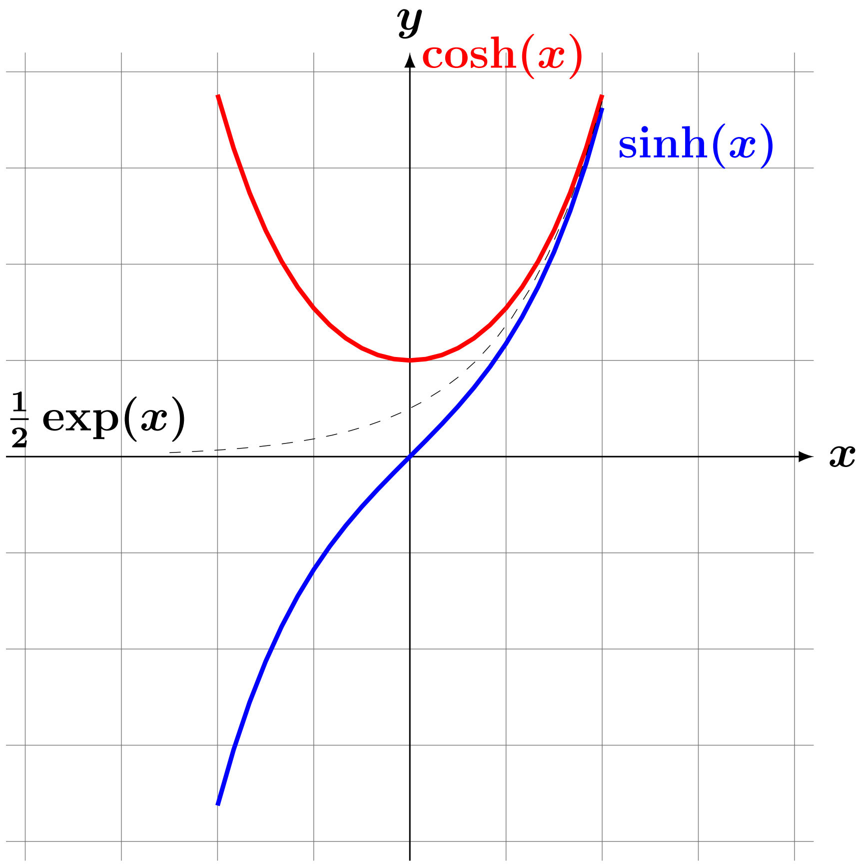
$\square$

Comme toute fonction peut s'écrire comme une somme de sa partie paire et impaire, on va maintenant l'appliquer à l'exponentielle :

Définition 2.4.3. On définit les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** comme les parties paire et impaire respectivement de l'exponentielle :

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

Graphiquement :



Propriétés.

1. $\boxed{x \mapsto \sinh(x) \textit{ est une fonction impaire alors que } x \mapsto \cosh(x) \textit{ est paire.}}$

   Ceci est vrai par définition de ces deux fonctions.

2. $\boxed{\sinh(0) = 0 \textit{ et } \cosh(0) = 1.}$

$$\cosh(0) = \qquad = 1, \quad \sinh(0) = \qquad = 0.$$

3. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh(x) < \frac{1}{2}\exp(x) < \cosh(x).}$

$$\sinh(x) = \qquad < \qquad < \qquad$$

4. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(\pm x) = \cosh(x) \pm \sinh(x).}$

En effet, la somme de la partie paire et impaire de l'exponentielle redonne l'exponentielle :

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x,$$
$$\cosh(x) - \sinh(x) = \qquad\qquad = e^{-x}.$$

5. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.}$

En effet,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \qquad\qquad$$
$$= \qquad = 1.$$

6. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x), \quad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x).}$

En effet,

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \qquad = \qquad = \cosh(x),$$

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \qquad = \qquad = \sinh(x).$$

Exemple.

Cet exemple illustre comment résoudre une équation avec des fonctions hyperboliques : résolvons

$$\cosh(x) = 4.$$

L'ensemble de définition ne pose pas de problèmes ici, puisque $\cosh(x)$ est définie pour tout réel x.

Par définition :

$$4 = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \quad \Leftrightarrow \qquad .$$

substitution $\quad X := e^{x} > 0.$

$$8 = e^{x} + e^{-x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad .$$

Discriminant : $\quad \sqrt{\Delta} = \qquad .$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad .$$

La propriété 5 rappelle la somme des carrés des sinus et cosinus, mais avec un changement de signe. On a d'ailleurs une autre ressemblance :

Théorème 2.4.4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$
$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x).$$

Démonstration. Par parité et les propriétés de l'exponentielle, on a

$$\cosh(x+y) + \sinh(x+y) = \qquad = \qquad$$
$$= \qquad$$
$$= \qquad$$
$$+ \qquad$$

Par la propriété 4., on a aussi

$$\cosh(x+y) - \sinh(x+y) = \qquad = \qquad$$
$$= \qquad$$
$$= \qquad$$
$$- \qquad$$

En additionnant et en soustrayant ces deux dernières égalités, on obtient

$$2\cosh(x+y) = 2\cosh(x)\cosh(y) + 2\sinh(x)\sinh(y),$$
$$2\sinh(x+y) = 2\sinh(x)\cosh(y) + 2\sinh(y)\cosh(x).$$

On conclut en divisant par 2. $\square$

Remarque. La ressemblance avec les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ est donc apparente. Mais pourquoi ajoute-t-on le terme **hyperbolique** ?

Rappelons que le lieu des points

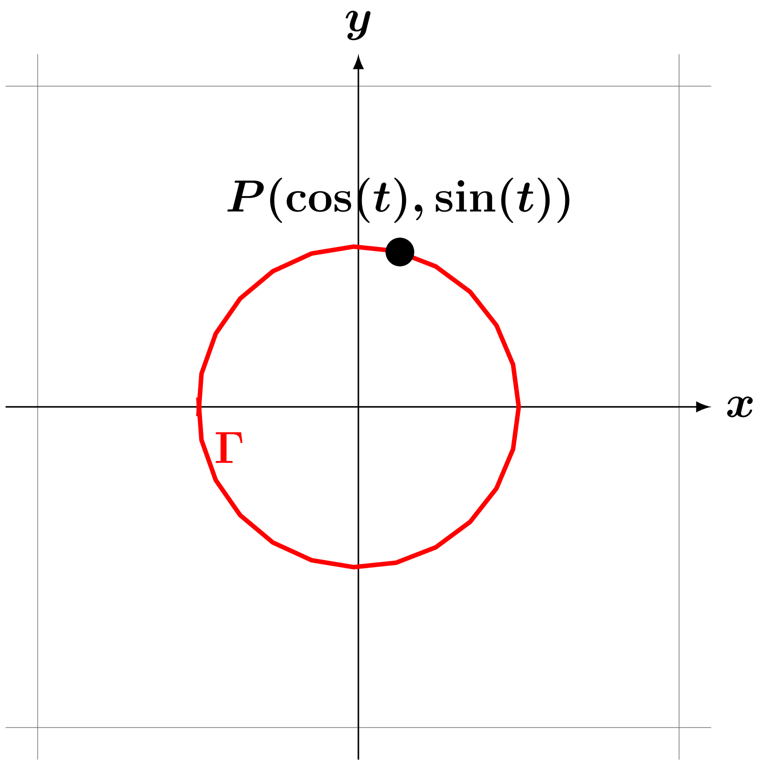
$$\Gamma := \{(\cos(t), \sin(t)) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$$

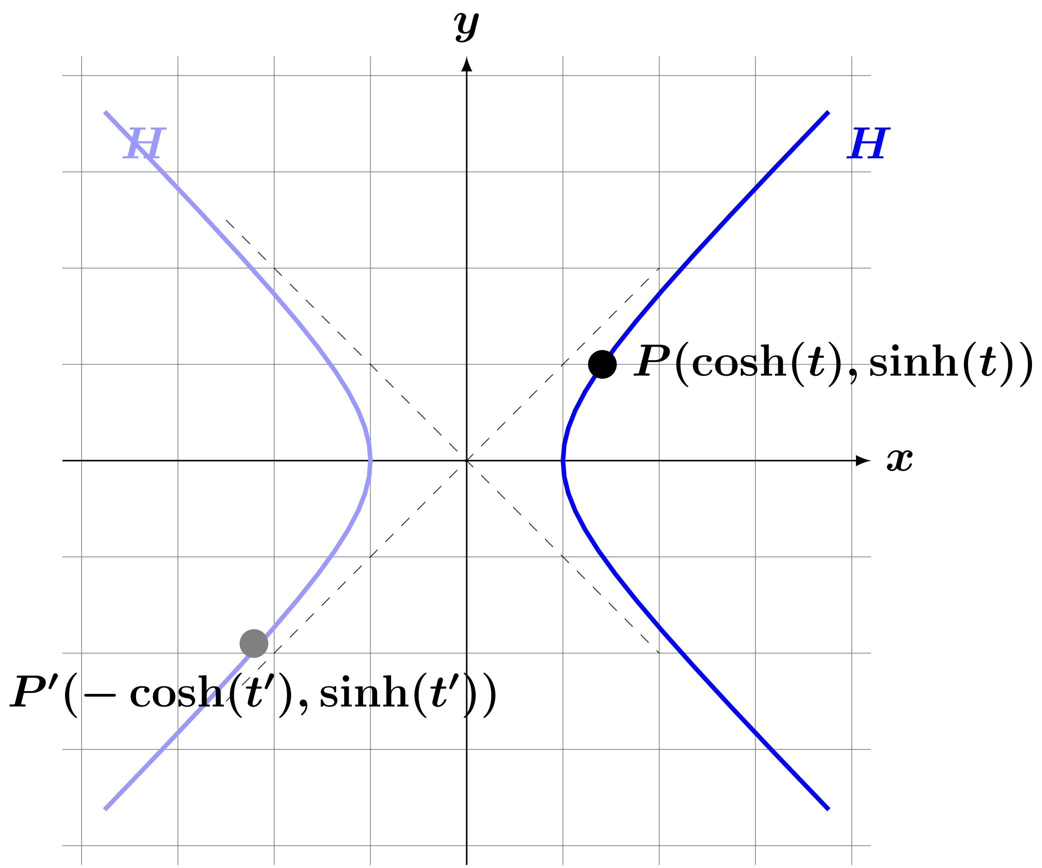
est le cercle centré en $(0,0)$ et de rayon 1 (cercle trigonométrique).
Par analogie avec les fonctions trigonométriques, on peut tracer le lieux des points

$$H := \{(\cosh(t), \sinh(t)) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Par la propriété 5, on a que si $P \in H$, alors

$$x_P = \cosh(t) \text{ et } y_P = \sinh(t) \text{ pour un certain } t \in \mathbb{R}.$$
$$\Rightarrow \quad (x_P)^2 - (y_p)^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$
$$\Rightarrow \quad P \text{ est sur l'hyperbole d'équation } x^2 - y^2 = 1.$$


y
x
P(cos(t), sin(t))
Γ


y
x
H
H
P(cosh(t), sinh(t))
P′(− cosh(t′), sinh(t′))

Réciproquement, si $P(x,y)$ est tel que $x^2 - y^2 = 1$, alors on peut trouver un $t \in \mathbb{R}$, tel que

$$x = \cosh(t), y = \sinh(t) \quad \text{ou} \quad x = -\cosh(t), y = \sinh(t).$$

En effet, montrons-le par des

Exemples.

1. $\boxed{P(\sqrt{10}, 3) :}$ on a bien $(\sqrt{10})^2 - 3^2 = 1$. On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sqrt{10} = \cosh(t) \quad \text{et } 3 = \sinh(t).$$

on a alors $\sqrt{10} + 3 = e^t$. On pose $t = \ln(\sqrt{10} + 3)$.
On obtient alors

$$\cosh(t) = \qquad = \qquad$$

$$= \qquad = \sqrt{10},$$

$$\sinh(t) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad = 3.$$

2. $\boxed{P(-\sqrt{10}, 3) :}$ on a bien $(-\sqrt{10})^2 - 3^2 = 1$. Le point est donc bien sur l'hyperbole $H : x^2 - y^2 = 1$, mais comme $x_P < 0$, on va chercher $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$-\sqrt{10} = -\cosh(t) \quad \text{et } 3 = \sinh(t).$$

On pose à nouveau $t = \ln(\sqrt{10} + 3)$ et comme avant, mais avec changement de signes,

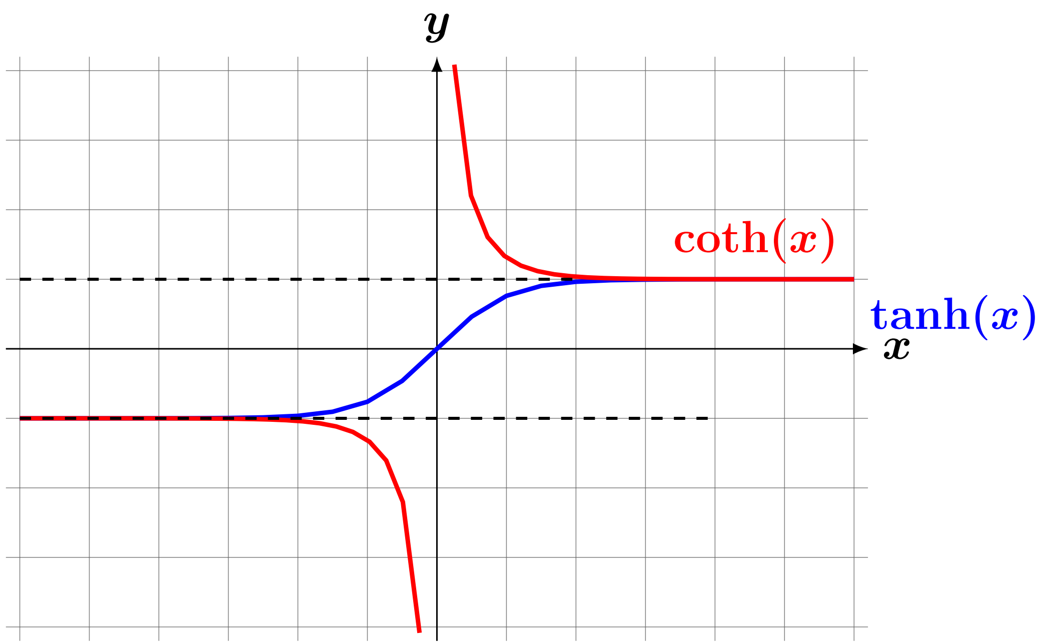
$$x_P = -\sqrt{10} = -\cosh(t), \quad y_P = \sinh(t).$$

L'analogie avec les fonctions trigonométriques nous conduit naturellement à poser la

Définition 2.4.5. On définit les fonctions **tangente** et **cotangente hyperboliques** comme

$$\tanh x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)},$$

$$\coth x : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}.$$



Propriétés.

1. $\boxed{x \mapsto \tanh(x) \textit{ et } x \mapsto \coth(x) \textit{ sont des fonctions impaires.}}$

   En effet, en partant des définitions,

$$\tanh(-x) = \qquad\qquad = \qquad\qquad = -\tanh(x),$$

$$\coth(-x) = \qquad\qquad = \qquad\qquad = -\coth(x).$$

2. $\boxed{\tanh(0) = 0 \textit{ et } \lim_{x\to 0_\pm} \coth(x) = \pm\infty.}$

   En effet, en partant des définitions,

$$\tanh(0) = \qquad\qquad = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} \coth(x) = \qquad = \pm\infty,$$

où la dernière limite est du type "$\frac{1}{0^\pm}$".

3. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \tanh(x) < 1 < \coth(x).}$

On se rappelle que $x > 0$ *implique* $0 < \sinh(x) < \frac{1}{2}e^x < \cosh(x)$*, d'où le résultat.*

4. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.}$

En effet,

$$1 - \tanh^2(x) = \qquad = \qquad = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

5. $x \mapsto \coth(x), \tanh(x)$ *sont continues et dérivables sur leur ensembles de définition et*

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad \frac{d}{dx}\coth(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}.$$

On peut le vérifier directement :

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \qquad = \qquad = \frac{1}{\cosh^2(x)},$$

$$\frac{d}{dx}\coth(x) = \qquad = \qquad = -\frac{1}{\sinh^2(x)}.$$

On remarque à nouveau les similarités frappantes avec le cas trigonométrique. Passons à des exemples de résolution :

Exemples.

1. $\boxed{\text{Résoudre } \coth(x) = 3.}$

Puisque l'équation implique une $\coth(x)$, l'ensemble de définition de cette égalité est alors $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.
En suivant les définitions, on a

$$\coth(x) = 3 \quad \Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad$$

$$\Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad 0 = 2e^{x} - 4e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln(2).$$

2. $\boxed{\text{Résoudre : } \coth(x)e^{x/2} + e^{x/2} = e^{-x/2}\left(1 + \frac{1}{\sinh(x)}\right).}$

L'équation implique à nouveau une $\coth(x)$, l'ensemble de définition de cette égalité est donc $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

On peut à nouveau essayer de tout écrire en termes de e^x. Mais on peut aussi commencer par multiplier l'équation en question par $\sinh(x)$, ce qui fera disparaître la $\coth(x)$ et le terme en $\frac{1}{\sinh(x)}$:

$$\coth(x)e^{x/2} + e^{x/2} = e^{-x/2}\left(1 + \frac{1}{\sinh(x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cosh(x)e^{x/2} + \sinh(x)e^{x/2} = \boxed{}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{} = e^{-x/2}\left(\sinh(x) + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{} = e^{-x/2}\left(1 + \sinh(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2x} = \boxed{} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2e^{3x} - e^{2x} - 2e^x + 1 = 0.$$

On pose maintenant $X := e^x$ (qui devra donc être strictement positif). Et on résout

$$2X^3 - X^2 - 2X + 1 = 0 \qquad (\text{ sol. évidentes : } X = \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow \qquad = 0 \qquad (\text{factoriser par } (X-1)(X+1))$$

$$\Rightarrow \qquad \Rightarrow \qquad x = -\ln(2).$$

2.5 Fonctions hyperboliques réciproques

Le but de cette section est l'étude des fonctions réciproques aux fonctions hyperboliques, renforçant les parallèles qui existent avec le cas trigonométrique.

Dans le cas hyperbolique on peut explicitement renverser les relations

$$\sinh(x) = y \quad \text{et} \ \cosh(x) = y(\geq 1)$$

pour trouver une expression concrète aux fonctions réciproques :

1. $\boxed{\sinh(x) = y :}$

   En utilisant les relations hyperboliques on trouve que

   $$\sinh(x) = y \quad \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow$$

   On ne retient ici que la solution positive, puisque $\cosh(x)$ est toujours positif. On a donc

$$\sinh(x) = y \quad \Rightarrow$$

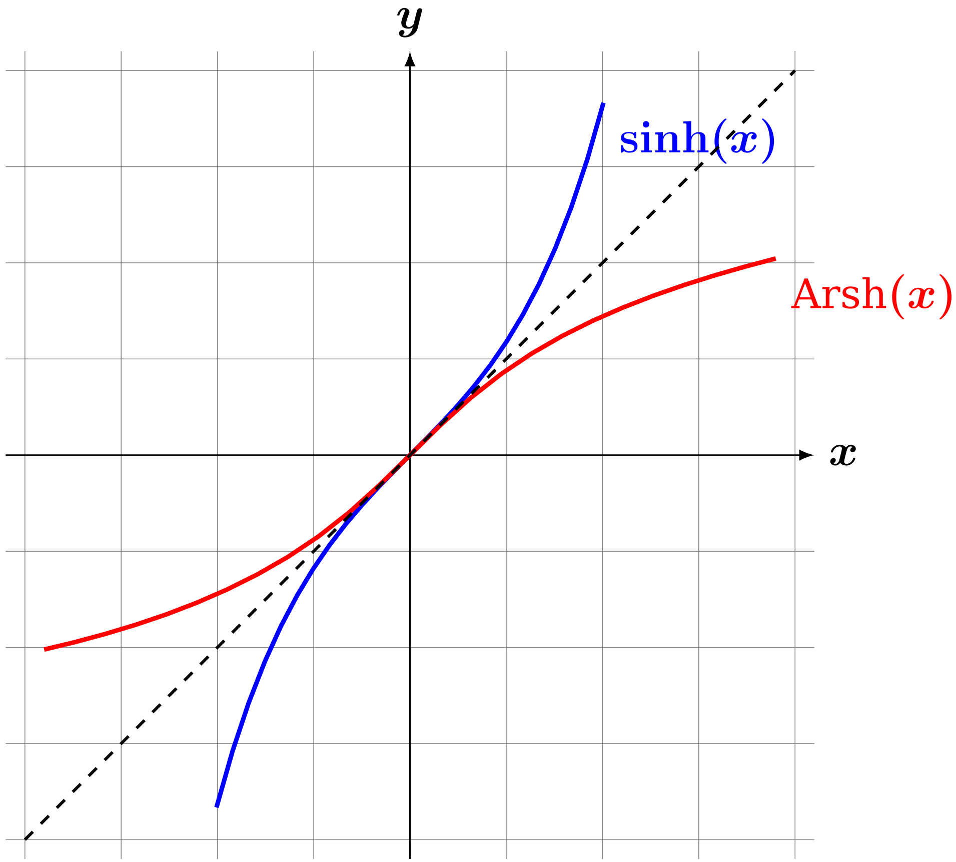
$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

En invertissant les rôles de x et y on trouve alors une formule explicite à la fonction réciproque au $\sinh(x)$, qu'on appelle Arsh :

$$\mathrm{Arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Cette fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$ et on peut explicitement vérifier (exercice) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh(\mathrm{Arsh}(x)) = \mathrm{Arsh}(\sinh(x)) = x.$$



2. $\boxed{\cosh(x) = y :}$

Dans le cas du $\cosh(x)$ il faut être plus précautionneux pour les valeurs de y admises.

En effet,

$$\cosh(x) \geq 0 \text{ et } \cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \cosh(x) \geq 1.$$

La parité du $\cosh(x)$ nous oblige aussi à restreindre le domaine des x pour obtenir une bijection. La convention est de prendre $x \geq 0$.
Ces restrictions prises, on peut résoudre l'équation $\cosh(x) = y$ pour $x \geq 0$ et $y \geq 1$.
On trouve d'abord que

$$x \geq 0 \quad \text{et} \quad \cosh(x) = y \quad \Rightarrow \quad \sinh^2(x) = \cosh^2(x) - 1 = y^2 - 1$$
$$\Rightarrow \quad \sinh(x) = \sqrt{y^2 - 1}.$$

On ne retient ici que la solution positive, puisque $\sinh(x)$ est toujours positif pour $x \geq 0$.
On a donc

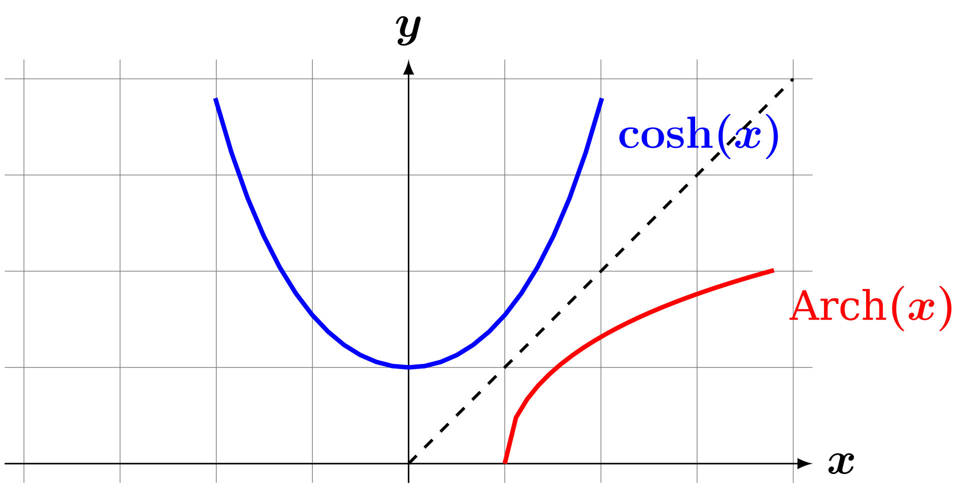
$$x \geq 0 \quad \text{et } \cosh(x) = y \quad \Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

En invertissant les rôles de x et y on trouve alors une formule explicite à la fonction réciproque au $\cosh(x)$, qu'on appelle Arch :

$$\mathrm{Arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Cette fonction est définie pour $x \in [1, \infty[$ et on peut explicitement vérifier (exercice) que

$$\forall x \in [1, \infty[, \quad \cosh(\mathrm{Arch}(x)) = x,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{Arch}(\cosh(x)) = x.$$



Résumons ce qu'on a trouvé par le

Théorème 2.5.1. $x \mapsto \sinh(x)$ est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$, alors que $x \mapsto \cosh(x)$ est une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $[1, \infty[$. De plus,

$$\operatorname{Arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \operatorname{Arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Ces fonctions sont dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Arsh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \forall x > 1, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Arch}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Démonstration. Les expressions pour l'$\operatorname{Arsh}(x)$ et l'$\operatorname{Arch}(x)$ ayant été établies, il ne reste plus qu'à vérifier les égalités pour les dérivées :

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arsh}(x) \quad = \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

Similairement, pour $x > 1$ (on rappelle qu'une dérivée est strictement définie que sur un voisinage ouvert) :

$$\frac{d}{dx}\text{Arch}(x) = \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

$$= \qquad = \qquad$$

$\square$

Exemples.

1. $\boxed{\text{Calculer le } \sinh(x) \text{ sachant que } x = \mathrm{Arch}(y)}$

Puisque l'Arch est défini sur $[1, \infty]$ et donne des valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on doit avoir $y \geq 1$ et $x = \mathrm{Arch}(y) \geq 0$.
On sait qu'alors $\sinh(x) \geq 0$. Et on peut aussi écrire

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) \quad = \quad 1 \quad \Rightarrow \qquad .$$

On en conclut que

$$\sinh(\mathrm{Arch}(y)) \quad = \qquad = \qquad$$

2. $\boxed{\text{Simplifier : } \mathrm{Arsh}(x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}), \quad x, y \in \mathbb{R}}$

Comme $\sinh(x)$ est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$, on peut pour des valeurs données de x et y, toujours trouver des réels u, v, tels que $x = \sinh(u)$ et $y = \sinh(v)$.

On a alors

$$\mathrm{Arsh}\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

3. Résoudre le système : $\begin{cases} 2\sinh(2+x)+e^{-y}=e^y, \\ \mathrm{Arsh}(x)+\mathrm{Arsh}(y-2)=\mathrm{Arsh}(2xy). \end{cases}$

L'ensemble de définition ne pose pas de problèmes : toutes les fonctions sont bien définies. On a donc $D_{\text{def}}=\mathbb{R}$.
La première équation peut se réécrire comme

$$2\sinh(2+x)+e^{-y} \quad = \quad e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sinh(2+x) \quad = $$

La bijectivité de la fonction $\sinh$ force alors à avoir

$$2 + x = y.$$

La deuxième équation devient alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsh}(x) + \operatorname{Arsh}(y-2) \quad &= \quad \operatorname{Arsh}(2xy) \\ \Leftrightarrow \quad & \\ \Leftrightarrow \quad & \end{aligned}$$

où nous avons à nouveau bénéficié de la bijectivité de $\sinh$.
On pose alors $u = \operatorname{Arsh}(x)$, et on résout

$$\sinh(u+u) \quad = \qquad\qquad = $$

On est alors amené à résoudre

$$2x\sqrt{1+x^2} = 2x(x+2)$$

On constate que $x = 0$ et donc $y = 2$ est une solution. Pour en trouver une autre, on doit considérer

$$\sqrt{1+x^2} = (x+2)$$

sur le domaine de positivité :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} = (x+2) \quad & \underset{D_{\text{pos}} \;=\; [-2,\infty[}{\Leftrightarrow} \quad 1+x^2 = x^2+4x+4 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 = 4x+3.\end{aligned}$$

On a donc comme nouvelle solution $x = -\frac{3}{4} \in D_{\text{pos}}$ et $y = \frac{5}{4}$. L'ensemble solution est alors

$$S = \left\{(0,2), \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)\right\}.$$

Les fonctions $\mathbf{tanh}(x)$ et $\mathbf{coth}(x)$ possèdent elles aussi des fonctions réciproques avec des expressions explicites :

1. $\boxed{\mathbf{tanh}(x) = y, \quad y \in]-1, 1[\mathbf{:}}$

$$\mathbf{tanh}(x) = y \quad \Leftrightarrow$$

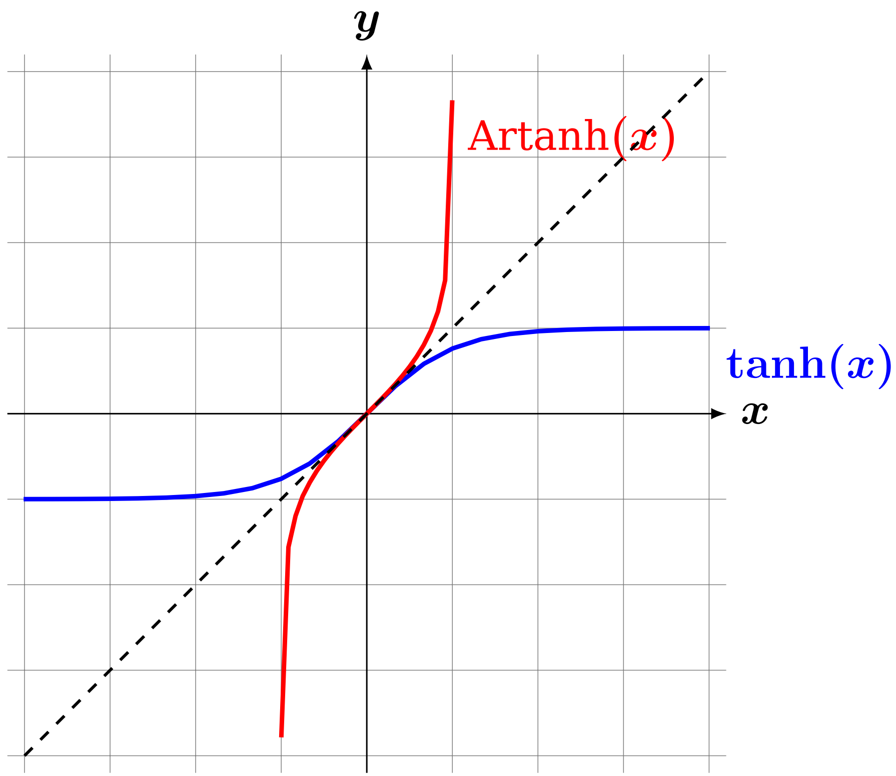
$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$

Le fait que cette relation puisse s'inverser et donne à nouveau une fonction montre que la $\tanh(x)$ est inversible, d'inverse

$$\mathrm{Artanh}(x) :]-1,1[\ni x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$



2. $\boxed{\mathbf{coth}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^*, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R} \setminus [-\mathbf{1}, \mathbf{1}] \ \mathbf{:}}$

$$\mathbf{coth}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$$

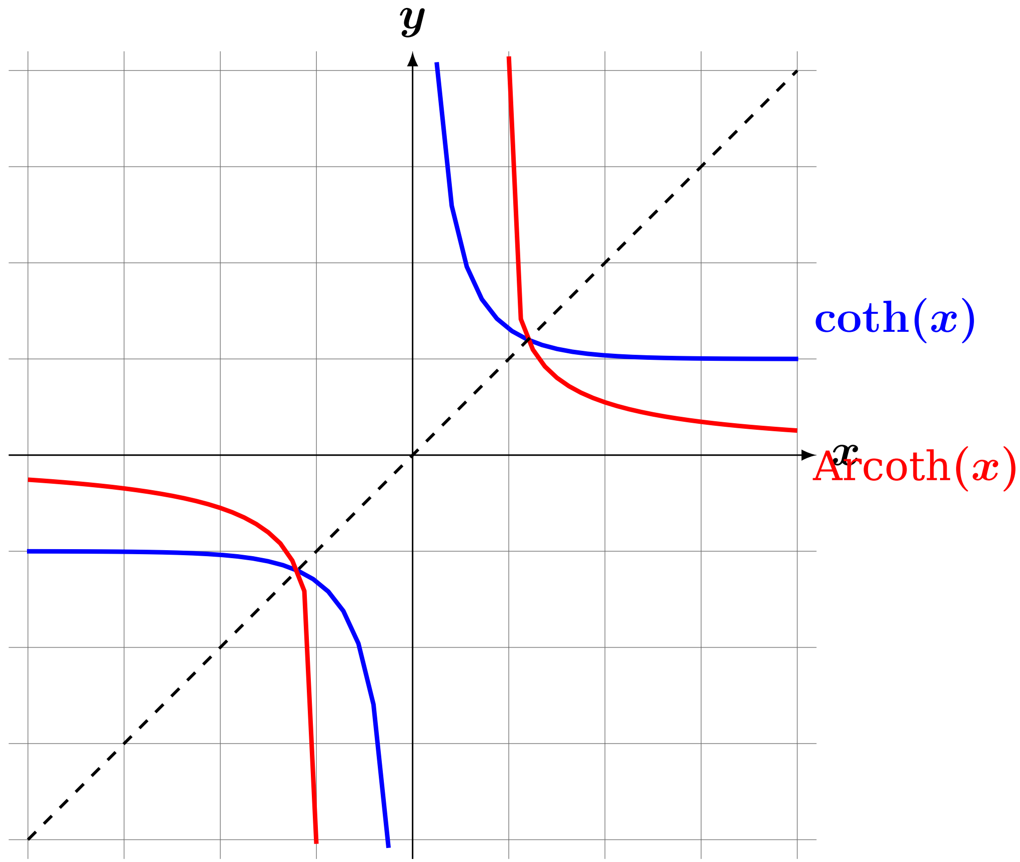
$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$

Le fait que cette relation puisse s'inverser et donne à nouveau une fonction montre que la $\mathbf{coth}(\boldsymbol{x})$ est inversible, d'inverse

$$\text{Arcoth}(\boldsymbol{x}) \mathbf{:} \ \mathbb{R} \setminus [-\mathbf{1}, \mathbf{1}] \ni \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}\right) \mathbf{.}$$



Résumons par le

Théorème 2.5.2. $\tanh(x) : \mathbb{R} \mapsto]-1,1[$ est une bijection et

$$\operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}), \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

$\coth(x) : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ est une bijection et

$$\operatorname{Arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1}), \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Arcoth}(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Démonstration. On vient d'établir l'existence et la forme explicite des fonctions réciproques. Il ne reste que les dérivées à calculer :

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Artanh}(x) \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad =$$

Similairement,

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arcoth}(x) \qquad = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \frac{1}{1-x^2}.$$

$\square$

Remarque. On constate que ces deux fonctions ont les mêmes expressions pour leur dérivées. Pourtant ce ne sont pas les mêmes fonctions : leur ensembles de définition ne coïncident pas et sont mêmes disjoints :

$$\mathrm{Def}_{\mathrm{Artanh}} =]-1,1[, \quad \mathrm{Def}_{\mathrm{Arcoth}} = \mathbb{R} \setminus [-1,1].$$

2.6 Puissances généralisées

Rappelons-nous que l'exponentielle et le logarithme nous ont permis de définir des puissances b^a, et cela même pour des valeurs de l'exposant a non rationnelles :

$$\boxed{b^a := \exp_b(a) = \exp(\ln(b)a).}$$

Cette expression est permise pour autant que $b > 0$. On peut alors utiliser cela pour définir des puissances où et l'exposant, et la base sont des fonctions :

Exemple.

Définir et étudier x^x :

La première chose à faire est donc de bien poser l'expression x^x. En effet, on doit poser

$$\boxed{x^x = \exp_x(x) = \exp(\ln(x)x).}$$

Pour que cette expression ait un sens, on doit avoir $x > 0$. On a donc

$$\mathrm{Def}_{x^x} = \mathbb{R}_+^*.$$

(Il serait encore possible d'inclure 0 dans le domaine de définition en posant $0^0 = 1$. Bien que possible, cela est généralement omis et on se restreint à $\mathbb{R}_+^*$.)
Pour $x > 0$ on a en tout cas un objet bien défini. On peut alors s'intéresser aux comportements aux limites de Def_{x^x} :

1. $\lim_{x\to 0^+} x^x$ **:** Par définition on a donc à étudier

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} \exp(\ln(x)x).$$

   La continuité de l'exponentielle nous permet de se restreindre à l'étude de l'exposant $a(x) = \ln(x)x$.
   Comme vu lors des études d'exponentielles, $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. On peut s'en convaincre par une application de la règle de Bernoulli :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \qquad = \qquad$$
$$= \qquad = 0.$$

On a donc

$$\lim_{x\to 0+} x^x \quad = \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad = 1.$$

2. $\lim_{x\to\infty} x^x$: Par définition on a donc à étudier

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \lim_{x\to\infty} \exp(\ln(x)x).$$

On peut à nouveau invoquer la continuité de l'exponentielle pour étudier le comportement de l'exposant :

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(x) = \infty.$$

Par conséquent, par continuité et croissance de l'exponentielle,

$$\lim_{x\to\infty} x^x \quad = \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad = \quad \infty.$$

Pour étudier ce qu'il se passe entre ces deux extrêmes, on va passer à l'étude de la dérivée de x^x. Mais à nouveau, la bijectivité et la monotonie de l'exponentielle nous permettent de nous restreindre à l'étude de l'exposant :

$$x^x < y^y \quad \Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad .$$

Il suffit donc d'étudier le comportement de la fonction

$$f(x) = x\ln(x)$$

pour connaître celui de x^x par exponentiation.
On vient de trouver

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

En dérivant une fois, on obtient

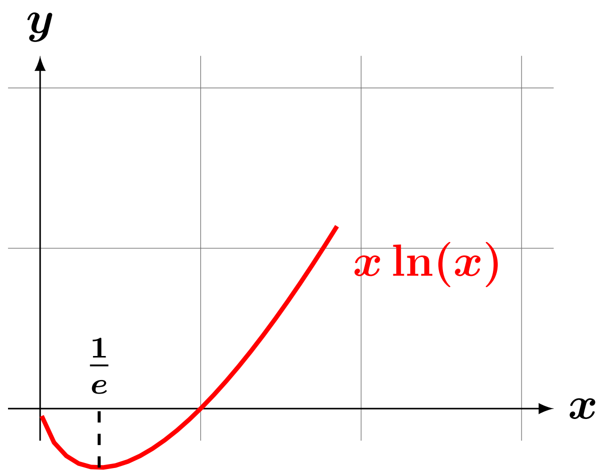
$$f'(x) \quad = \qquad\qquad .$$

Les signes de cette dérivée sont vite connus :

$$\operatorname{sgn}(f'(x)) = \begin{cases} \leq 0 & \text{si } \ln(x) \leq -1, \\ \geq 0 & \text{si } \ln(x) \geq -1, \end{cases} = \begin{cases} \leq 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{e}, \\ \geq 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{e}. \end{cases}$$

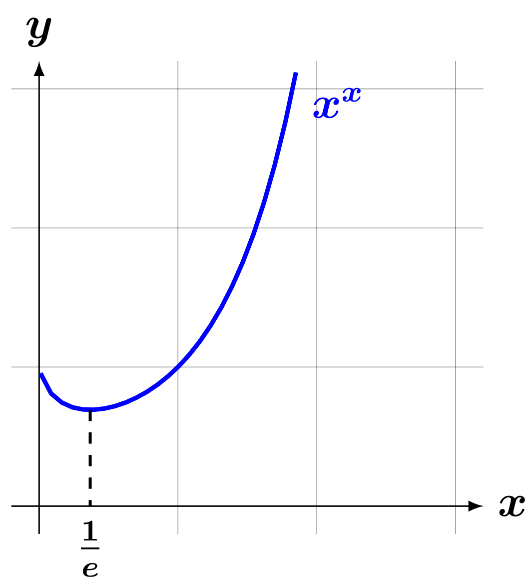
La fonction $f'(x)$ passe donc par 0 et change de signes dans un voisinage de $x = \frac{1}{e}$. On en conclut que

$$f(x) = x\ln(x) \quad \text{est} \quad \begin{cases} \text{décroissante quand} & 0 < x < \frac{1}{e}, \\ \text{minimale pour} & x = \frac{1}{e}, \\ \text{croissante quand} & x > \frac{1}{e}. \end{cases}$$



Par monotonie de l'exponentielle, on a ainsi que

$$\boldsymbol{x^x = \exp(x\ln(x))} \quad \text{est} \quad \begin{cases} \text{décroissante quand} & \boldsymbol{0 < x < \frac{1}{e}}, \\ \text{minimale pour} & \boldsymbol{x = \frac{1}{e}}, \\ \text{croissante quand} & \boldsymbol{x > \frac{1}{e}}. \end{cases}$$



On peut maintenant généraliser par la

Définition 2.6.1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ et telles que $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in E$, on définit

$$(f^g)(x) = f(x)^{g(x)} := \exp(\ln(f(x))g(x)).$$

Tout comme avant, on peut étudier le comportement de la fonction $f(x)^{g(x)}$ en étudiant celui de $\ln(f(x))g(x)$:

Théorème 2.6.2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies et dérivables sur un ensemble ouvert $E \subset \mathbb{R}$ et telles que $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors f^g est dérivable en tout $x \in E$ et

$$(\frac{d}{dx} f^g)(x) = (f^g)\big(g\frac{f'}{f} + g' \ln(f)\big)(x).$$

De plus,

$$\mathrm{sgn}\left((\frac{d}{dx} f^g)(x)\right) = \mathrm{sgn}\left(\frac{d}{dx}(\ln(f)g)(x)\right).$$

Démonstration. En partant des définitions, on a que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x)^{g(x)} &= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

De plus, puisque $(f^g)(x) = \exp(g(x)\ln(f(x)))$, on a que $f^g(x) > 0$ pour tout $x \in E$, ce qui montre que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\left((\frac{d}{dx} f^g)(x) \right) &= \operatorname{sgn}\left((f^g)\big(g\frac{f'}{f} + g' \ln(f)\big)(x) \right) \\
&= \qquad = \operatorname{sgn}\left(\frac{d}{dx}(\ln(f)g)(x) \right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Remarque. Si $g(x) = n \in \mathbb{N}^*$ on est bien sûr ramené à la définition usuelle

$$f(x)^n = \underbrace{f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)}_{n \text{ fois}}.$$

On n'est alors pas restreint par la condition $f(x) > 0$. La définition de

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln(f(x)))$$

s'applique surtout dans le cas où f et g sont des fonctions à valeurs irrationnelles. Remarquons quand même, que pour $x > 0$,

$$x^n = \exp(n \ln(x)) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} = \exp(n \ln(x)) \frac{n}{x}.$$

La définition $\exp(g(x) \ln(f(x)))$ revient donc à la définition usuelle de la puissance dans le cas où $f(x) = x > 0$ et $g(x) = n$.

Exemples.

1. $\boxed{\text{Résoudre } \boldsymbol{(x^2)^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{(x-2)}} \, :}$

La présence de la racine et d'une puissance à exposant à priori irrationnel nous force à prendre $\boldsymbol{D}_{\text{def}} = \mathbb{R}_+^*$.
Sur cet ensemble, l'équation s'écrit donc

$$\boldsymbol{(x^2)^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{(x-2)}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{0 = \ln(x)\left(x - 2 - 4x^{1/2}\right).}$$

Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul. On a donc

$$\begin{cases} \boldsymbol{\ln(x) = 0} \\ \text{ou} \\ \boldsymbol{x - 2 - 4x^{1/2} = 0.} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ \end{cases}$$

La dernière équation est une équation du trinôme et se résout par le discriminant :

$$x^2 - 4x + 4 = 16x \quad \text{et } x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 20x + 4 = 0 \quad \text{et } x \geq 2$$

$$\Delta = 20^2 - 16 = 384 = 6 \cdot 64 \quad \Rightarrow \quad x_{\pm} = \frac{20 \pm 8\sqrt{6}}{2} = 10 \pm 4\sqrt{6}$$

Ne retenant que les valeurs $x \geq 2$ pour cette équation trinômiale et reprenant la valeur $x = 1$ de l'équation logarithmique, on a

$$S = \{1, 10 + 4\sqrt{6}\}.$$

2. $\boxed{\text{Comparer } \pi^{\sqrt{10}} \text{ à } \sqrt{10}^{\pi} \text{ :}}$

On a par définition que $\pi^{\sqrt{10}} = \exp(\ln(\pi)\sqrt{10})$ et $\sqrt{10}^{\pi} = \exp(\ln(\sqrt{10})\pi)$.

Par la monotonie de l'exponentielle, on a que

$$\pi^{\sqrt{10}} > \sqrt{10}^{\pi} \quad \Leftrightarrow$$

On pose alors la fonction

$$f(x) = x\ln(\pi) - \ln(x)\pi$$

et on va étudier le comportement de celle-ci.

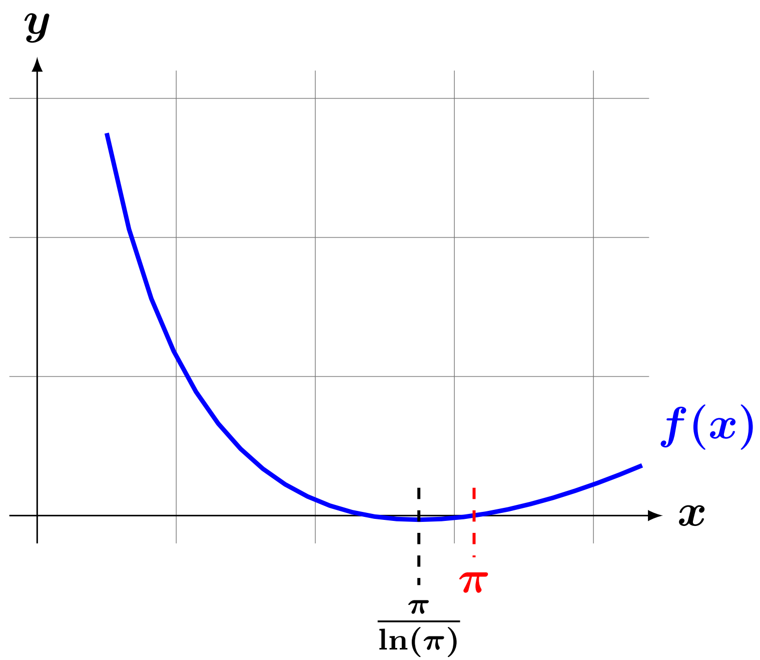
On constate déjà que $f(\pi) = 0$. Puis on la dérive :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) \quad = \qquad .$$

Le signe de cette dérivée est donc particulièrement simple :

$$\operatorname{sgn}(f'(x)) \quad =$$

$$f(x) \quad \text{est donc} \quad \begin{cases} \text{strictement décroissante quand} & 0 < x < \frac{\pi}{\ln(\pi)}, \\ \text{minimale pour} & x = \frac{\pi}{\ln(\pi)}, \\ \text{strictement croissante quand} & x > \frac{\pi}{\ln(\pi)}. \end{cases}$$



On constate maintenant que

$$0 < \frac{\pi}{\ln(\pi)} < \pi < \sqrt{10}.$$

En effet,

$$3 < \pi \quad \Rightarrow \quad 1 < \ln(\pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{\ln(\pi)} < \pi,$$

$$\pi < 3.15 \quad \Rightarrow \quad \pi^2 < (3.15)^2 = (3+0.15)^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot 0.15 + (0.15)^2$$

$$\Rightarrow \quad \pi^2 < 9.9 + \frac{9}{400} < 10 \quad \Rightarrow \quad \pi < \sqrt{10}.$$

Résumons :

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{\pi}{\ln(\pi)}, \infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\pi, \sqrt{10}] \subset [\frac{\pi}{\ln(\pi)}, \infty[$.
- $f(\pi) = 0$.

On peut donc conclure que

$$\sqrt{10}\ln(\pi) - \pi\ln(\sqrt{10}) = f(\sqrt{10}) > f(\pi) = 0.$$

Donc, $\sqrt{10}\ln(\pi) > \pi\ln(\sqrt{10})$, et par conséquent, par exponentiation,

$$\boxed{\pi^{\sqrt{10}} > \sqrt{10}^{\pi}}.$$

3. $\boxed{\text{Etudier la fonction } f(x) = \cos^{\sin}(x) :}$

Pour que cette fonction soit bien définie en terme de puissance généralisée, il faut choisir une base strictement positive, i.e. $\cos(x) > 0$. On a donc

$$\mathrm{Def}_f = \cup_{n\in\mathbb{Z}}\left] -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right[.$$

Sur cette ensemble la fonction s'écrit comme

$$f(x) \quad = $$

Par périodicité, on peut se restreindre à étudier cette fonction sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
On sait que son comportement est semblable à celui de l'exposant. On peut donc étudier

$$g(x) = \ln(\cos(x))\sin(x).$$

Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on sait que cette fonction ne possède qu'un seul 0 :

$$g(x) = \ln(\cos(x))\sin(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \quad x = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Si on se restreint à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on aura plus que $x = 0$ comme unique solution.
Pour comprendre le comportement de $g(x) = \ln(\cos(x))\sin(x)$ en dehors de $x = 0$, on la dérive une fois :

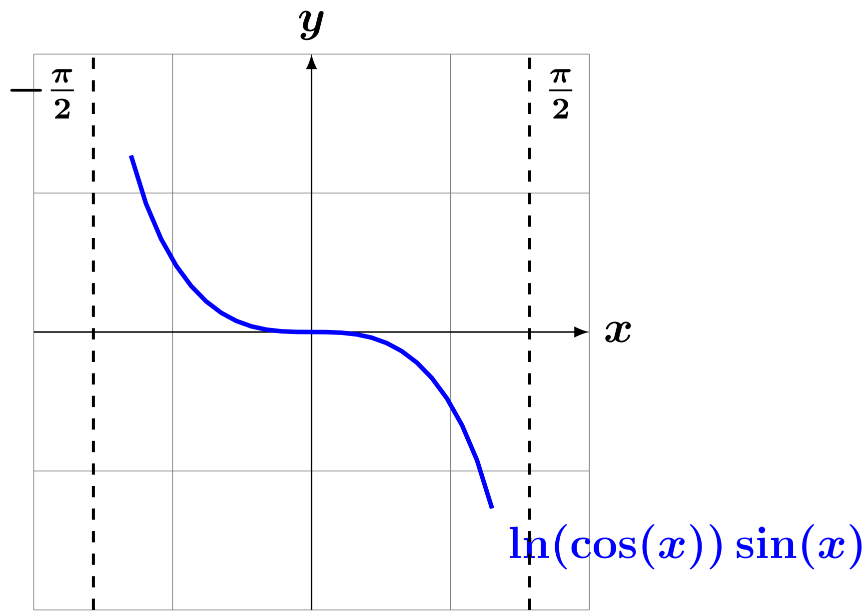
$$g'(x) \quad = \qquad .$$

On constate que

- : Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) > 0$ et $\sin^2(x) \geq 0$. Donc, $\frac{-\sin^2(x)}{\cos(x)} \leq 0$ avec égalité en $x = 0$ uniquement.

- : Sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $1 \geq \cos(x) > 0$. Donc, $\ln(\cos(x))\cos(x) \leq 0$ avec égalité seulement quand $x = 0$.

On en conclut que $g'(x)$ est toujours négative sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, avec un point de dérivée nulle en $x = 0$. La fonction $g(x)$ est donc décroissante, avec un plateau en $x = 0$:



Etudions encore les limites $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} g(x)$:

On remarque premièrement que

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \cos(x) \quad = \qquad .$$

$\cos(x) > 0$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et ainsi,

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) \quad = \qquad\qquad = \qquad .$$

Puis, $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \sin(x) \quad = \qquad$, et par conséquent,

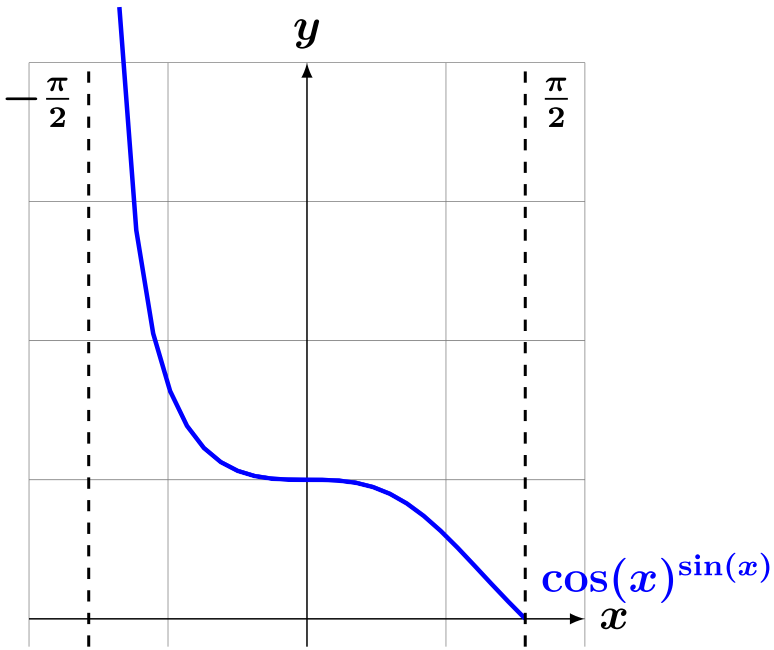
$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} g(x) \quad = \qquad$$

$$\underset{\text{type ''}-\infty\times\text{ borné ''}}{=} \qquad$$

On vient donc de montrer, que $g(x)$ possède deux asymptotes verticales en $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Pour revenir à $f(x) = \cos^{\sin}(x) = \exp\left(g(x)\right)$ il suffit de prendre l'exponentielle. La monotonie stricte de celle-ci nous permet donc de conclure que :

- $\lim_{x \to \frac{-\pi}{2}} g(x) = \infty$, donc, $\lim_{x \to \frac{-\pi}{2}} \cos^{\sin}(x) = \infty$.
- $g(0) = 0$ et y possède un plateau, donc $\cos^{\sin}(0) = 1$ et y possède un plateau.
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = -\infty$, donc, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos^{\sin}(x) = 0$.



Tous ces exemples montrent donc que lorsqu'on étudie une fonction puissance généralisée, on passe par l'étude de son exposant.

Lorsqu'on compare deux fonctions puissances généralisées, on compare leur exposants.

3 Développements Limités

Le but des développements limités est d'approximer des fonctions telles que

$$\sin,\ \cos,\ \exp,\ \ln,\ \sinh,\ \sqrt{},\ldots$$

par des polynômes. L'idée est ainsi de rendre calculable des valeurs telles que

$$\pi,\ \sin(1),\ e = \exp(1), \sqrt{5}$$

et ainsi de suite.

3.1 Polynômes de Taylor

Une première approximation par un polynôme d'une fonction telle que la racine carrée serait par exemple de le faire en traçant la tangente à $\sqrt{x}$ en $x_0 = 1$.
Rappelons que la tangente à une fonction $f(x)$ en un point x_0 fixé se calcul en cherchant une fonction affine $t(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$, qui, en x_0 possède la même valeur et la même pente que $f(x)$.

Ceci donne donc

$$f(x_0) = t(x_0) \quad \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow \qquad\qquad ,$$

$$f'(x_0) = t'(x_0) \quad \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow \qquad\qquad ,$$

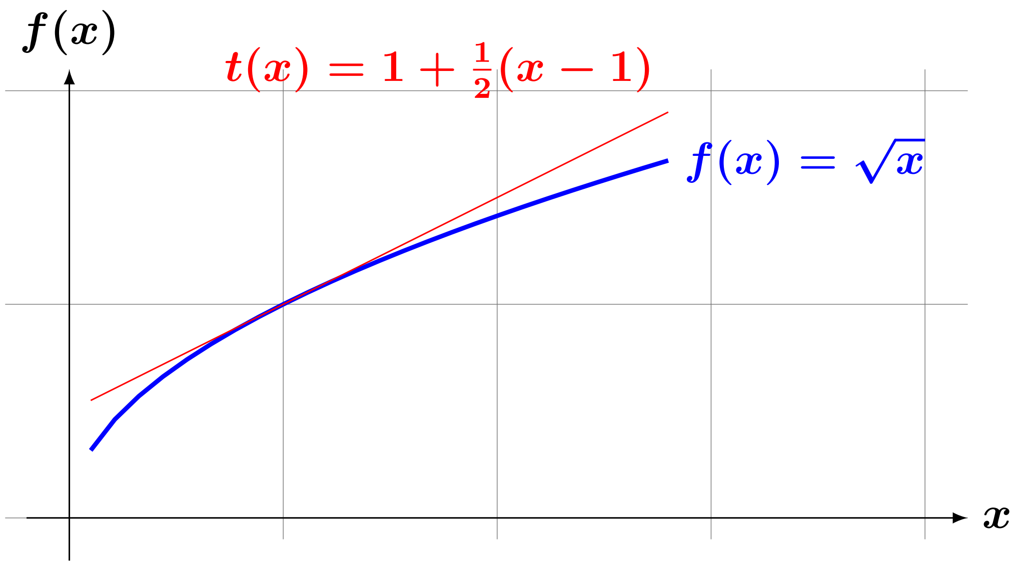
Dans notre cas, avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 1$, on obtient

$$a_0 = \sqrt{1} = 1 \quad \text{et}$$

$$a_1 = \sqrt{x}'\big|_{x=1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\big|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

On obtient ainsi la tangente

$$t(x) \quad = \qquad\qquad .$$



Visuellement, la tangente approxime le graphe de la racine carrée autour de $x_0 = 1$. Mais plus on s'éloigne de $x_0 = 1$, moins l'approximation sera bonne.
Par contre, on peut déjà utiliser $t(x)$ pour calculer une valeur approximative du nombre $\sqrt{2}$.
En effet,

$$t(2) = 1 + \frac{1}{2}(2 - 1) = 1.5.$$

En comparant avec la "vraie" valeur :

$$\sqrt{2} = 1.414\,213\,562\ldots$$

La tangente ne prend pas en compte la courbure de la fonction qu'elle approxime. Pour faire mieux, l'idée est de rajouter un terme $a_2(x - x_0)^2$ pour obtenir un polynôme de second degré

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \qquad\qquad .$$

On ajuste maintenant les coefficients de ce polynôme de sorte qu'en $x = x_0$, il ait les mêmes valeurs que $f(x)$ et les mêmes deux premières dérivées :

$$f(x_0) = P_2(x_0) \quad \Rightarrow \qquad \Rightarrow \qquad ,$$

$$f'(x_0) = P_2'(x_0) \quad \Rightarrow \qquad \Rightarrow \qquad ,$$

$$f''(x_0) = P_2''(x_0) \quad \Rightarrow \qquad \Rightarrow \qquad .$$

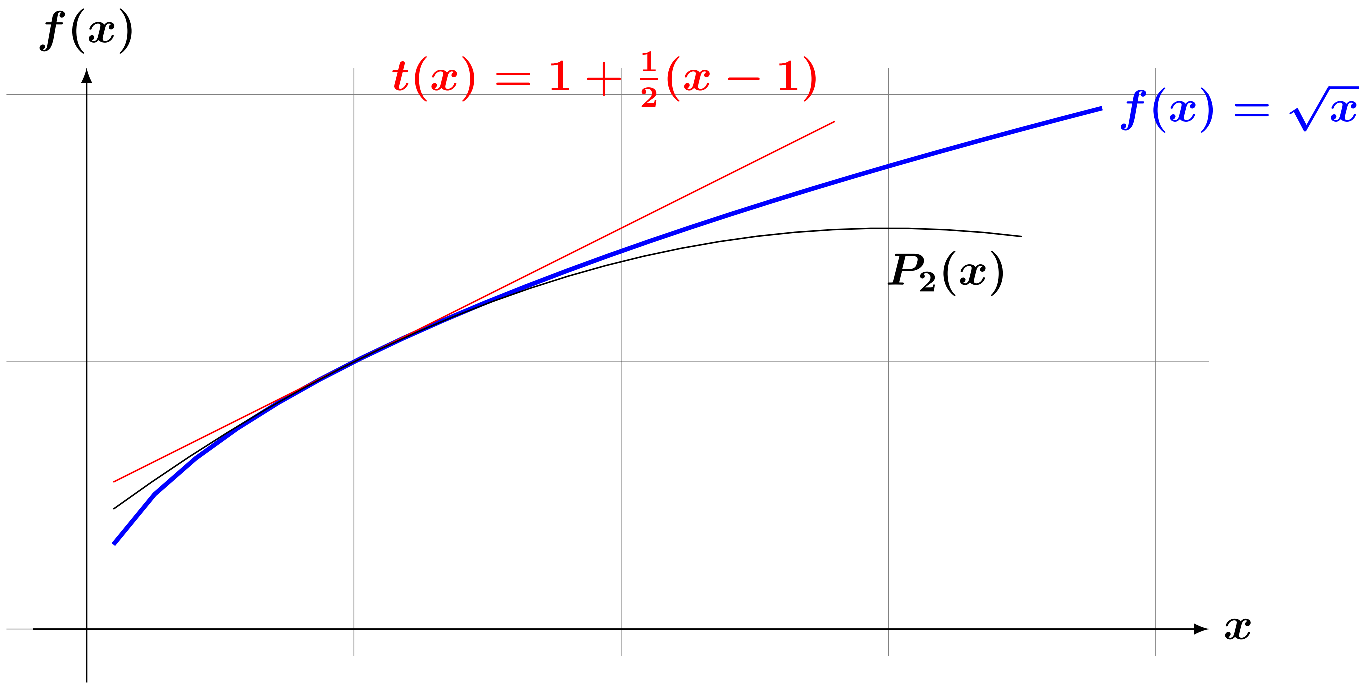
Dans notre cas, avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 1$, on obtient

$$a_0 = \sqrt{1} = 1 \quad a_1 = \sqrt{x}'\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2},$$

$$\text{et} \quad a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{x}''\Big|_{x=1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=1} = -\frac{1}{8}.$$

On obtient ainsi,

$$P_2(x) = \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1)}_{} - \frac{1}{8}(x-1)^2.$$



On peut déjà constater une amélioration du calcul du nombre $\sqrt{2}$. En effet,

$$P_2(2) = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2 = 1.5 - 0.125 = 1.375.$$

Pour obtenir une valeur encore plus exacte, on essaye d'approximer $f(x)$ en x_0 par un polynôme d'ordre 4 par exemple :

$$P_4(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4.$$

L'idée est à nouveau d'égaler les premières dérivées en x_0 :

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4\Big|_{x=x_0} \quad \Rightarrow \qquad ,$$

$$f'(x_0) = a_1 + 2 \cdot a_2(x - x_0) + 3 \cdot a_3(x - x_0)^2 + 4 \cdot a_4(x - x_0)^3\Big|_{x=x_0} \quad \Rightarrow \qquad ,$$

$$f''(x_0) = 2 \cdot a_2 + (3 \cdot 2)a_3(x - x_0) + (4 \cdot 3) \cdot a_4(x - x_0)^2\Big|_{x=x_0} \quad \Rightarrow \qquad ,$$

$$f'''(x_0) = (3 \cdot 2)a_3 + (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot a_4(x - x_0)\Big|_{x=x_0} \quad \Rightarrow \qquad ,$$

$$f^{(4)}(x_0) = (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot a_4\Big|_{x=x_0} \quad \Rightarrow \qquad .$$

Remarque. Afin d'alléger l'écriture, on a introduit une nouvelle notation pour les dérivées :

$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n} f(x) \underset{\text{not.}}{=} f^{(n)}(x).}$$

Dans notre cas, avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 1$, on calcule donc les quatre premières dérivées :

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad f^{(1)}(x) \qquad\qquad, \quad f^{(2)}(x) \qquad\qquad,$$

$$f^{(3)}(x) \qquad\qquad, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-\frac{7}{2}},$$

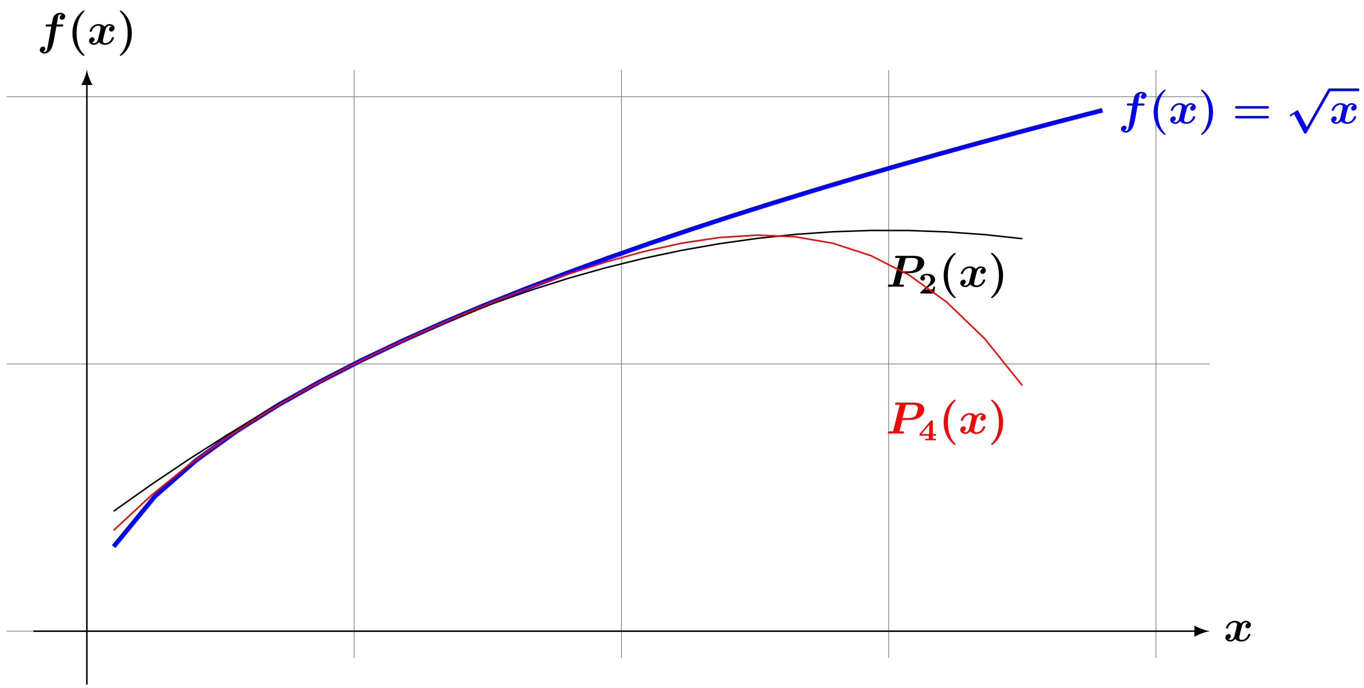
ce qui donne donc pour $x_0 = 1$ les coefficients

$$a_0 = f(x_0) = 1, \quad a_1 = f^{(1)}(x_0) = \qquad\quad, \quad a_2 = \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0) = \qquad\quad,$$

$$a_3 = \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0) = \qquad\quad, \quad a_4 = \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0) = -\frac{5}{128}.$$

On obtient donc

$$P_4(x) = \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2}_{} + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4.$$



On constate que $P_4(x)$ est une meilleure approximation de $\sqrt{x}$ sur l'intervalle $]0, 2[$ (pour $x > 2$, il semble se produire un "décrochage"). Testons avec l'approximation de $\sqrt{2}$ par P_4 :

$$P_4(2) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}. + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} = 1.398\,437\,5,$$

qui est en effet une meilleure approximation encore.

Pour résumer ce qu'on a fait :

- On a cherché à approximer $\sqrt{x}$ par un polynôme $P(x)$. Ceci est fait dans l'idée de calculer ses valeurs, même approximatives.
- Plus le degré de $P(x)$ est élevé, plus on épousera bien le graphe de $\sqrt{x}$, en tout cas dans un voisinage de $x_0 = 1$.
- Les coefficient de $P(x)$ sont fixés par les valeurs successives des dérivées de $\sqrt{x}$ en $x_0 = 1$: le coefficient a_k est donné par

$$a_k = \frac{\sqrt{x}^{(k)}}{k!}\Big|_{x=1}.$$

- Il n'y rien de particuliers à priori avec la racine carrée : si f est une fonction définie et n fois dérivable sur un voisinage de $x_0 = 1$, le polynôme

$$P_{f,1,n}(x) = f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots +$$

  aura les mêmes n premières dérivées que f en $x_0 = 1$.

- Il n'y rien de particuliers à priori à choisir $x_0 = 1$: si f est une fonction définie et n fois dérivable sur un voisinage de $x = X_0$, le polynôme

$$P_{f,x_0,n}(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

  aura les mêmes n premières dérivées que f en $x = x_0$.

Ces considérations sont donc très générales et peuvent être appliquées à toute fonction $f(x)$ suffisamment dérivable sur un voisinage de x_0. On pose alors la

Définition 3.1.1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable en x_0. Le **polynôme de Taylor** de f à l'ordre n autour de x_0 est défini par

$$P_{f,x_0,n}(x) := \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!},$$

où $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ et $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $f^{(k)}(x_0) = (\frac{d^k}{dx^k}f)(x_0)$.

Propriétés.

1. *$P_{f,x_0,n}(x)$ est l'unique polynôme de degré n, tel que*

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, \quad \left(\frac{d^k}{dx^k}P_{f,x_0,n}\right)(x_0) \quad = \qquad\qquad .$$

2. *Les premiers termes non nuls et non constants de $P_{f,x_0,n}(x)$ redonnent l'IPE de f.*
3. *Pour $0 < m < n$ on a*

$$\left[P_{f,x_0,n}(x)\right]_m \quad = \qquad\qquad ,$$

où $\big[\,\dots\big]_m$ signifie qu'on ne retiens que les termes de puissances inférieurs ou égal à m.

4. *Si f est un polynôme de degré n, alors*

$$P_{f,x_0,n}(x) \quad = \qquad .$$

Passons maintenant à des exemples :

Exemples.

1. $\boxed{\text{Informations pour écrire } P_{f,x_0,n}(x) :}$

   Il suffit de connaître les dérivées successives d'une fonction en x_0 pour déterminer son polynôme de Taylor autour de ce point. Par exemple :

$$f(-1) = 1, \quad f'(-1) = 2, \quad f''(-1) = 3, \quad f'''(-1) = 4,$$

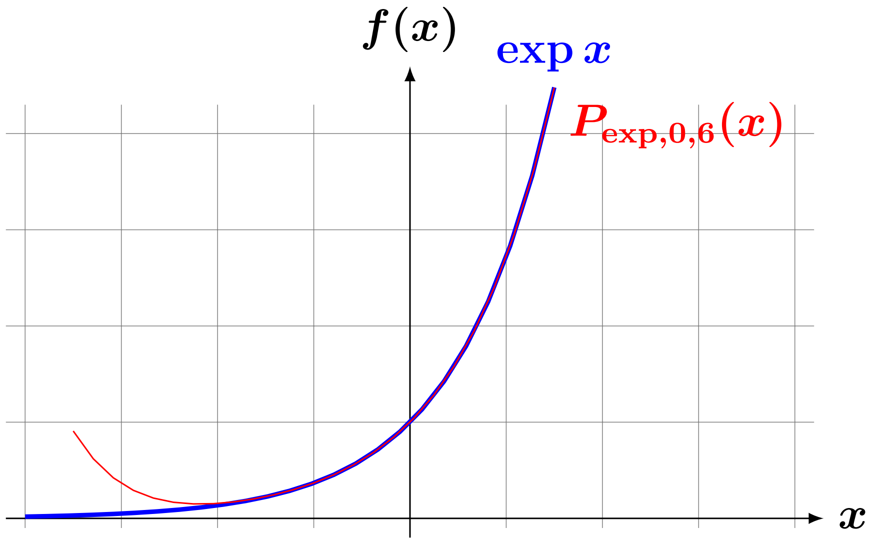
$$P_{f,-1,3}(x) \quad = $$

$$=$$

2. $\boxed{\boldsymbol{f(x) = \exp(x), \quad x_0 = 0} :}$

L'exponentielle est une fonction particulièrement simple à développer en polynôme de Taylor : toutes les dérivées de l'exponentielle égalent $\exp(x)$. Donc, $\forall k \geq 0, \quad \exp^{(k)}(0) = 1$ et le polynôme de Taylor à l'ordre n s'écrit comme

$$P_{\exp,0,n}(x) \quad =$$



Graphiquement la différence entre la fonction et son polynôme de Taylor est indiscernable proche de $x_0 = 0$. On peut d'ailleurs en profiter pour approximer la valeur numérique de $e = \exp(1)$:

$$\begin{aligned} e = \exp(1) &\approx P_{\exp,0,n}(1) \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \ldots = 2.718\,0\overline{5}, \end{aligned}$$

à comparer avec la valeur

$$e = 2.718\,281\,828\,46\ldots$$

3. $\boxed{f(x) = \cos(x), \quad x_0 = 0 :}$

Approximons $\cos(x)$ autour de $x_0 = 0$ à l'ordre n.
Par définition, le polynôme de Taylor $P_{\cos,0,n}(x)$ aura $n+1$ coefficients, déterminés par

$$a_k \quad = \qquad\qquad$$

pour $k = 0, 1, 2 \ldots, n$.

Il faut donc commencer à calculer les dérivées de $\cos(x)$.
Montrons par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2}).$$

Pour $k = 0$, le résultat est manifeste. On peut donc initialiser la récurrence pour $k = 0$.
Pour l'hérédité on observe que

$$\cos^{(k+1)}(x) \quad = \qquad\qquad \underset{\text{hyp. réc.}}{=} \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

$$= \cos\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Cela est bien le résultat annoncé pour $k + 1$.

Pour $x_0 = 0$ les coefficients du polynôme de Taylor sont alors

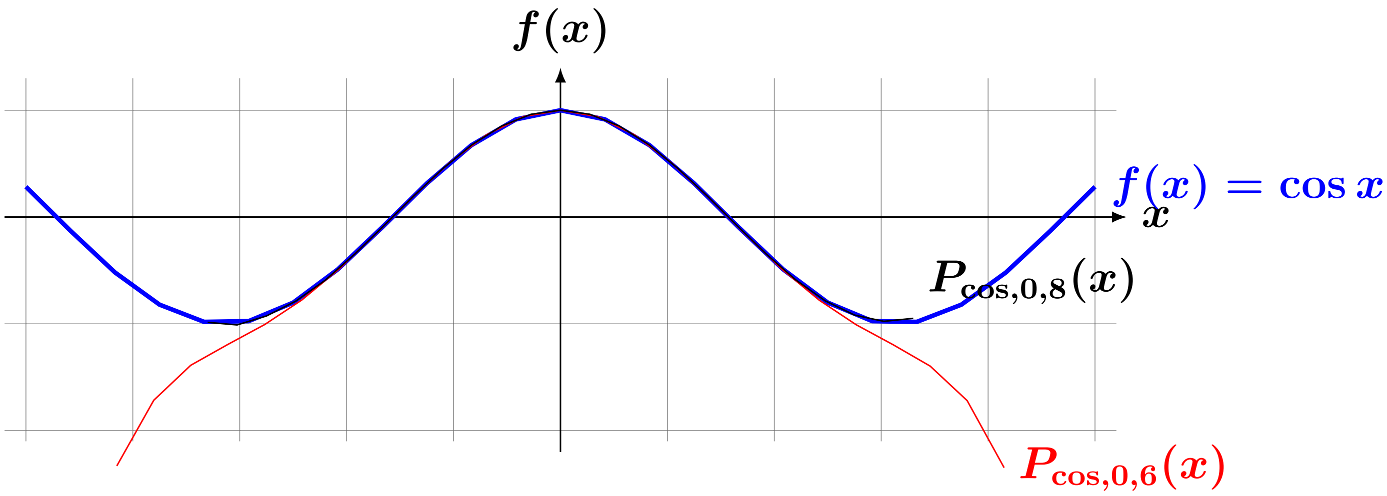
$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad a_k = \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}\cos(0 + k\frac{\pi}{2})$$

$$=$$

On en conclut donc que

ce qu'on peut réécrire comme

$$P_{\cos,0,n}(x) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}.$$



4. $\boxed{f(x) = \ln(x), \quad x_0 = 1:}$

Quand on ne peut pas développer une fonction autour de $x_0 = 0$, ce qui est le cas du logarithme naturel par exemple, on choisit une autre valeur pour x_0. Dans le cas du logarithme, on peut par exemple prendre $x_0 = 1$. Les dérivées successives du logarithme naturel sont

$$\ln^{(1)}(x) = \frac{1}{x}, \quad \ln^{(2)}(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad \ln^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad \ln^{(4)}(x) = \frac{-3 \cdot 2}{x^4}, \ldots$$

On devine que

$$\ln^{(n)}(x) \quad = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

En effet, cette formule est valide pour $n = 1, 2, 3$ et 4. Vérifions l'hérédité de cette relation :

$$\ln^{(n+1)}(x) \quad = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad\qquad = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}},$$

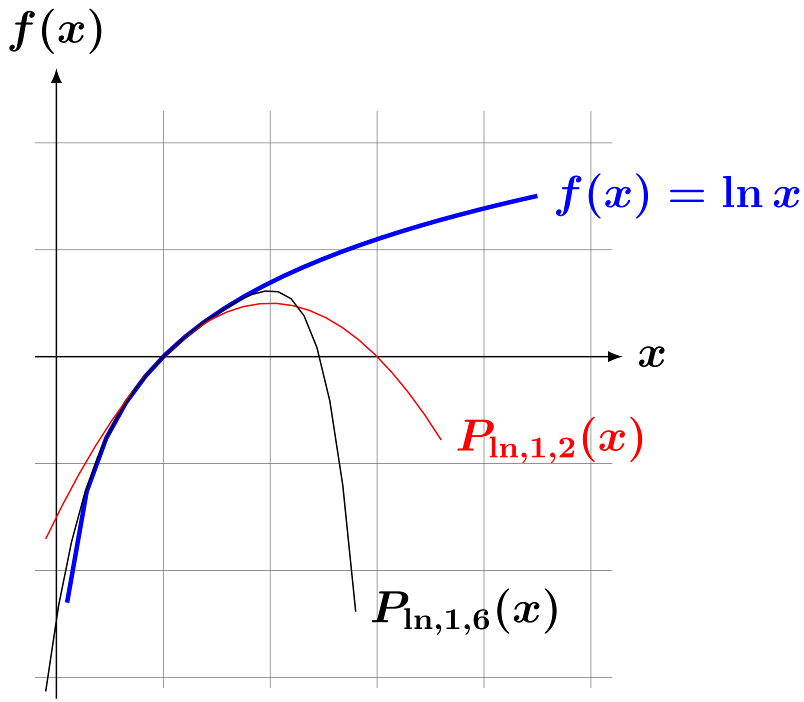
qui est bien la formule attendue pour $n+1$. On conclut par récurrence que

$$\forall n \geq 1, \quad \ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

En évaluant ces dérivées en $x_0 = 1$ et en mutlipliant, conformément à la définition, ces valeurs par $(x-1)^n$, on trouve

$$P_{\ln,1,n}(x) = \ln(1) + \ln^{(1)}(1)(x-1) + \frac{\ln^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{\ln^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots$$

$$=$$



Le dernier exemple pose la question de la convergence des polynômes de Taylor. En effet, pour le logarithme naturel, il semble que plus on augmente le degré n du polynôme de Taylor en $x_0 = 1$, plus celui-ci approxime bien le graphe du logarithme, mais seulement sur l'intervall $]\mathbf{0},\mathbf{2}[$. Au-delà de la valeur $\boldsymbol{x}=\mathbf{2}$, il semble que l'approximation est moins bonne. Pour comprendre ce qu'il se passe, il faut passer à une étude de l'erreur d'approximation commise par les polynôme de Taylor.

3.2 Corrections

La question naturelle qui vient maintenant est à quel point la fonction est-elle bien aproximée par son polynôme de Taylor. Ou encore, peut-on évaluer l'erreur faite ?

Par chance on a le

Théorème 3.2.1. Soient $x, x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant $[x_0, x]$. Alors il existe $\xi \in]x_0, x[$ tel que

$$r_{f,x_0,n}(x) := f(x) - P_{f,x_0,n}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

$r_{f,x_0,n}(x)$ est appelé le **terme de correction** et l'écriture

$$f(x) = P_{f,x_0,n}(x) + r_{f,x_0,n}(x)$$

est appelé le **développement limité** de f à l'ordre n autour de x_0.

Démonstration. (facultative) Pour $t \in [x_0, x]$, posons

$$F(t) = f(x) - P_{f,t,n}(x) - (x-t)^{n+1}\frac{c}{(n+1)!},$$

avec

$$c = \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}\left(f(x) - P_{f,x_0,n}(x)\right).$$

En substituant t par x, on remarque que $F(x) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned} F(x_0) &= f(x) - P_{f,x_0,n}(x) - (x-x_0)^{n+1}\frac{c}{(n+1)!} \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}c - (x-x_0)^{n+1}\frac{c}{(n+1)!} = 0. \end{aligned}$$

La fonction $F(t)$ s'annule donc sur les bords de l'intervalle $[x_0, x]$ et est une fois dérivable sur ce dernier. Ainsi, par le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]x_0, x[$, tel que $F'(\xi) = 0$. Calculons alors la dérivée de $F(t)$:

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\big(f(x) - P_{f,t,n}(x) - (x-t)^{n+1}\frac{c}{(n+1)!}\big)$$

$$= -\frac{d}{dt}P_{f,t,n}(x) + (x-t)^n\frac{c}{n!}$$

$$= (x-t)^n\frac{c}{n!} - \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$= (x-t)^n\frac{c}{n!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

$$= (x-t)^n\frac{c}{n!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$= (x-t)^n\frac{c}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n = \frac{(x-t)^n}{n!}\Big(c - f^{(n+1)}(t)\Big).$$

$F'(\xi) = 0$ implique alors $\frac{(x-\xi)^n}{n!}\Big(c - f^{(n+1)}(\xi)\Big) = 0$ et puisque $\xi \in]x_0, x[$, on a $(x-\xi)^n \neq 0$ et donc $c - f^{(n+1)}(\xi) = 0$, ou encore $c = f^{(n+1)}(\xi)$. Mais par définition de c :

$$c = \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}\left(f(x) - P_{f,x_0,n}(x)\right) = f^{(n+1)}(\xi),$$

d'où le résultat $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = f(x) - P_{f,x_0,n}(x)$. $\square$

Remarques :

1. Le terme de correction ressemble au $n+1-$ ième terme du polynôme de Taylor pour f. La seule différence est que la dérivée $f^{(n+1)}$ est évaluée en $\xi \in]x_0, x[$ et non en x_0 :

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\qquad\qquad} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\qquad\qquad}.}$$

2. Le théorème nous dit rien de très précis sur ξ. La seule chose que l'on sait est qu'il se situe dans l'ouvert $]x_0, x[$. La situation est tout à fait analogue au **théorème des accroissements finis** :

$$\exists \xi \in]x_0, x[\text{ tel que } f(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Là non plus, rien de plus est connu pour ξ. Malgré cela, on pourra utiliser l'existence d'un tel ξ pour étudier le comportement du terme d'erreur.

3. Pour x_0 fixé et x qui varie dans l'ensemble de définition de f, on a bien sûr que la valeur de ξ peut varier aussi avec celle de x. Puisque $\xi \in]x_0, x[$, on a sûrement que

$$\lim_{x \to x_0} \xi = x_0.$$

   C'est une chose qu'on peut affirmer, sans même connaître plus précisément ξ.

4. Le terme de correction change avec le degré du polynôme de Taylor. On espère maintenant que ce terme de correction tend vers 0 si on augmente ce degré n. Cela signifierait que la fonction se laisse approcher exactement par son polynôme de Taylor.

Exemples.

1. Calcul de valeurs non remarquables pour $\cos(x)$:

   Comment estimer la valeur de $\cos(\frac{1}{2})$? A l'ordre 2, le développement limité, i.e. le polynôme de Taylor de cette fonction pour $x_0 = 0$ et son terme de correction, est

$$\cos(x) \quad =$$

Remarquer qu'on peut même affiner le terme de correction dans ce cas : comme le polynôme de Taylor pour le cosinus n'implique que des termes de puissances paires, on a que $P_{\cos,0,2}(x) = P_{\cos,0,3}(x)$. On peut donc écrire

$$\cos(x) \quad = \qquad\qquad \text{pour un } \xi \in]0, x[.$$

Si on pose $x = \frac{1}{2}$, on a $0 < \xi < \frac{1}{2}$. La valeur de $\cos(\xi)$ est alors comprise entre 0 et 1. on obtient alors l'estimation

$$\qquad < \quad \cos(\frac{1}{2}) \quad < \qquad$$

On obtient alors l'encadrement

$$0,875 = \frac{7}{8} \quad < \quad \cos(\frac{1}{2}) \quad < \quad \frac{7}{8} + \frac{1}{384} = 0,877\,604.$$

On peut donc conclure, que le polynôme de Taylor à l'ordre 2 nous donne la valeur de $\cos(\frac{1}{2})$ avec deux décimales exactes.

2. Déterminer les bonnes décimales pour e :

L'exemple de l'exponentielle de la section précédente nous a conduit à estimer

$$e \quad \approx \quad P_{\exp,0,6}(1) \quad = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{6!} \quad = \quad 2{,}718\,0\overline{5}.$$

Le théorème précédent nous dit que pour la vraie valeur de e, il faut ajouter le terme de correction :

$$e \quad = \quad P_{\exp,0,6}(1) \qquad\qquad = 2{,}718\,0\overline{5}$$

Le terme d'erreur se laisse lui-même estimer. En effet, bien qu'on ne sache pas la valeur exacte de ξ, on sait néanmoins que ce nombre se trouve dans $]0, 1[$ ($x_0 = 0$ et $x = 1$), et que donc $\exp(\xi) < \exp(1) = e < 3$.
On arrive alors à encadrer la valeur de e :

$$2{,}718\,0\overline{5} \quad < \quad e \quad < \quad 2{,}718\,0\overline{5} + \frac{3}{7!} = 2{,}718\,650\ldots.$$

Le terme de correction nous permet alors d'affirmer, que $2{,}718$ sont les premières déci-

males exactes pour e.
On peut d'ailleurs essayer de trouver plus de décimales exactes, en écrivant

$$e \quad = \quad P_{\exp,0,8}(1) \qquad = \underbrace{2,718\,05\overline{5}}_{P_{\exp,0,6}(1)}$$

Après calculs on trouve

$$2,718\,278\ldots \quad < \quad e \quad < \quad 2,718\,278\ldots + \frac{3}{9!} = 2,718\,287\ldots.$$

On a donc une nouvelle décimale exacte : $e = 2,718\,2\ldots$.

Ces exemples semblent indiquer, que plus on augmente l'ordre du polynôme de Taylor d'une fonction, mieux on arrive à approximer les valeurs de $f(x)$ pour une valeur de x donnée. Est-il possible alors qu'à la limite de l'ordre tendant vers l'infini, on retrouve exactement la valeur $f(x)$?
Pour certaines fonctions et certaines valeurs de x, cela est en effet le cas. Etudions certaine exemples :

Exemples. 1. $\boxed{f(x) = \cos(x),\ x_0 = 0 :}$

On a déjà calculé

$$P_{\cos,0,n}(x) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \qquad .$$

de plus, on a aussi établi le résultat

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(k)}(x) \qquad .$$

D'après le théorème précédent, $r_{\cos,0,n}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos^{(n+1)}(\xi)$, avec $\xi \in [0, x]$. On a donc

$$|r_{\cos,0,n}(x)| = |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos^{(n+1)}(\xi)| =$$

$$\leq \qquad , \quad \text{car } \cos(x) \text{ ne prend que des valeurs entre } -1 \text{ et } 1.$$

Pour une valeur de x fixée et pour des valeurs de n grandissantes, on a alors dès que n dépasse la valeur de $N_0 := \lfloor x \rfloor + 1$:

$$|r_{\cos,0,n}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{\overbrace{|x| \cdot |x| \ldots |x|}^{n+1 \text{ termes}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \ldots (n+1)}_{n+1 \text{ termes}}} = \frac{\overbrace{|x| \cdot |x| \ldots |x|}^{N_0 \text{ termes}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \ldots N_0}_{N_0 \text{ termes}}} \cdot \frac{\overbrace{|x| \cdot |x| \ldots |x|}^{n+1-N_0 \text{ termes}}}{\underbrace{(N_0+1) \ldots (n+1)}_{n+1-N_0 \text{ termes} > |x|}}$$

$$< \frac{|x| \cdot |x| \ldots |x|}{\underbrace{1 \cdot 2 \ldots N_0}_{\text{valeur fixe}}} \frac{|x|}{n+1} \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le terme de correction $r_{\cos,0,n}(x)$ tend donc vers 0 avec n, et cela pour chaque valeur de x fixée. Ainsi, pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P_{\cos,0,n}(x) = \cos(x).}$$

Le cosinus est donc la valeur limite des polynômes de Taylor, qui approxime donc d'aussi

proche qu'on veut la valeur de $\cos(x)$.
On voit grâce à cet exemple, que la connaissance de la valeur exacte de ξ n'est pas nécessaire pour montrer que le terme de correction tend vers 0. Uniquement son existence nous a suffit pour conclure.
Le $\cos(x)$ est donc une limite de polynôme. Mais **attention !** : cela ne veut pas dire que c'est lui-même un polynôme. La situation peut se comparer aux nombres irrationnels : ils sont tous des limites de nombres rationnels, mais la limite, même si elle existe dans $\mathbb{R}$, ne l'est pas.

2. $\boxed{f(x) = \exp(x),\ x_0 = 0 :}$

Là aussi, on peut reprendre notre calcul précédent :

$$P_{\exp,0,n}(x) = \qquad .$$

Le théorème précédent nous dit alors, que le terme de correction est

$$r_{\exp,0,n}(x) = \qquad\qquad , \quad \text{pour un } \xi \in]0, x[.$$

Par la monotonie de l'exponentielle, on a $\exp(\xi) \leq \exp(x)$. A nouveau, fixons une valeur de x et faisons croître les valeurs de n :

$$|r_{\exp,0,n}(x)| = |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\xi)| \leq \qquad\qquad .$$

Comme pour l'exemple précédent, $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et $\exp(x)$ est une valeur fixée si x l'est. On a donc là aussi que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} r_{\exp,0,n}(x) = 0,$$
$$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} P_{\exp,0,n}(x) = \exp(x).$$

On obtient donc une manière de calculer le nombre e :

$$\boxed{e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} P_{\exp,0,n}(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}.}$$

Là aussi, il est à remarquer, que bien que l'exponentielle est une limite de polynômes, la fonction elle-même n'est pas un polynôme.
Tout comme le nombre e, qui est limite de nombres rationnels, mais qui lui est irrationnel.

3. $\boxed{f(x) = \ln(x), \quad x_0 = 1 :}$

On a montré que

$$\ln^{(n)}(x) = \qquad\qquad .$$

On peut donc à nouveau invoquer le dernier théorème est écrire le terme de correction :

$$r_{\ln,1,n}(x) = \qquad\qquad \text{avec un } \xi \in]1, x[,$$

$$= \qquad\qquad .$$

Comme $\xi > 1$ on aura que $\frac{1}{\xi} < 1$ et on a l'estimation

$$|r_{\ln,1,n}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)}|x-1|^{n+1}.$$

Pour montrer que cette estimation tend vers 0 avec n qui augmente, on est obligé de distinguer deux cas :

- $\underline{1 < x \leq 2 :}$ dans ce cas $|x-1| \leq 1$ et

$$\lim_{n\to\infty} |r_{\ln,1,n}(x)| \leq \qquad = 0.$$

On a donc que

$$\boxed{\forall x \in [1,2], \quad \lim_{n\to\infty} P_{\ln,1,n}(x) = \ln(x).}$$

En posant $x = 2$ on obtient la fameuse équation

$$\ln(2) = \lim_{n\to\infty} P_{\ln,1,n}(2)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$$

- $\underline{x > 2 :}$ dans ce cas $|x-1| > 1$ et on ne peut plus garantir la convergence du polynôme de Taylor vers la valeur du logarithme : dans le terme de correction, le terme $|x-1|^{n+1}$ diverge vers l'infini avec n.
  Ceci explique le "décrochage" observé graphiquement.

Une autre application du terme de correction d'un développement limité est son utilisation pour calculer des limites d'une fonction à priori mal définie en un point. Cela complètera notre arsenal d'analyse de ce genre de situation avec le théorème de l'Hôpital.

Exemples.

1. $\boxed{\text{Calcul de } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}.}$

On reprend le développement limité à l'ordre 3 de $\sin(x)$ autour de $x_0 = 0$:

$$P_{\sin,0,3}(x) = \qquad\qquad ,$$

$$r_{\sin,0,3}(x) = \qquad\qquad = \qquad\qquad ,$$

$$\sin(x) = \underbrace{x - \frac{1}{3!}x^3}_{P_{\sin,0,3}(x)} + \underbrace{\frac{x^4}{4!}\sin(\xi)}_{r_{\sin,0,3}(x)}\,.$$

En fait, ξ, nombre inconnu, satisfait $\xi \in]0, x[$ ou $\xi \in]x.0[$, suivant si $x > 0$ ou $x < 0$. On peut alors réécrire la limite à calculer comme

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{3!} + \frac{x}{4!}\sin(\xi) \right).$$

On remarque maintenant que $\sin(\xi)$ reste borné et que $\lim_{x \to 0} \frac{x}{4!} = 0$. On a donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{3!}.$$

2. $\boxed{\text{Calcul de } \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1+\frac{1}{2}x^2+x^4}{x^4}.}$

On reprend le développement limité à l'ordre 4 de $\cos(x)$ autour de $x_0 = 0$:

$$P_{\cos,0,4}(x) = \qquad\qquad ,$$

$$r_{\cos,0,4}(x) = \qquad\qquad = \qquad\qquad ,$$

$$\cos(x) = \underbrace{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4}_{P_{\cos,0,4}(x)} \underbrace{- \frac{x^5}{5!}\sin(\xi)}_{r_{\cos,0,4}(x)}.$$

On rappelle que ξ, nombre inconnu, satisfait $\xi \in]0, x[$ ou $\xi \in]x, 0[$, suivant si $x > 0$ ou $x < 0$.

On peut alors réécrire la limite à calculer comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^4}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\qquad\qquad}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \qquad\qquad .$$

On remarque maintenant que $\sin(\xi)$ reste borné et que $\lim_{x\to 0} \frac{x}{5!} = 0$. On a donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^4}{x^4} = \frac{25}{24}.$$

On peut énoncer un résultat général sur le terme de correction :

Théorème 3.2.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois continûment dérivable sur un voisinage ouvert $I \ni x_0$. Alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_{f,x_0,n}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Démonstration. On sait qu'il existe un $\xi \in]x_0, x[$ (ou $\xi \in]x, x_0[$) tel que

$$r_{f,x_0,n}(x) = \qquad\qquad .$$

Puis, on remarque que $\xi \in]x_0, x[$ (ou $\xi \in]x, x_0[$) implique que $\lim_{x \to x_0} \xi = x_0$.
Comme $f^{(n+1)}(x)$ est continue sur $I \ni x_0$ on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!(x - x_0)^n} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \qquad\qquad = 0 \cdot f^{(n+1)}(x_0) = 0.$$

$\square$

3.3 Règles de calcul pour polynômes de Taylor

Le but d'apprendre des règles de calcul pour les polynômes de Taylor est d'économiser des calculs de dérivées et d'utiliser des résultats déjà établis.

Règle d'addition : Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle ouvert $I \ni x_0$, alors

$$P_{f+g,x_0,n}(x) = P_{f,x_0,n}(x) + P_{g,x_0,n}(x).$$

Exemples.

1. $\boxed{\text{Calcul de } P_{\frac{1+x}{1-x},0,n}(x)}$

Calculer les dérivées d'une fonction rationnelle telle que $\frac{1+x}{1-x}$ peut s'avérer vite très laborieux. On va s'aider de la règle d'addition pour simplifier considérablement les calculs : On remarque d'abord que

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{2+x-1}{1-x} =$$

On a déjà calculé les polynômes de Taylor pour $\frac{1}{1-x}$:

$$P_{\frac{1}{1-x},0,n}(x) \quad = \qquad\qquad = \quad \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

On applique maintenant simplement la règle de calcul pour l'addition :

$$P_{\frac{1+x}{1-x},0,n}(x) \quad = \quad P_{\frac{2}{1-x}-1,0,n}(x) \quad = \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

$$= \quad 1 + 2\sum_{k=1}^{n} x^k.$$

Puisqu'on sait que $P_{\frac{2}{1-x},0,n}(x)$ converge vers $\frac{2}{1-x}$ quand n tend vers l'infini et quand $x \in]-1,1[$ est fixé, il en va de même pour $P_{\frac{1+x}{1-x},0,n}(x)$.
En fait, le terme de correction d'une somme est aussi la somme des termes de corrections.

2. $\boxed{\text{Calcul de } P_{\sinh,0,n}(x) \text{ et } P_{\cosh,0,n}(x)}$

On sait déjà que

$$P_{e^x,0,n}(x) \quad = \qquad\qquad\qquad = \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

$$P_{e^{-x},0,n}(x) \quad = \qquad\qquad\qquad = \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

Or, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. On peut donc additionner, ou soustraire, les deux polynômes de Taylor pour l'exponentielle croissante et décroissante pour trouver ceux du $\cosh(x)$ et du $\sinh(x)$.
Ce faisant, on aura retenu une fois que les puissances paires du polynôme de Taylor pour e^x, et une fois les puissances impaires : en effet, en observant les polynômes de Taylor plus précisément, on constate que les mêmes termes apparaissent dans le polynôme $P_{e^x,0,n}(x)$ et $P_{e^{-x},0,n}(x)$, au signe près. Les puissances paires apparaissent avec le même signe alors que les puissances impaires apparaissent avec un signe opposé.

Quand on additionne alors $P_{e^x,0,n}(x)$ et $P_{e^{-x},0,n}(x)$, ne resterons que les termes de puissances paires, alors que si on soustrait ne resterons que les termes en puissance impaires :

$$P_{\cosh,0,n}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \sum \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$P_{\sinh,0,n}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Remarque. On remarque d'ailleurs que la parité des puissances dans les polynômes de Taylor reflètent exactement la parité des deux fonctions, **pour autant que** $x_0 = 0$.
En effet, si f est paire, sa dérivée sera impaire, et si f est impaire, sa dérivée sera paire :

$$f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))' = \qquad$$

$$\Rightarrow \quad f'(-x) = \qquad = -f'(-x);$$

$$f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))' = \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$\Rightarrow \quad f'(-x) \quad = \qquad\qquad\qquad\qquad = \quad +f'(-x).$$

Donc, si f est paire, toutes ses dérivées d'orde impaires seront impaires et vont s'annuler en $x_0 = 0$.
Si f est impaire, toutes ses dérivées d'orde paires seront impaires et vont s'annuler en $x_0 = 0$.
Par conséquent, on a pour de telles fonctions

$$f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad P_{f,0,n}(x) = f(0) + \cancel{f'(0)}x + \frac{1}{2}f^{(2)}(0)x^2 + \frac{1}{3!}\cancel{f^{(3)}(0)}x^3 + \ldots,$$

$$f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow \quad P_{f,0,n}(x) = \cancel{f(0)} + f'(0)x + \frac{1}{2}\cancel{f^{(2)}(0)}x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \ldots.$$

Par conséquent, si f est **paire**, son polynôme de Taylor autour de $x_0 = 0$ n'aura que des puissances **paires** et si f est **impaire**, son polynôme de Taylor autour de $x_0 = 0$ n'aura que des puissances **impaires**.

Règle de composition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur un intervalle $J \ni y_0$. Pour $x_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, posons

$$g(x) \quad := \quad f(y_0 + a(x - x_0)^N).$$

Alors

$$P_{g,x_0,Nn}(x) \quad = \quad P_{f,y_0,n}\left(y_0 + a(x - x_0)^N\right).$$

Remarques.

1. La règle de composition dit donc, que pour obtenir le polynôme de Taylor P_g d'une fonction g qui est la composition d'une fonction f avec une fonction puissance, il suffit de composer le polynôme de Taylor P_f de f avec cette même fonction puissance.
2. **Attention !** Quand cette composition est faite, il faut prendre garde aux points x_0 et y_0 autour desquels on considère les polynômes de Taylor :

- x_0 est le point autour duquel on calcule le polynôme de Taylor de la composition $g(x) = f(y_0 + a(x - x_0)^N)$.
- y_0 est le point autour duquel on calcule le polynôme de Taylor de f.
- Le lien entre x_0 et y_0 est $y_0 = y_0 + a(x - x_0)^N\big|_{x=x_0}$.

Exemples.

1. $\boxed{\text{Calcul de } P_{\ln(1+x),0,n}(x) \textbf{ :}}$

La fonction $\ln(1+x)$ est précisément la composition de $f(y) = \ln(y)$ avec .
En posant $x_0 = 0$, on a bien $y_0 = 1 + x_0\big|_{x_0=0} = 1$.
La règle de composition nous dit alors qu'il faut évaluer (ou composer) le polynôme de Taylor $P_{\ln,1,n}(y)$ en $y = 1 + x$. Or, on a déjà calculé le polynôme de Taylor du logarithme en $y_0 = 1$:

$$P_{\ln,1,n}(y) \quad = \quad (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(y-1)^n.$$

On peut donc simplement évaluer $P_{\ln,1,n}(y)$ en $y = 1 + x$ pour obtenir $P_{\ln(1+x),0,n}(x)$:

$$P_{\ln(1+x),0,n}(x) \quad = \quad P_{\ln,1,n}(y)\Big|_{y=x+1} \quad = \quad P_{\ln,1,n}(1+x)$$

$$=$$

$$=$$

On peut conclure que

$$\boxed{P_{\ln(1+x),0,n}(x) = P_{\ln,1,n}(1+x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k.}$$

2. $\boxed{\text{Un calcul faux de } P_{\ln(2+x),0,n}(x) \text{ :}}$

La fonction $\ln(2+x)$ est précisément la composition de $f(y) = \ln(1+y)$ avec . Comme on vient de calculer $P_{\ln(1+y),0,n}(y)$, la tentation d'évaluer ce polynôme en $y = 1 + x$ est grande pour obtenir $P_{\ln(2+x),0,n}(x)$. Mais **attention !**

Dans $P_{\ln(1+y),0,n}(y)$, $y_0 =$ alors que $y = 1 + x\big|_{x=0} = 1 \neq y_0$. On ne peut donc pas simplement évaluer $P_{\ln(1+y),0,n}(y)$ en $y = 1 + x$ pour obtenir $P_{\ln(2+x),0,n}(x)$.
Regardons d'ailleurs ce que cela donnerait :

$$P_{\ln(1+y),0,n}(y) \quad =$$

$$P_{\ln(1+y),0,n}(y)\big|_{y=1+x} \quad =$$

Puisque ceci est une expression en puissances de $(x+1) = (x-(-1))$, cela ne peut être qu'un polynôme de Taylor autour de $x_0 =$.
Et en effet, $(x+1)\big|_{x=-1} = 0 = y_0$. Ainsi, ce qu'on a obtenu, ce n'est pas $P_{\ln(2+x),0,n}(x)$, mais bien .

3. $\boxed{\text{Calcul de } P_{\frac{1}{1+x^2},0,n}(x) :}$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ peut se voir comme la composition de $y \mapsto \frac{1}{1-y} = f(y)$ avec $y =$.

Ici, $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$. Le polynôme de Taylor pour $\frac{1}{1-y}$ en $y_0 = 0$ est connu, puisque c'est la série géométrique.
On peut donc à nouveau évaluer un polynôme de Taylor connu en $y = -x^2$:

$$P_{\frac{1}{1-y},0,n}(y) \quad = \qquad\qquad = \quad \sum_{k=0}^{n} y^k,$$

$$\Rightarrow \quad P_{\frac{1}{1+x^2},0,2n}(x) \quad = \quad P_{\frac{1}{1-y},0,n}\Big|_{y=-x^2} \quad =$$

Ici la composition des deux polynômes de Taylor nous donne un polynôme de degré $2n$.

On peut se demander dans ce cas, ce que devient le terme de correction.
En fait, le polynôme de Taylor pour $\frac{1}{1+x^2}$ est à nouveau une série géométrique, mais pour une raison de $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

$$= \underbrace{1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n}} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}} \; .$$

Remarque. On remarque que le polynôme de Taylor pour $\frac{1}{1+x^2}$ ne comporte que des puissances pairs. C'est pour cette raison que l'on a

$$P_{\frac{1}{1+x^2},0,2n}(x) = P_{\frac{1}{1+x^2},0,2n+1}(x) \quad \text{et}$$
$$r_{\frac{1}{1+x^2},0,2n}(x) = r_{\frac{1}{1+x^2},0,2n+1}(x).$$

Ceci est en général vrai pour une fonction f paire ou impaire. Pour une telle fonction ona en effet

$$P_{f,0,2n}(x) = P_{f,0,2n+1}(x) \quad \text{et}$$
$$r_{f,0,2n}(x) = r_{f,0,2n+1}(x).$$

Règle de dérivation : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur un voisinage ouvert de x_0. Alors

$$\frac{d}{dx} P_{f,x_0,n+1}(x) = P_{f^{(1)},x_0,n}(x).$$

Exemple.

1. $\boxed{\text{Calcul de } P_{\frac{1}{x},1,n}(x) :}$

On sait que $\frac{d}{dx}\ln(x) =$. On connait aussi le polynôme de Taylor de $\ln(x)$ autour de $x_0 = 1$:

$$P_{\ln,1,n+1}(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}.$$

La dérivée de ce polynôme de Taylor nous donne donc celui de $\frac{1}{x}$ autour de $x_0 = 1$:

$$P_{\frac{1}{x},1,n} =$$

Si la dérivation donne une règle, on paut tout aussi bien faire le chemin "inverse" et trouver des polynômes de Taylor par intégration :

Règle de l'intégration : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur un voisinage ouvert de x_0. Alors

$$P_{f,x_0,n+1}(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} P_{f^{(1)},x_0,n}(t)dt.$$

Exemples.

1. $\boxed{\text{Calcul de } P_{\arctan,0,n}(x) \text{ :}}$

   On sait que $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On connait aussi le polynôme de Taylor de $\frac{1}{1+x^2}$ autour de $x_0 = 0$:

   $$P_{\frac{1}{1+x^2},0,2n}(x) \quad =$$

   L'intégration de ce polynôme de Taylor nous donne donc celui de $\arctan(x)$ autour de

$x_0 = 0$:

$$P_{\arctan(x),0,2n+1}(x) = \cancel{\arctan(0)} + \int_0^x P_{\frac{1}{1+x^2},1,2n}(t)dt$$

$$=$$

$$=$$

Comme seuls des puissances impaires apparaissent dans ce polynôme, cela peut se réécrire pour un n quelconque comme

$$P_{\arctan(x),0,n}(x) = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Il est d'ailleurs même possible de donner dans ce cas une expression pour le terme de correction. En effet, puisque $\frac{1}{1+x^2}$ est le résultat d'une série géométrique, on peut écrire

$$\arctan^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

$$= \qquad = \qquad$$

On a alors

$$\arctan(x) = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k\right) dt + \int_0^x \left(\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \qquad + \quad (-1)^{n+1}\int_0^x \left(\frac{(t^2)^{n+1}}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{P_{\arctan(x),0,2n+1}(x)} + \underbrace{(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt}_{r_{\arctan,0,2n+1}(x)}$$

On va estimer ce terme de reste. En notant que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+t^2} \leq 1$, on trouve

$$\begin{aligned}
|r_{\arctan,0,2n+1}(x)| &= \left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \\
&= \left|\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \\
&\leq \int_0^{|x|} t^{2n+2}dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.
\end{aligned}$$

Pour une valeur de x fixée avec $|x| \leq 1$, on a donc clairement que

$$\lim_{n\to\infty} r_{\arctan,0,2n+1}(x) = 0.$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \lim_{n\to\infty} P_{\arctan,0,2n+1}(x) = \arctan(x).$$

Si on choisit alors $x = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \lim_{n\to\infty} P_{\arctan,0,2n+1}(1) \\
= \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big|_{x=1}\right) \\
= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

On a donc (enfin !) une formule pour calculer la valeur de π :

$$\boxed{\pi = 4 - \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{7} + \tfrac{4}{9} + \ldots.}$$

2. **Calcul de $P_{\sin,0,n}(x)$: et $P_{\cos,0,n}(x)$:**

Bien qu'on connaisse déjà ces polynômes de Taylor, il est instructif d'appliquer la règle d'intégration pour illustrer cette dernière :
en effet, on peut simplement commencer par noter que

$$P_{\sin,0,0}(x) \quad = \quad 0, \quad \text{et} \quad P_{\cos,0,0}(x) \quad = \quad 1.$$

A partir de là on applique itérativement la règle d'intégration pour obtenir

$$
\begin{aligned}
P_{\sin,0,1}(x) &= \sin(0) + \int_0^x \qquad\qquad \\
&= 0 + \int_0^x \qquad\qquad = \int_0^x dt = x.
\end{aligned}
$$

Puis, en intégrant une deuxième fois, on obtient

$$
\begin{aligned}
P_{\cos,0,2}(x) &= \cos(0) + \int_0^x \qquad\qquad \\
&= 1 + \int_0^x \qquad\qquad = 1 - \int_0^x t\,dt = 1 - \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Une troisième intégration donne

$$
\begin{aligned}
P_{\sin,0,3}(x) &= \sin(0) + \int_0^x \qquad\qquad \\
&= 0 + \int_0^x \qquad\qquad = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt
\end{aligned}
$$

$$= \quad x - \frac{x^3}{6}.$$

Une quatrième intégration donne

$$\begin{aligned} P_{\cos,0,4}(x) \quad &= \quad \cos(0) + \int_0^x \\ = \quad \cos(0) + \int_0^x \quad &= \quad 1 - \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{3!}\right) dt \\ &= \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}. \end{aligned}$$

En continuant ainsi, on voit que, par pas d'intégrations successifs, on reconstruit les polynômes de Taylor de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.

Il est à noter, que de manière tout à fait similaire, on peut reconstituer les polynômes de Taylor de $\sinh(x)$ et de $\cosh(x)$ en intégrant itérativement, commençant par

$$P_{\sinh,0,0}(x) \quad = \quad 0, \quad \text{et} \quad P_{\cosh,0,0}(x) \quad = \quad 1.$$

4 Nombres Complexes

L'intérêt des nombres complexes est de trouver des solutions à des équations qui n'en ont pas dans $\mathbb{R}$. Cela nous permettra ensuite de faire une étonnante synthèse entre les fonctions trigonométrique, hyperboliques et l'exponentiel.

4.1 Construction des nombres complexes

La considération des nombres réels se justifie par la recherche de solutions à des équations non solubles dans l'ensemble des nombres rationnels. En effet, $\boldsymbol{x^2 = 2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$. Il faut donc "élargir" l'ensemble des nombres rationnels pour que $\boldsymbol{x^2 = 2}$ ait une solution. Ceci est possible dans $\mathbb{R}$. On a en fait la même situation en ce qui concerne les nombres naturel, entiers et rationnels :

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\substack{\boldsymbol{x+1=0} \\ \text{n'a pas de solution}}} \subsetneq \underbrace{\mathbb{Z}}_{\substack{\boldsymbol{2x+1=0} \\ \text{n'a pas de solution}}} \subsetneq \underbrace{\mathbb{Q}}_{\substack{\boldsymbol{x^2-2=0} \\ \text{n'a pas de solution}}} \subsetneq \underbrace{\mathbb{R}}_{\substack{\boldsymbol{x^2+1=0} \\ \text{n'a pas de solution}}}$$

Il faut donc trouver un ensemble de nombres encore plus grand que $\mathbb{R}$ pour inclure des solutions à $\boldsymbol{x^2+1=0}$. Comment trouver un tel ensemble ?

On va s'inspirer de ce qu'on a déjà fait pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. Pour trouver une solution à l'équation $\boldsymbol{x^2-2=0}$ on a introduit un nouveau symbole, $\boldsymbol{\sqrt{2}}$, et on a donné une signification à ce symbole en imposant que

$$\boldsymbol{(\sqrt{2})^2=2 \quad \text{et} \quad \sqrt{2}>0.}$$

On a fait de même en introduisant des symboles $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{e}$ et ainsi de suite. On a par la suite gardé les règles de calculs usuels :

$$\boldsymbol{2\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}, \quad e^2=e\cdot e, \quad (e+\pi)\sqrt{3}=e\sqrt{3}+\pi\sqrt{3}, \quad 0\cdot\pi=0, \ldots}$$

On va donc faire de même et introduire un nouveau symbole, $\boldsymbol{i}$, et imposer la relation

$$\boxed{\boldsymbol{i^2=-1}}$$

On considère ensuite formellement toutes les combinaisons linéaires à coefficients réels de ce symbole $\boldsymbol{i}$:

Définition 4.1.1. L'**ensemble des nombres complexes** $\mathbb{C}$ est défini par

$$\mathbb{C} := \{a + ib \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Propriétés.

- *Ce nouveau symbole i représente une nouvelle constante,* ***non réelle****. Tout comme -1 était un nouveau nombre non naturel ou $\sqrt{2}$ était un nouveau symbol non rationnel.*
- *On note $z \in \mathbb{C}$ pour dire que $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.*
- *Pour $z \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib$, on dit que a est la* ***partie réelle*** *de z, alors que b est la* ***partie imaginaire*** *de z. On note aussi*

$$a = Re(z), \quad b = Im(z).$$

  A noter que et $Re(z)$, et $Im(z)$ ***sont des nombres réels****.*
- *Le fait qu'un $z \in \mathbb{C}$ soit constitué d'une partie réelle et d'une partie imaginaire est l'origine du mot* ***"complexe"****.*
  Ce mot ne signifie pas que ces nombres sont compliqués (au contraire !) mais signifie ***"fait de plusieurs parties"****.*

- *On note que* $\boldsymbol{0, 1, i} \in \mathbb{C}$ *:*

$$\boldsymbol{0} = \qquad\qquad, \quad \boldsymbol{1} = \qquad\qquad, \quad \boldsymbol{i} = \qquad\qquad.$$

- *Plus généralement,* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$*. En effet, si* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$*, on peut toujours écrire*

$$\boldsymbol{x} = \qquad\qquad \in \mathbb{C}.$$

Sur $\mathbb{C}$, on impose formellement les relations algébriques suivantes :

Définition 4.1.2. Soient $\boldsymbol{z, w} \in \mathbb{C}$ où

$$\boldsymbol{z = a + ib}, \quad \boldsymbol{w = c + id} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{a, b, c, d} \in \mathbb{R}.$$

Alors

- $\boldsymbol{z + w = (a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)}$,
- $\boldsymbol{z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc)}$.

Remarques.

- Comme dans $\mathbb{R}$, l'ordre dans lequel ces opérations algébriques sont faites n'a pas d'importance. En effet, si

$$z \quad = \quad a + ib \quad \text{et} \quad w \quad = c + id,$$

alors

$$z + w \quad = \quad (a+ib)+(c+id) \quad = \qquad\qquad$$
$$= \qquad\qquad = \quad (c+id)+(a+ib) \quad = \quad w+z,$$

et

$$z \cdot w \quad = \quad (a+ib)\cdot(c+id) \quad = \qquad\qquad$$
$$= \qquad\qquad = \quad (c+id)\cdot i(a+ib) \quad = \quad w \cdot z.$$

En particuliers, $ib = bi$.

- La règle pour la multiplication n'est rien d'autre qu'une conséquence de la distribution d'une somme sur un produit. En effet, par distribution on a

$$\begin{aligned}(a+ib)\cdot(c+id) \quad &= \qquad\qquad\qquad\qquad \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad .\end{aligned}$$

On retombe bien sur la formule qui définit le produit de deux nombres complexes.

On peut maintenant manipuler les lois algébriques sur $\mathbb{C}$ comme celles dans $\mathbb{R}$:

Exemples.

1. $\boxed{\text{Résoudre } 2z+2i=3+i \text{ :}}$

   Comme dans le cas réel, z joue le rôle de l'inconnue. On isole les termes qui la contiennent :

$$2z+2i=3+i \quad \Leftrightarrow \quad 2z \quad = \qquad\qquad\qquad = \quad 3-i.$$

En divisant par 2 on trouve la solution

$$z \quad = \qquad\qquad \in \mathbb{C}.$$

2. $\boxed{\text{Calculer } z = \frac{1}{1+2i} :}$

On cherche donc un nombre $z \in \mathbb{C}$, tel que $z(1+2i) = 1$. Pour ce faire, on pose $z = a + bi$ et on calcule

$$z(1+2i) = 1 \quad \Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad$$

$$\Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - 2b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} ,$$

où pour la dernière équivalence on égalise les parties réelles et imaginaires des deux cotés de l'égalité : **deux nombres complexes sont égaux ssi leur parties réels et imaginaires le sont séparément.**

On est donc ramené à résoudre un système de deux équations à deux inconnues réelles.

Si on ôte deux fois la première ligne à la deuxième, on trouve

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \qquad \qquad \Leftrightarrow \quad b = \frac{-2}{5},\ a = \frac{1}{5}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{1+2i} \quad = \quad \frac{1}{5}\,(1-2i)\,.}$$

3. $\boxed{\text{Calculer } \frac{1}{z}, \quad z \neq 0 :}$

Pour des nombres complexes, tout nombre non nul peut s'inverser, comme on va le voir maintenant. Similairement à ce qu'on vient de faire, on pose $z = a + ib$ et $\frac{1}{z} = x + iy$. Puis on veut que

$$z\frac{1}{z} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a+bi)(x+yi) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a^2 + b^2 \neq 0$ (i.e. $z \neq 0$), on peut inverser cette matrice :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \qquad$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad = \qquad .$$

Résumons : si $z = (a + ib) \neq 0$, on a

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a^2+b^2}(a - ib).}$$

L'exemple précédent qui était $z = 1 + 2i$ redonne donc notre résultat $\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{1^2+2^2} = \frac{1-2i}{5}$. On a d'autres exemples comme

$$\frac{1}{3+i} = \qquad , \quad \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}i} = \qquad ,$$

$$\frac{2+i}{1-7i} = \qquad = \qquad = \frac{3i-1}{10}.$$

Ce dernier exemple suggère l'importance de $a - ib$ et de $a^2 + b^2$ pour un nombre complexe $a + ib$ donné. On pose alors la

> **Définition 4.1.3.** Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. On définit le **complexe conjugué**, $\overline{z}$, et le **module**, $|z|$ du nombre z comme
>
> $$\overline{z} := a - ib, \quad |z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarques.

- Le complexe conjugué d'un complexe est encore un nombre complexe.
- Le module d'un nombre complexe est toujours un nombre réel positif. En fait, si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z, $|z|$, n'est autre que sa valeur absolue.

Résumons les propriétés les plus importantes dans le

Théorème 4.1.4. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a alors

1. $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.
2. $|z| = |\overline{z}|$.
3. $|z|^2 = z\,\overline{z}$.
4. $\overline{z\,z'} = \overline{z}\;\overline{z'}$.
5. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.
6. $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.
7. $z \neq 0 \Rightarrow |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$.
8. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
9. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.
10. $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

Démonstration. Posons $z = a + ib$ et $z' = c + id$.

1.
$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \underbrace{}_{a} + i \cdot \underbrace{}_{b} \quad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \quad |z|^2 = 0.$$

2.
$$|z| = \qquad = \qquad = |\overline{z}|.$$

3.
$$z\,\overline{z} = \qquad = \qquad = \qquad = |z|^2.$$

4. D'une part

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{ac-bd+i(ad+bc)} = ac-bd-i(ad+bc).$$

D'autre part

$$\overline{z} \cdot \overline{z'} = \overline{(a+ib)} \cdot \overline{(c+id)} = (a-ib)(c-id) = ac-bd-i(ad+bc).$$

Les points **5.** à **10.** sont laissés en exercices. □

Comme pour les nombre réels, on a les identités telles que

$$(z^2 - w^2) = (z-w)(z+w) \quad \text{ou} \quad (z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2.$$

On aura donc aussi des techniques comme compléter des carrés ou calculer des discriminants :

Exemples.

1. $\boxed{\text{Résoudre } z^2 + 2z + 2 = 0 :}$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 2^2 - 2 \cdot 4 = -4$. Il n'y a donc pas de solutions réelle à cette équation. Par contre, on trouve des solutions complexes :

$$\begin{aligned} z^2 + 2z + 2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad z = -1 \pm i. \end{aligned}$$

On remarque d'ailleurs, que la formule avec discriminant donne le même résultat :

$$z_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2i)^2}}{2} = -1 \pm i.$$

Il est à remarquer qu'un léger abus de notation a été commis : la racine $\sqrt{-4}$ n'est à strictement parler pas une fonction, puisque dans le cas complexe, il n'est pas possible de choisir la solution "positive" entre $-2i$ et $2i$ à l'équation

$$z^2 = 4.$$

En effet, l'ordre total et compatible avec les opérations algébriques de $\mathbb{R}$ est perdu dans

$\mathbb{C}$. Il n'est pas possible de décider, en accord avec les opérations algébriques, si $2i > 0$ ou si $-2i > 0$.
Si on veut que le produit avec un nombre positif ne renverse pas une inéquation, alors $2i > 0$ impliquerait $-4 > 0$ et $-2i > 0$ impliquerait $-4 > 0$ aussi.

2. $\boxed{\text{Résoudre } z^3 + 19z - 20 = 0 :}$

On peut, comme pour le cas réel, identifier une solution manifeste. On trouve $z = 1$.

(**astuce :** si les coefficients d'un polynôme s'additionnent à 0, alors $z = 1$ est une racine de ce polynôme.)

On factorise alors ce polynôme par $(z - 1)$:

$$(z-1)(az^2 + bz + c) = z^3 + 19z - 20$$

$\Rightarrow$ en comparant les termes z^3 et constantes

$$(z-1)(z^2 + bz + 20) = z^3 + 19z - 20.$$

$\Rightarrow$ en comparant les termes z

$$(z-1)(z^2+z+20) = z^3+19z-20.$$

Il reste à calculer les racines de z^2+z+20. Le discriminant est $\Delta = 1-80 = -79$, d'où on tire les racines

$$z_\pm = \qquad .$$

Les solutions sont donc les éléments de l'ensemble

$$S = \{1, \frac{-1+i\sqrt{79}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{79}}{2}\}.$$

3. Calculer $1+(1+2i)+(1+2i)^2+(1+2i)^3$:

On peut évidemment tout développer et additionner. Ou alors, on remarque une **série géométrique** de raison :

$$1+(1+2i)+(1+2i)^2+(1+2i)^3 = \frac{\qquad}{\qquad}$$

$$= \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\mathbf{8+24}\boldsymbol{i}}{\mathbf{-2}\boldsymbol{i}} = \mathbf{-12+4}\boldsymbol{i}.$$

4. $\boxed{\text{Résoudre } |\boldsymbol{z}|^{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}-4\right) = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z}+\mathbf{2}) \text{ :}}$

A nouveau, on peut poser $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$, tout développer et essayer de résoudre. Ce n'est pas la meilleure méthode !
Ou alors on essaye avant de simplifier au maximum :

$$|\boldsymbol{z}|^{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}-4\right) = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z}+\mathbf{2})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad .$$

Il y a donc comme solutions déjà

$$\boldsymbol{z} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{z} = \mathbf{-2}.$$

On résout maintenant le dernier facteur en posant $z = a + ib$:

$$\begin{aligned} &\big(\overline{z}(z-2)-1\big) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & |z|^2 - 2\overline{z} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \\ \Leftrightarrow \quad & \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 1 - 2a = 0, \\ 2b = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a - 1 = 0, \\ b = 0 \end{cases}$$

On résout l'équation avec a comme une équation réelle usuelle. Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 + 4 = 8$ et ainsi,

$$a_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}.$$

L'ensemble solution est donc

$$S = \{0, -2, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}.$$

Une curiosité des nombres complexes a été remarquée par Gauss : certains nombres premiers dans $\mathbb{N}$ ne le sont plus si on considère des nombres complexes dont les coefficients sont des entiers.
Plus précisément, Il posa la définition suivante :

Définition 4.1.5. Un **nombre entier de Gauss** est un nombre qui s'écrit comme

$$z \quad = a + ib \quad \text{ou } a, b \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des nombres de Gauss s'écrit comme

$$\mathbb{Z}[i] \quad := \quad \{a + ib, : \ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Clairement, une somme ou un produit de deux nombres de Gauss est encore un nombre de Gauss. On peut maintenant se poser la question de la factorisation de nombres du type

$$p \quad = \quad p + i \cdot 0 \in \mathbb{Z}[i], \quad \text{avec } p \in \mathbb{N} \text{ premier}.$$

On cherche donc des entiers de Gauss $a + ib$, $c + id \in \mathbb{Z}[i]$, tels que

$$p \quad = \quad (a + ib)(c + id).$$

Une première chose à remarquer dans cette recherche, est que

$$\boldsymbol{p = (a+ib)(c+id)}$$

$$\Rightarrow \qquad \Rightarrow \qquad \text{avec } \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}.}$$

On est donc ramené à chercher des entiers $\boldsymbol{a, b}$ et $\boldsymbol{k}$, tels que

$$\boldsymbol{p = \qquad = k(a^2+b^2).}$$

Comme $\boldsymbol{p}$ est premier, et $\boldsymbol{k}$ est entier, et $\boldsymbol{a^2+b^2}$ est naturel, on a comme solutions possibles

- $\boldsymbol{k = 1}$ et $\boldsymbol{p = a^2+b^2}$,
- $\boldsymbol{k = p}$ et $\boldsymbol{a = \pm 1,\ b = 0}$,
- $\boldsymbol{k = p}$ et $\boldsymbol{a = 0,\ b = \pm 1}$.

Les deux dernières possibilités ne sont pas vraiment nouvelles, puisqu'on aurait comme factorisation

$$\boldsymbol{p = 1 \cdot p = i \cdot (-ip) = (-i) \cdot ip = (-1) \cdot (-p),}$$

qui sont des factorisations "triviales".
Reste la première possibilité. Pour $\boldsymbol{p = 2}$ on a en effet comme factorisation sur les entiers de

Gauss

$$2 \quad = \hspace{4cm} = \hspace{5cm} .$$

Il y a donc deux factorisations possibles de 2 sur les entiers de Gauss. 2 n'est plus un nombre premier dans $\mathbb{Z}[i]$.

Prenons l'exemple du prochain nombre premier, à savoir $p = 3$. D'après la discussion précédente, pour trouver une factorisation non-triviale de 3 sur $\mathbb{Z}[i]$, il faut trouver deux nombres entiers a et b, tels que $a^2 + b^2 = 3$. En essayant successivement $a = 0$ ou $a = 1$ ($a = 2$ serait déjà trop grand), on voit qu'il n'est pas possible d'en trouver. Donc, 3 reste premier, même dans $\mathbb{Z}[i]$. C'est ce qu'on appelle alors un **nombre premier de Gauss**.

Essayons le nombre premier $p = 5$. Cette fois-ci il est possible de trouver $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a^2 + b^2 = 5$. En effet, on peut prendre $a = 1$ et $b = 2$, ou symétriquement, $a = 2$ et $b = 1$. On a donc comme factorisation de $p = 5$ sur $\mathbb{Z}[i]$:

$$\begin{aligned} 5 \quad &= \hspace{4cm} = \hspace{5cm} \\ &= \hspace{5cm} = \hspace{4.5cm} . \end{aligned}$$

$\mathbf{5}$ n'est donc pas un nombre premier de Gauss puisqu'il possède 4 factorisations distinctes et non triviales.

Pour $\boldsymbol{p = 7}$ il est à nouveau pas possible de trouver des entiers $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, tels que $\boldsymbol{7 = a^2 + b^2}$. En effet, ni $\boldsymbol{a = 0}$, ni $\boldsymbol{a = 1}$, ni $\boldsymbol{a = 2}$ ($\boldsymbol{a = 3}$ est déjà trop grand) ne nous permettent de trouver un nombre $\boldsymbol{b}$ entier, dont les carrés en somme donnerait $\mathbf{7}$. C'est donc un nombre premier de Gauss.

En fait la situation est la suivante : un nombre premier $\boldsymbol{p}$ se factorise sur $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ ssi il est la somme de deux carrés d'entiers, $\boldsymbol{a^2 + b^2 = p}$.
On a vu que $\mathbf{2}$ et $\mathbf{5}$ étaient factorisables, alors que $\mathbf{3}$ ou $\mathbf{7}$ ne l'étaient pas. On sait que d'après un théorème en théorie des nombres, que tout nombre premier $\boldsymbol{p}$ qui s'écrit comme $\boldsymbol{p = 4k+1}$ peut être écrit comme somme de deux carrés d'entiers, alors que si $\boldsymbol{p = 4k + 3}$ cela est impossible.
Donc,

$$\mathbf{3,\ 7\,11,\ 19,\ 23,\ldots}$$

sont des premiers de Gauss alors que

$$\mathbf{2,\ 5,\ 13,\ 17,\ldots}$$

ne sont plus des premiers dans $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$.

4.2 Représentations

Le but de ce paragraphe est d'améliorer notre intuition des nombres complexes en les représentant de différentes manières. Ces représentations simplifieront aussi certains calculs.
Il existe des manières de se représenter géométriquement un nombre complexe. En effet, puisque un tel nombre s'écrit comme

$$z = a + ib, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R},$$

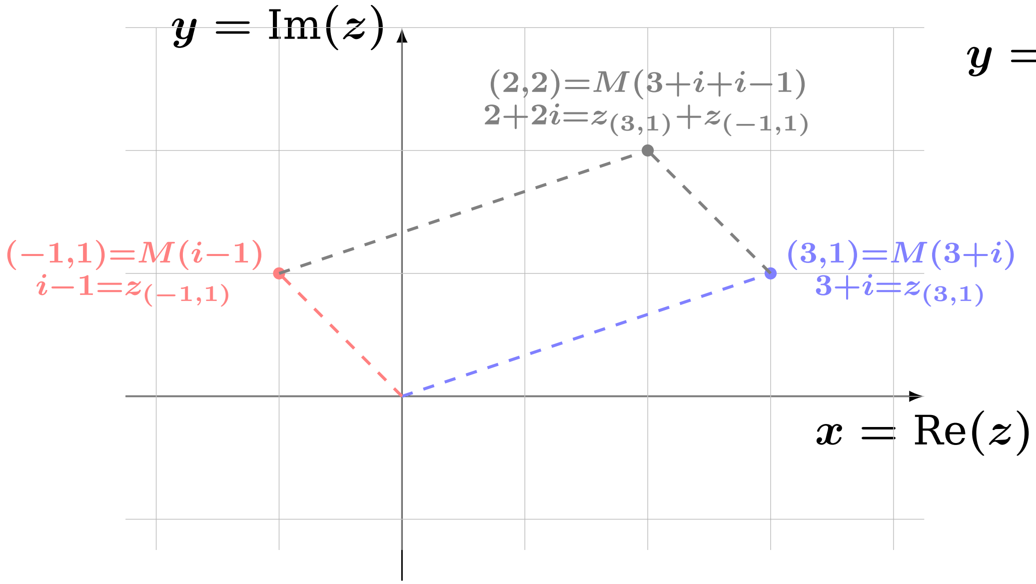
on voit qu'un nombre complexe est la donnée de deux nombres réels a e b. Comme en plus on additionne des nombres complexes en additionnant séparément leur parties réels et imaginaires, il est naturel de voir z comme un point du plan :

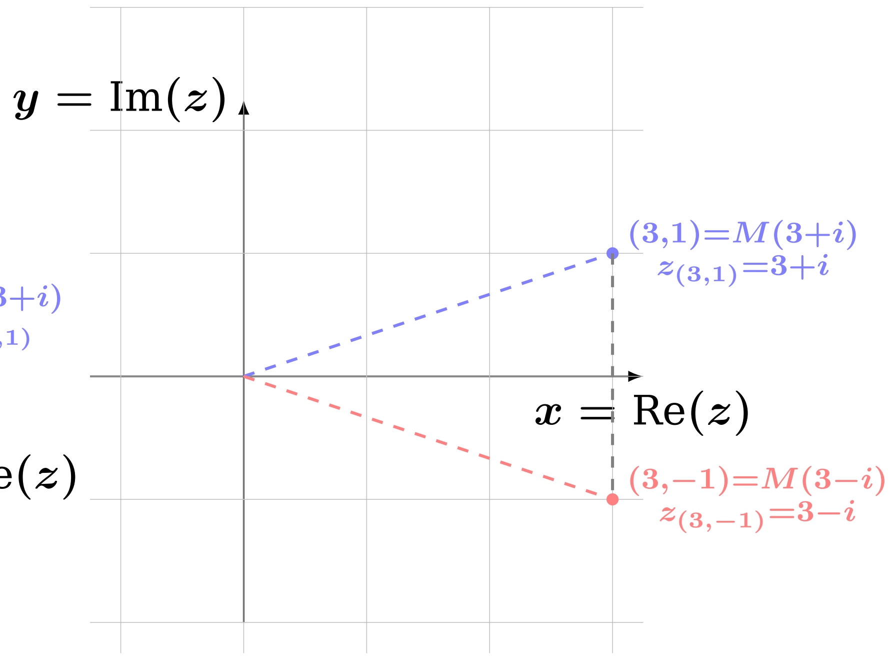
Définition 4.2.1. La **représentation de Gauss** est l'identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, donnée par

$$\mathbb{C} \ni z = a + ib \quad \longleftrightarrow \quad M(z) := (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, l'**affixe** d'un point $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est le nombre complexe $z_P := x + iy$.

Dans la représentation de Gauss les nombres complexes sont donc représentés par des points du plan, l'addition de deux nombres complexes revient à additionner les coordonnées cartésiennes de ces points et la conjugaison complexe n'est autre qu'une symétrie d'axe (Ox) :



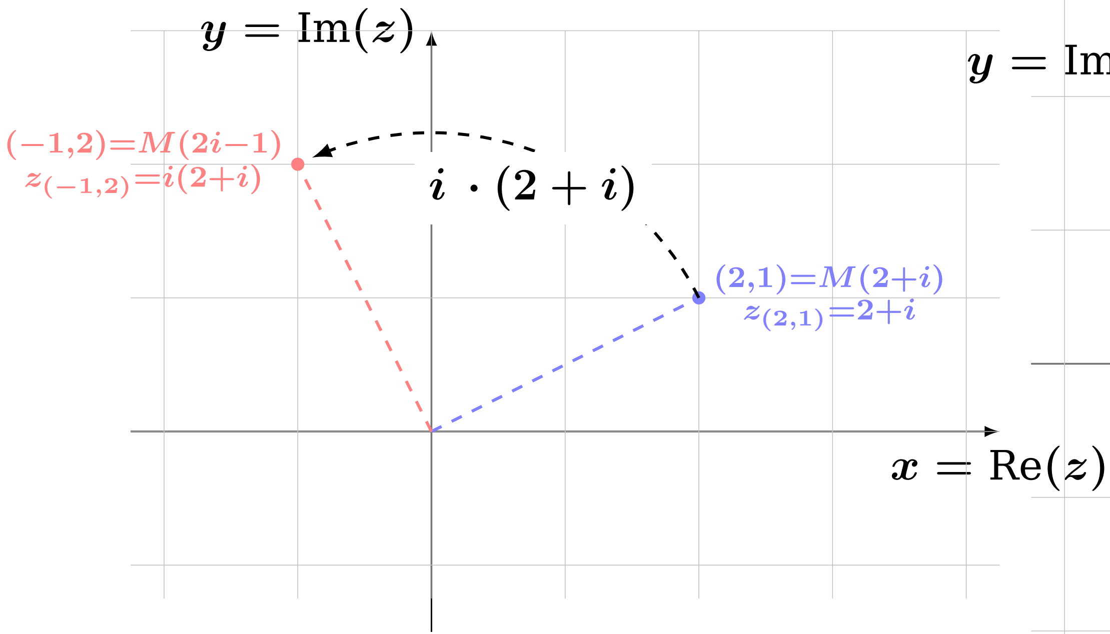


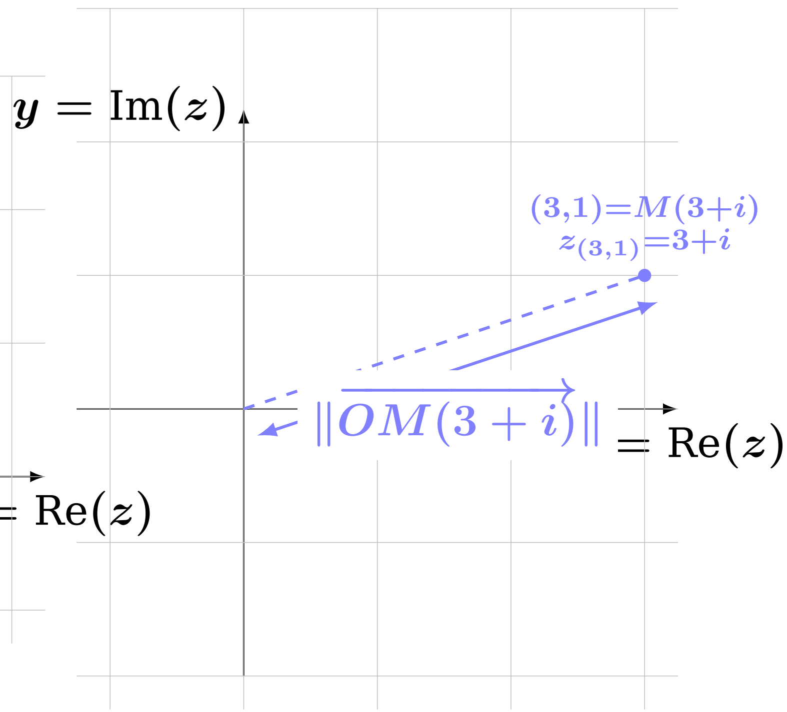
Dans la représentation de Gauss, le module d'un nombre $z = a + ib$, à savoir $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, n'est donc autre que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$:

$$|z| \quad \longleftrightarrow \quad \|\overrightarrow{OM(z)}\|.$$

De plus, la multiplication $i \cdot z$ correspond à la rotation par $\frac{\pi}{2}$ du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$. En effet,

$$i(a+ib) \quad = \qquad\qquad :$$





Puisque le module $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ d'un nombre complexe $z = a+ib$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$ et que les normes vectoriels dans le plan obéissent à l'inégalité du triangle, il en va de même pour le module :

$$\boxed{|z+w| \ \leq \ |z|+|w|.}$$

On peut d'ailleurs le montrer algébriquement : souvenons-nous que $|z|^2 = \overline{z} \cdot z$. On a alors

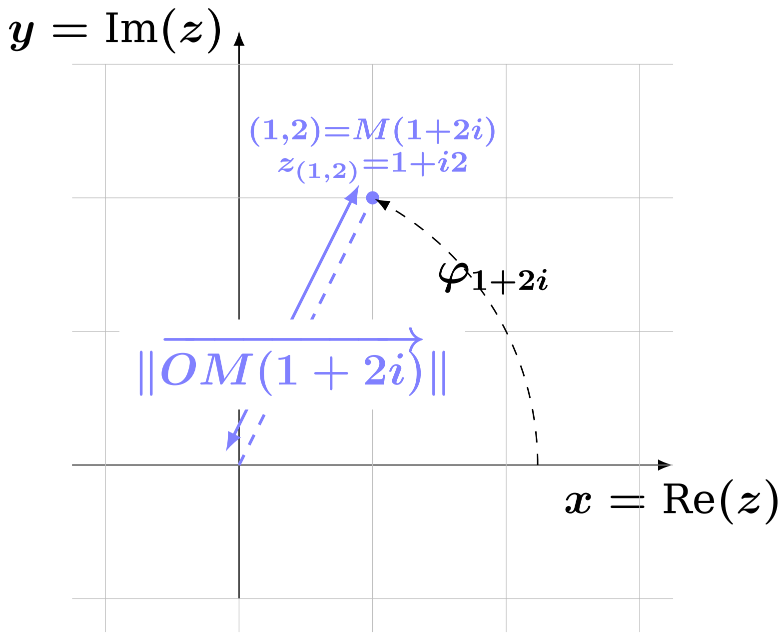
$$\begin{aligned} |z+w|^2 \quad &= \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad \\ &= \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad \\ &= \qquad\qquad\qquad \leq \qquad\qquad\qquad \\ &= \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad = (|z|+|w|)^2. \end{aligned}$$

On extrait maintenant la racine des deux côtés de cette inégalité et on retrouve l'inégalité triangulaire.

Venons maintenant à ce qu'on appelle la **représentation triginométrique** d'un nombre complexe.

Pour définir un nombre complexe $z = a + ib$, il suffit de connaître son module $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et l'angle φ_z formé par (Ox) et $(0M(z))$. La trigonométrie nous apprend alors que

$$\boxed{z = a + ib = |z|\,\big(\cos(\varphi_z) + i\sin(\varphi_z)\big).}$$



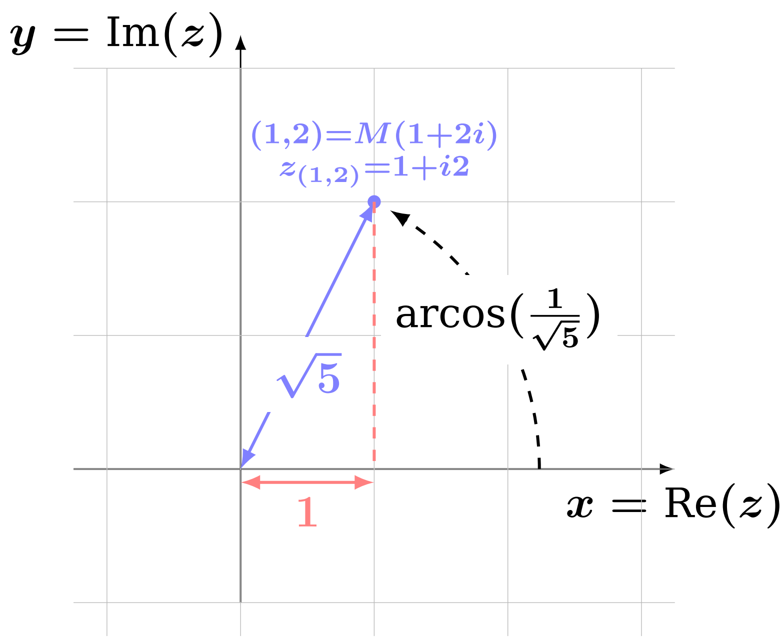
L'angle φ_z peut d'ailleurs se calculer grâce à la trigonométrie.

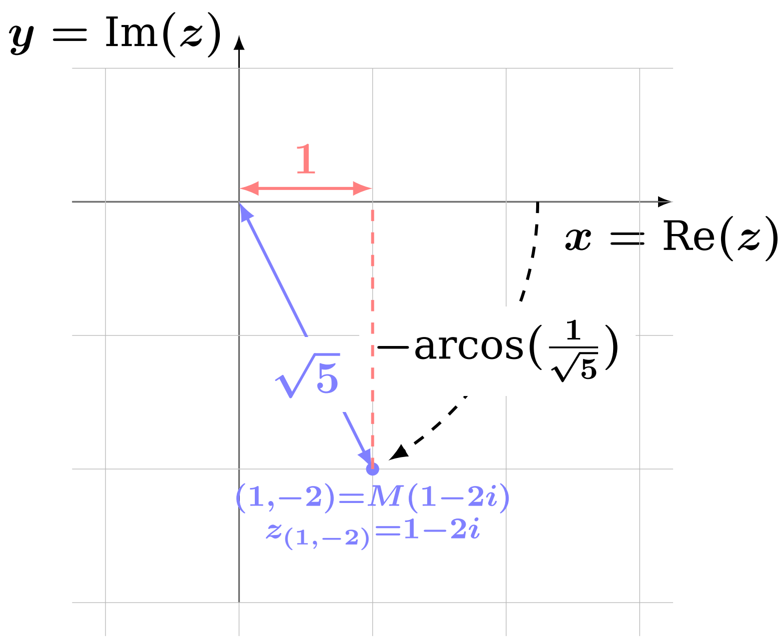
- Si $z = a + ib$ et $b \geq 0$, on a simplement $\varphi_z = \mathrm{arcos}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$.

- Si $z = a + ib$ et $b < 0$, on a simplement $\varphi_z = -\mathrm{arcos}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$.

$$\boxed{\varphi_z \quad = \quad \mathrm{sgn}(b)\mathrm{arcos}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}) \quad \in \quad]-\pi, \pi],}$$

pour autant que l'on choisisse la convention que $\operatorname{sgn}(0) = 1$.





On peut d'ailleurs maintenant utiliser les développement limités pour simplifier encore cette écriture. En effet, l'étude des polynômes de Taylor nous a montré, que pour un nombre réel x, on a avait

$$\exp(x) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Notons donc, que pour calculer une valeur pour l'exponentielle d'un objet x, il suffit en fait

de savoir élever à une puissance naturelle cet objet x, faire une somme de ces puissances et faire une limite.
Toutes ces opérations peuvent se faire avec des nombres complexes. Voyons donc ce que donnerait la limite des polynômes de Taylor pour l'exponentielle, si on substitue x par iy :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} &= \sum_{0\leq 2k\leq n} \qquad\qquad + \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \qquad\qquad \\
&= \sum_{0\leq 2k\leq n} \qquad\qquad + \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \qquad\qquad \\
&= \sum_{0\leq 2k\leq n} \qquad\qquad + \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \qquad\qquad \\
&= \underbrace{\sum_{0\leq 2k\leq n} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}}_{\qquad} + i \underbrace{\sum_{0\leq 2k+1\leq n} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\qquad} .
\end{aligned}
$$

On voit donc apparaître les polynômes de Taylor pour les fonctions trigonométriques $\cos$ et $\sin$. Or, on saît que ces fonctions sont elles aussi les limites de leur polynômes de Taylor.
Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \quad = \quad \cos(y) + i\sin(y).$$

Autrement dit, on peut définir l'exponentielle d'un nombre imaginaire par les polynômes de Taylor et le résultat est

$$\boxed{\exp(iy) \quad = \quad \cos(y) + i\sin(y)}.$$

Remarques.

- Cette dernière formule est une synthèse remarquable entre les fonctions exponentielles et trigonométriques. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ peuvent donc être vues comme la partie réelle et imaginaire respectivement de l'exponentielle pour une variable imaginaire iy.
- Pour obtenir de résultat il était nécessaire de passer par les polynômes de Taylor et par leur termes de corrections. Il est bien sûr nécessaire aussi d'avoir introduit les nombres complexes. Mais maintenant, grâce à tout ce travail, on est en mesure de comprendre cette formule et de donner un sens à $\exp(iy)$.

On peut donc poser la

Définition 4.2.2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors la **représentation polaire** de z est l'écriture :

$$z \quad = \quad |z| \exp(i\varphi)$$

où

$$\varphi \quad = \quad \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z))\arccos(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}) \quad \in \quad]-\pi, \pi]$$

est l'**argument principal** de z.

Remarque.
L'argument principal d'un nombre complexe **non nul** z est donc l'unique angle dans $\varphi \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$z \quad = \quad |z| \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\right).$$

Il est bien sûr possible d'avoir d'autres angles que l'argument principal. Comme en trigonométrie, on peut toujours ajouter des multiples de 2π :

$$z \quad = \quad |z| \left(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)\right).$$

Par conséquent, l'exponentielle a une periodicité de $2\pi i$:

$$\exp(iy) \quad = \quad \exp(iy + i2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On peut même pousser plus loin encore les parallèles avec l'exponentielle réelle :

Propriétés.

1. $\boxed{\forall \varphi, \theta \in \mathbb{R}, \quad \exp(i(\varphi+\theta)) = \exp(i\varphi)\exp(i\theta)}$

En effet, par définition, on a

$$\begin{aligned}
\exp(i(\varphi+\theta)) \quad &= \\
\underset{\textit{lois d'addition}}{=} \quad & \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) + i\Big(\cos(\varphi)\sin(\theta) + \sin(\varphi)\cos(\theta)\Big) \\
\underset{\textit{loi de multiplication dans } \mathbb{C}}{=} \quad & \Big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\Big)\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big) \\
= \quad & .
\end{aligned}$$

Donc, la loi d'addition de l'exponentielle

$$e^{i(\varphi+\theta)} = e^{i\varphi}e^{i\theta}$$

implémente de manière directe et synthétisée les deux lois d'addition trigonométriques.

Exemples.

1. $\boxed{\exp(i0) = 1, \quad \exp(i\tfrac{\pi}{2}) = i, \quad \exp(i\pi) = -1, \quad \exp(i\tfrac{3\pi}{2}) = -i.}$

   Suivant la définition :

$$\begin{aligned} \exp(i0) &= \cos(0) + i\sin(0) &= \quad\ ,\\ \exp(i\frac{\pi}{2}) &= \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) &= \quad\ ,\\ \exp(i\pi) &= \cos(\pi) + i\sin(\pi) &= \quad\ ,\\ \exp(i3\frac{\pi}{2}) &= \cos(3\frac{\pi}{2}) + i\sin(3\frac{\pi}{2}) &= \quad\ . \end{aligned}$$

La troisième équation nous donne d'ailleurs la splendide relation

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0.}$$

Cette dernière équation permet de placer en une seule équation simple les nombres fondamentaux $0,\ 1\ \pi,\ i$ et e. Elle témoigne donc de la synthèse qu'on est arrrivé à faire entre la trigonométrie, l'exponentielle, les polynômes de Taylor et les nombres complexes.

2. $\boxed{\text{La multiplication de } z \text{ par } e^{i\theta} \text{ est une rotation de } z \text{ autour de l'origine d'un angle } \theta \text{ :}}$

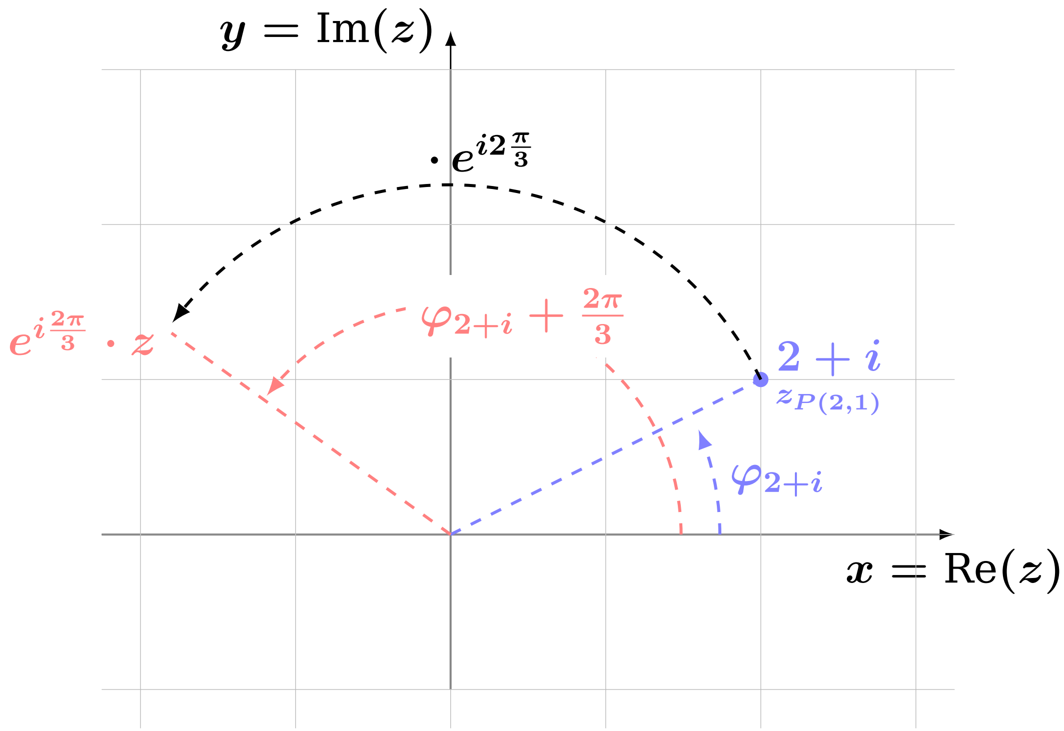
On commence par exprimer z en représentation polaire :

$$z \quad = \quad |z|\, e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in]-\pi, \pi].$$

On multiplie ensuite par $e^{i\theta}$:

$$e^{i\theta} z \quad = \quad e^{i\theta} |z|\, e^{i\varphi} \quad = \quad |z|\, e^{i(\theta+\varphi)}.$$

L'argument de z a été augmenté d'un angle θ alors que son module n'a pas changé : c'est bien une rotation de z autour de l'origine d'un angle θ.



3. $\boxed{\text{Calculer les racines } n^{\text{ièmes}} \text{ d'un nombre complexe } z :}$

La représentation polaire est particulièrement adaptée pour calculer les racines. Par exemple, trouvons $w \in \mathbb{C}$ tel que

$$w^5 = 1.$$

En effet, en représentation polaire, cette équation s'écrit comme

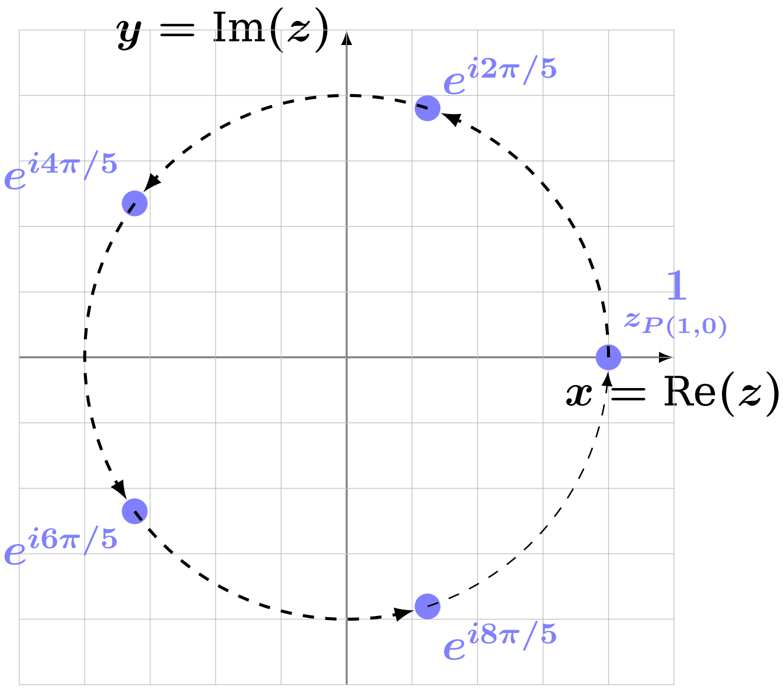
$$\left(r_w\, e^{i\varphi_w}\right)^5 = e^{i\cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad r_w^5 e^{i5\varphi_w} = e^{i\cdot 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_w^5 = 1 \\ 5\varphi_w = 0 \bmod 2k\pi \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} r_w = 1 \\ \varphi_w = \frac{2k\pi}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases} .$$

le nombre $\mathbf{1}$ possède donc $\mathbf{5}$ racines $\mathbf{5}^{\text{ièmes}}$ dans $\mathbb{C}$:

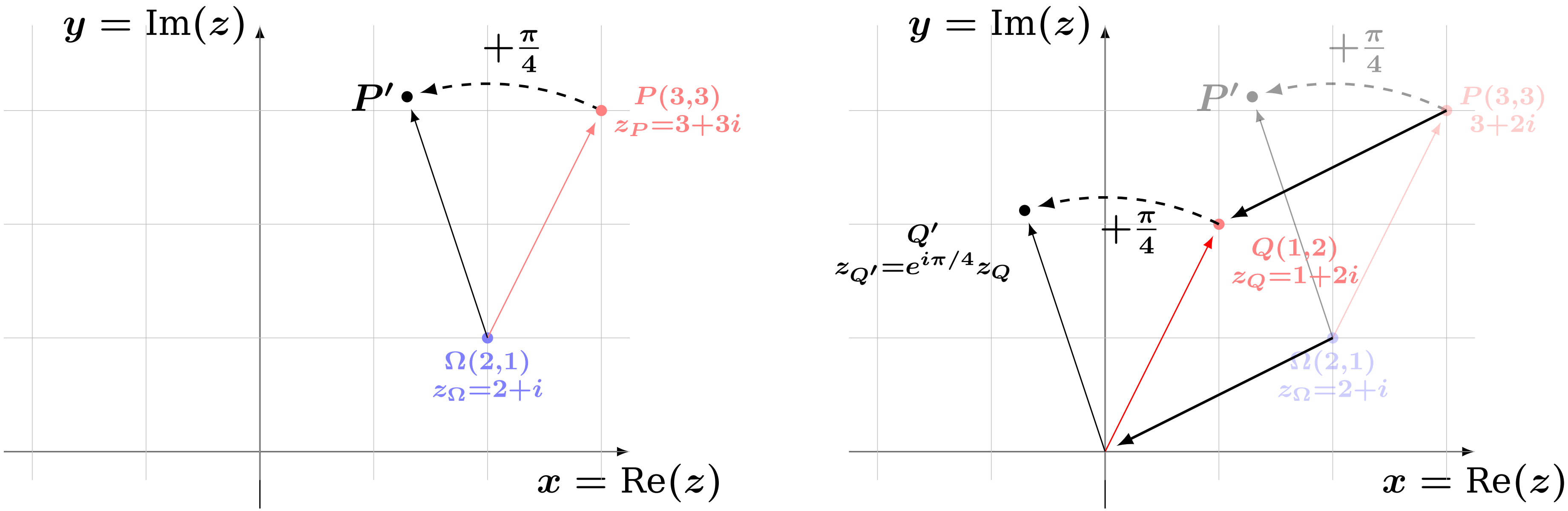
$$\left\{\mathbf{1},\, e^{i\frac{2\pi}{5}},\, e^{i\frac{4\pi}{5}},\, e^{i\frac{6\pi}{5}},\, e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}.$$

L'écriture $\sqrt{\mathbf{1}}$ n'est donc plus celle d'une fonction dans $\mathbb{C}$. Il n'est en effet pas possible de décider laquelle de ces cinq solutions est la solution "positive".
Dans $\mathbb{C}$, $\sqrt{\mathbf{1}}$ est un plutôt un ensemble de cinq nombres complexes.



4. $\boxed{\text{Tourner } \boldsymbol{P(3,3)} \text{ autour de } \boldsymbol{\Omega(2,1)} \text{ d'un angle de } \frac{\pi}{4}.}$

On a déjà vu comment faire tourner un point autour de l'origine dans l'exemple 2. On va donc se ramener à ce cas par translation du plan :



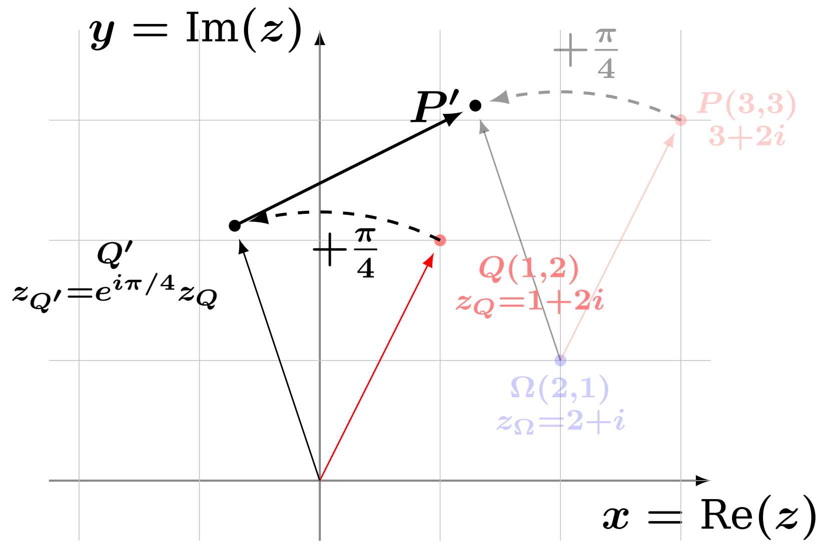
On va ramener le centre de rotation $\boldsymbol{\Omega(2,1)}$ vers l'origine des coordonnées par une translation des points du plan grâce au vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega O}}$.
En terme d'affixe des points, cela revient à soustraire l'affixe z_Ω à l'affixe z_P pour obtenir

l'affixe z_Q du point translaté Q :

$$z_Q = \qquad = \qquad .$$

Ce nouveau point Q va maintenant subir une rotation de $\frac{\pi}{4}$ autour de l'origine pour obtenir un point Q' :

$$z_{Q'} = \qquad = \qquad = \qquad$$



Pour trouver l'affixe de P, il suffit maintenant de faire la translation inverse par $\overrightarrow{O\Omega}$:

$$z_{P'} = z_{Q'} + z_\Omega$$

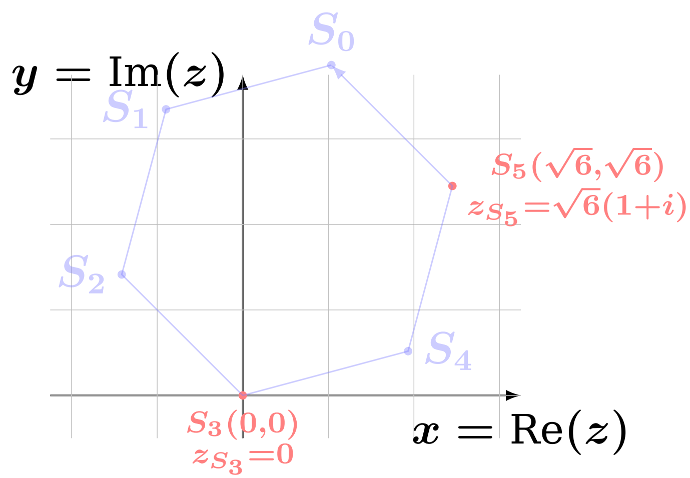
$$= \qquad$$

Cette manière de faire est très générale : pour trouver l'affixe $z_{P'}$ d'un point P qu'on fait tourner d'un angle φ autour d'un point $\Omega \neq (0,0)$, on calcule

$$\boxed{z_{P'} \quad = \quad \underbrace{z_\Omega + \underbrace{e^{i\varphi} \cdot \underbrace{(z_P - z_\Omega)}_{\text{translation de } \overrightarrow{\Omega O}}}_{\text{rotation autour de l'origine}}}_{\text{translation de } \overrightarrow{O\Omega}}}$$

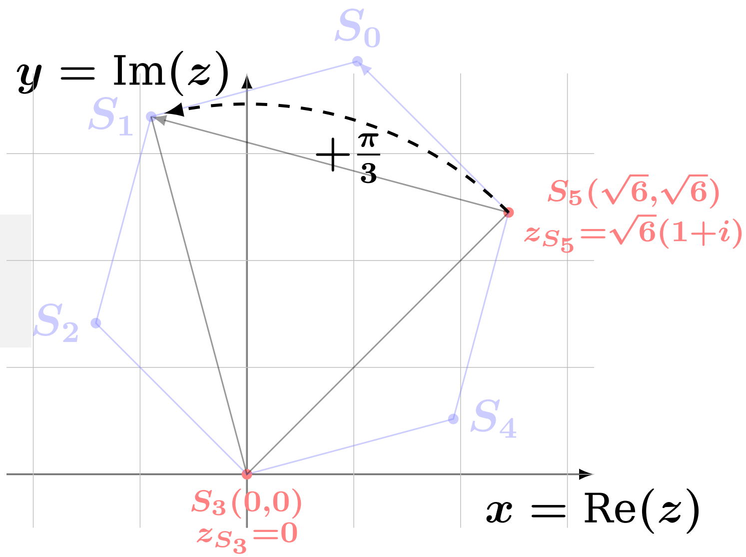
5. $\boxed{\text{Trouver les sommets d'un hexagone régulier, sachant que } z_{S_3} = 0 \text{ et que } z_{S_5} = \sqrt{6}(1+i)}$

Pour résoudre ce problème, on va utiliser les symétries de l'hexagone. On pourra aussi utiliser la formule pour les rotations qu'on vient de trouver au problème précédent.
Pour bien débuter un problème géométrique, on peut toujours commencer par un dessin pour bien visualiser la situation présente :



Géométriquement, il est clair, que les sommets S_1, S_3 et S_5 forment un triangle équilatéral orienté positivement.

Or, le côté S_1 est obtenu par une rotation de $\frac{\pi}{3}$ de S_5 autour de S_3 :



$z_{S_1} =$ $=$

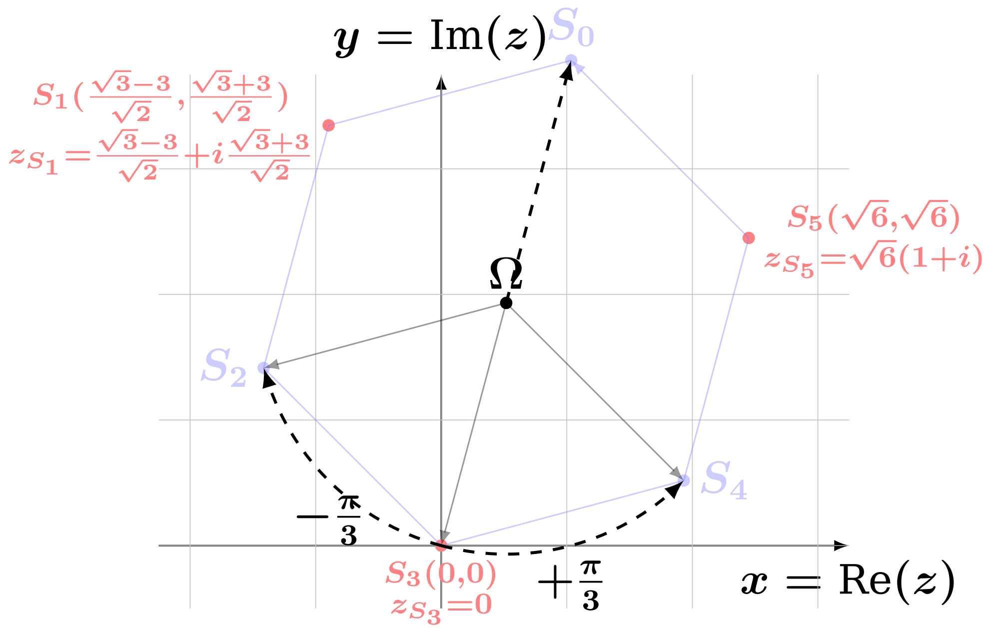
$=$

On remarque ensuite que les sommets S_2, S_4 et S_0 forment eux aussi un triangle équilatéral. Celui-ci est d'ailleurs tout simplement le triangle formé par S_1, S_3 et S_5, tourné d'un angle $\frac{\pi}{3}$ autour du centre Ω de l'hexagone.
Mais le centre de cet hexagone est le même que le centre du triangle formé par S_1, S_3

et S_5, qui se calcule donc comme

$$z_\Omega = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

$$= \quad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \qquad \left(\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$



Il reste donc à calculer

$$\begin{aligned}
z_{S_0} &= \qquad = \sqrt{6}-\sqrt{2}+i(\sqrt{6}+\sqrt{2}),\\
z_{S_2} &= \qquad = \\
&= \\
&= \frac{1}{\sqrt{8}}(-4+i4) = \sqrt{2}(i-1),\\
z_{S_4} &= \qquad = \\
&= \\
&= \frac{1}{\sqrt{8}}\Big(2(1+\sqrt{3})+i2(\sqrt{3}-1)\Big) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

4.3 Division euclidienne

Le but des deux derniers paragraphes est de trouver des solutions dans $\mathbb{C}$ pour des équations polynômiales. Ces solutions peuvent ensuite être utilisées pour écrire ce même polynôme en produit de facteurs simples, comme dans le cas de la factorisation de nombres naturels en facteurs premiers.
On a donc introduit ce nombre i, solution de $x^2 + 1 = 0$. La question maintenant est de savoir : reste-t-il des équations sans solution dans $\mathbb{C}$? On peut en effet trouver facilement de telles équations :

- $\bar{z}z = -1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{C}$, car

$$\bar{z}z \quad = \qquad\qquad .$$

- $\frac{1}{z} = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{C}$, car

$$\frac{1}{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \qquad\qquad .$$

Par contre, les équations polynômiales ont toujours une solution dans $\mathbb{C}$. Pour un polynôme

$P(X)$ de degré n, notons

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n = \qquad\qquad .$$

On classifie les polynômes par leur type de coefficients :

Définition 4.3.1. L'ensemble des polynômes à coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et de degré $n \in \mathbb{N}$ est dénoté par $\mathbb{R}[X]$:

$$\mathbb{R}[X] := \Big\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ et } \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \Big\}.$$

L'ensemble des polynômes à coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et de degré $n \in \mathbb{N}$ est dénoté par $\mathbb{C}[X]$:

$$\mathbb{C}[X] := \Big\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ et } \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \Big\}.$$

On a bien sur $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Deux polynômes $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})$ et $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X})$ peuvent s'additionner et se multiplier. Pour ces opérations, on va s'intéresser au comportement du **degré** des polynômes, c'est-à-dire de l'exposant le plus élevé qui apparaît dans l'expression polynômiale :

Le degré de l'addition de deux polynômes est majoré par le plus haut degré des deux polynômes additionnés :

$$\deg(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}) \leq \max\{\deg(\boldsymbol{P}), \deg(\boldsymbol{Q})\}.$$

$$\begin{array}{rr} & \overbrace{\boldsymbol{6X^5 \qquad\qquad - 2X^2 + X + 3}}^{\text{deg}=\boldsymbol{5}} \\ + & \underbrace{\boldsymbol{4X^4 - 6X^3 + 2X^2} \qquad\quad}_{\text{deg}=\boldsymbol{4}} \end{array}$$

Le degré du produit de deux polynômes est la somme des degrés des deux polynômes multipliés :

$$\deg(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}) = \deg(\boldsymbol{P}) + \deg(\boldsymbol{Q}).$$

$$\begin{array}{rr} & \overbrace{\boldsymbol{- 2X^2 + X + 3}}^{\text{deg}=\boldsymbol{2}} \\ \times & \underbrace{\boldsymbol{-3X^3 + 2X^2 \qquad + 1}}_{\text{deg}=\boldsymbol{3}} \end{array}$$

Comme pour dans le cas des nombres naturels, on peut procéder à une division avec reste entre deux polynômes. On parle de **division euclidienne**. Illustrons cela par un exemple, où nous allons procéder à la division euclidienne de

$$P(X) = 6X^3 - 2X^2 + X + 3 \quad \text{par} \quad Q(X) = X^2 - X + 1.$$

Pour ce faire, on commence par diviser le terme de plus haut degré de $P(X)$, à savoir $6X^3$, par le terme de plus haut degré de $Q(X)$, à savoir X^2. Le résultat, qui est est alors à reporter sur une ligne de résultat :

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{6X^3 - 2X^2 + X + 3}^{P(X)} & \overbrace{X^2 - X + 1}^{Q(X)} \\ \hline & \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{résultat}} \end{array}$$

La deuxième étape consiste à multiplier ce résultat, $6X$, par $Q(X)$. Le résultat de ce produit, à savoir est ensuite reporté sur une ligne en dessous de $P(X)$, pour être prêt à être soustrait :

$$\begin{array}{rr|l} & \overbrace{6X^3-2X^2+\ \ X+3}^{P(X)} & \overbrace{X^2-\ \ X+1}^{Q(X)} \\ \cline{3-3} - & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{Q(X)\times 6X} & 6X \end{array}$$

Cette soustraction est ensuite effectuée et le résultat, à savoir $\qquad\qquad\qquad\qquad$, est placé sur une nouvelle ligne :

$$\begin{array}{rr|l} & \overbrace{6X^3-2X^2+\ \ X+3}^{P(X)} & \overbrace{X^2-\ \ X+1}^{Q(X)} \\ \cline{3-3} - & 6X^3-6X^2+6X & 6X \\ \cline{2-2} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{P(X)-6X\times Q(X)} & \end{array}$$

On divise le terme de plus haut degré de ce polynôme, à savoir $4X^2$, par le terme de plus haut degré de $Q(X)$, toujours X^2, pour obtenir   . Cela est reporté sur la ligne résultat :

$$\begin{array}{rr|l}
 & \overbrace{6X^3-2X^2+\ X+3}^{P(X)} & \overbrace{X^2-\ X+1}^{Q(X)} \\ \cline{3-3}
- & 6X^3-6X^2+6X & \\ \cline{2-2}
 & 4X^2-5X+3 &
\end{array}$$

L' étape suivante consiste à multiplier ce résultat, 4, par $Q(X)$. Le résultat de ce produit, à savoir   est ensuite reporté sur une ligne en dessous de $4X^2-5X+3$, pour être prêt à être soustrait :

$$\begin{array}{rr|l}
 & \overbrace{6X^3-2X^2+\ X+3}^{P(X)} & \overbrace{X^2-\ X+1}^{Q(X)} \\ \cline{3-3}
- & 6X^3-6X^2+6X & 6X+4 \\ \cline{2-2}
 & 4X^2-5X+3 & \\
- & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{4\times Q(X)} &
\end{array}$$

Cette soustraction est ensuite effectuée et le résultat, à savoir   , est placé sur une nouvelle ligne :

$$
\begin{array}{rr|l}
 & \overbrace{6X^3 - 2X^2 + X + 3}^{P(X)} & \overbrace{X^2 - X + 1}^{Q(X)} \\ \cline{3-3}
- & 6X^3 - 6X^2 + 6X \phantom{{}+3} & 6X + 4 \\ \cline{2-2}
 & 4X^2 - 5X + 3 & \\
- & 4X^2 - 4X + 4 & \\ \cline{2-2}
 & -X - 1 &
\end{array}
$$

Ce dernier polynôme est de degré inférieure à $Q(X)$ et ne peut pas être divisé plus. On dit que c'est le **reste** de la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$:

$$P(X) \quad = \quad \underbrace{(6X+4)}_{\text{division } D(X)} Q(X) \quad + \quad \underbrace{-X-1}_{\text{reste } R(X)}.$$

Ce procédé est toujours possible pour tout polynôme $P(X)$ qu'on souhaiterai diviser par $Q(X)$.

La division euclidienne fonctionne bien sûr aussi pour des polynômes à coefficients complexes.

Exemple.

1. $\boxed{\text{Diviser } P(Z) = 2iZ^5 + 4Z^3 - iZ + 1 \text{ par } Q(Z) = 2Z^3 - 8.}$

   Dans cet exemple on a le degré de $P(Z)$ égal à5 et le degré de $Q(Z)$ égal à 3. On devra donc avoir un diviseur (à coefficients complexes) de degré 2 et un reste $R(X)$ (à coefficients complexes) de degré 2 au plus.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & \overbrace{2iZ^5 + 4Z^3 \qquad\qquad - iZ + 1}^{P(Z)} & \overbrace{2Z^3 \qquad - 8}^{Q(Z)} \\ \cline{3-3}
- & 2iZ^5 \qquad\quad - 8iZ^2 \qquad\qquad & iZ^2 + 2 \\ \cline{2-2}
 & 4Z^3 + 8iZ^2 - iZ + 1 & \\
- & 4Z^3 \qquad\qquad\qquad - 16 & \\ \cline{2-2}
 & i8Z^2 - iZ + 17 &
\end{array}
$$

Se dernier polynôme obtenu, à savoir $8iZ^2 - iZ - 17$, ne peut plus être divisé plus par $2iZ^3 - 8$, puisqu'il est de degré inférieur à 3. C'est donc le reste de notre division euclidienne qui s'écrit comme

$$\underbrace{2iZ^5 + 4Z^3 - iZ + 1}_{P(Z)} \quad = \quad \underbrace{(iZ^2 + 2)}_{D(Z)}\underbrace{(2Z^3 - 8)}_{Q(Z)} + \underbrace{i8Z^2 - iZ + 17}_{R(Z)}.$$

On peut résumer par le

Théorème 4.3.2. Soient $P(X)$, $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$, deux polynômes de degrés n et m respectivement, avec $n \geq m > 0$. Il existe alors

- un unique polynôme $D(X)$ de degré $n - m$ et
- un unique polynôme $R(X)$ de degré strictement inférieur à m,

tels que

$$P(X) \quad = \quad D(X) \times Q(X) \quad + \quad R(X).$$

Démonstration. L'existence des polynômes $D(X)$ et $R(X)$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$ est garantie par la division euclidienne.

Montrons alors l'unicité. Supposons que

$$\begin{aligned} P(X) &= D_1(X)Q(X) + R_1(X) \quad \text{et } \deg(R_1) < \deg(Q), \\ P(X) &= D_2(X)Q(X) + R_2(X) \quad \text{et } \deg(R_2) < \deg(Q). \end{aligned}$$

Alors,

$$0 = P(X) - P(X) = \qquad .$$

Si $D_1(X) - D_2(X) \neq 0$, alors .

Comme $\deg(R_1 - R_2) \leq \max\{\deg(R_1), \deg(R_2)\} < \deg(Q)$, on a que

.

Ce dernier polynôme ne peut donc être égal à 0. On doit donc avoir $D_1(X) = D_2(X)$. Si tel est le cas,

$$0 = P(X) - P(X) =$$

$$=$$

et on a donc aussi $R_1(X) = R_2(X)$. $\square$

Le reste d'une division euclidienne est donc toujours de degré inférieur au diviseur. Si ce diviseur est de degré 1, c'est-à-dire que si on divise par un polynôme du type $X - a$, alors le reste sera un nombre. Que représente ce nombre ?

Posons les choses : supposons qu'on Divise un polynôme $P(X)$ de degré n par $(X - a)$. La division euclidienne nous donnera alors quelque chose du type

$$\underbrace{P(X)}_{\text{degré } n} \quad = \quad \underbrace{(X-a)}_{\text{degré } 1}\,\underbrace{D(X)}_{\text{degré } n-1} + \underbrace{R}_{\text{cste}}.$$

Si on substitue maintenant X par la valeur a on obtient

$$P(a) \quad = \quad (a-a)Q(a) + R \quad = \quad R, \quad \Rightarrow$$

On a donc le

Théorème 4.3.3. Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$. Alors le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)$ est la valeur que prends $P(X)$ en $X = a$:

$$P(X) \quad = \quad (X - a)D(X) + P(a).$$

□

Autrement dit, a est une racine du polynôme $P(X)$ ssi $(X - a)$ divise $P(X)$ sans reste. C'est un résultat qu'on a déjà utilisé plusieurs fois lors de factorisations d'expressions dont on cherchait les racines. La division euclidienne nous justifie pleinement dans cette approche.

Exemples.

1. Utiliser les valeurs $P(a)$ et $P(b)$ comme informations sur $R(X)$:

   Etant donné un polynôme $P(X)$ dont on sait, que le reste de la division euclidienne par $(X - a)$ est 1 et le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - b)$ est 2. Que peut-on dire du reste de la division de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$?

   On sait déjà que ce reste doit être de degré au plus 1, puisque $(X - a)(X - b)$ est de degré $\mathbf{2}$. Le reste qu'on cherche est donc du type

$$\boldsymbol{R(X) \quad = \quad a_1 X + a_0.}$$

Puis, on sait que le reste de la division de $\boldsymbol{P(X)}$ par $\boldsymbol{(X - a)}$ est $\mathbf{1}$. Donc,
et similairement, .
Puisque

$$\boldsymbol{P(X) \quad = \quad D(X)(X-a)(X-b) + R(X)}$$

on sait aussi que et . Par conséquent,

$$\boldsymbol{\begin{cases} R(a) = 1, \\ R(b) = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad , \\ \quad \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad , \\ \quad \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad , \\ \quad \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R(X) = \frac{1}{b-a} X + 2 - \frac{b}{b-a}.}$$

On peut aussi réécrire ce résultat comme

$$\boldsymbol{R(X) \quad = \quad \frac{\overbrace{1}^{R(b)-R(a)}}{b-a}(X-a) + \underbrace{1}_{R(a)},}$$

ou encore comme

$$\boldsymbol{R(X) \quad = \quad \frac{\overbrace{-1}^{R(a)-R(b)}}{a-b}(X-b) + \underbrace{2}_{R(b)}.}$$

Ces deux dernières écritures pourront être vérifiées en exercices.

2. $\boxed{\text{Utiliser les valeurs } \boldsymbol{P(a)} \text{ et } \boldsymbol{P'(a)} \text{ comme informations sur } \boldsymbol{R(X)} \text{ :}}$

Si on sait que $\boldsymbol{P(a) = 1}$ et $\boldsymbol{P'(a) = 2}$, que peut-on dire sur le reste $\boldsymbol{R(X)}$ de la division de $\boldsymbol{P(X)}$ par $\boldsymbol{(X-a)^2}$?

A nouveau, ce reste doit être de degré au plus $\boldsymbol{1}$, puisque le degré du quotient $\boldsymbol{Q(X) =}$

$(X-a)^2$ est de 2. On a donc

$$\begin{aligned} P(X) &= D(X)(X-a)^2 + R(X), \\ P'(X) &= \qquad\qquad \\ \Rightarrow \quad R(a) &= \qquad \text{ et } \quad P'(a) = \qquad \end{aligned}$$

On cherche donc

$$\begin{aligned} R(X) &= a_1 X + a_0 \quad \text{t.q.} \quad R(a) = 1 \text{ et } R'(a) = 2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \qquad \\ \qquad \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \qquad \\ \qquad \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \quad R(X) = 2X + 1 - 2a. \end{aligned}$$

On peut réécrire cela comme

$$R(X) = \underbrace{2}_{P'(a)}(X-a) + \underbrace{1}_{P(a)}.$$

On remarquera que cela n'est rien d'autre que le polynôme de Taylor de $\boldsymbol{R(X)}$ autour de $\boldsymbol{X_0 = a}$.

3. $\boxed{\text{Reste de la division de } \boldsymbol{P(X) = (X+1)^n - X^n - 1} \text{ par } \boldsymbol{X^2 - 3X + 2}.}$

Ici la difficulté réside dans le fait que le degré du polynôme $\boldsymbol{P(X)}$ est inconnu. On ne peut donc procéder à une division euclidienne.
Par contre, on sait que

$$\boldsymbol{X^2 - 3X + 2} \quad =$$

De plus,

$$\text{le reste de la division de } \boldsymbol{P(X)} \text{ par } \boldsymbol{(X-1)} \text{ est } \boldsymbol{P(1)} \quad =$$

$$\text{le reste de la division de } \boldsymbol{P(X)} \text{ par } \boldsymbol{(X-2)} \text{ est } \boldsymbol{P(2)} \quad =$$

Le reste qu'on cherche est de degré 1 et on sait par le premier exemple, que

$$\begin{aligned} R(X) &= \frac{P(2)-P(1)}{2-1}(X-1)+P(1) \\ &= \frac{R(2)-R(1)}{2-1}(X-1)+R(1) \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Comme pour les nombres entiers, on peut alors poser la

Définition 4.3.4. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ (ou $\in \mathbb{C}[X]$). On dit alors que $Q(X)$ **divise** $P(X)$, et on note $A|B$, si le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$ est nul.

On sait alors déjà qu'un polynôme de degré un $Q(X) = (X-a)$ divise un polynôme $P(X)$ si et seulement si $P(a) = 0$. On peut utiliser ce résultat itérativement pour déterminer la divisibilité des polynômes :

Exemples.

1. $\boxed{\text{Utiliser les racines de } Q(X) \text{ pour diviser } P(X).}$

Est-ce que le polynôme

$$P(X) = X^5 - X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 3X + 2$$

est divisible par

$$Q(X) \quad = \quad X^2 - 3X + 2?$$

On va utiliser les racines de $Q(X)$ pour déterminer cela. En effet,

$$Q(X) \quad = \qquad\qquad .$$

Les racines de $Q(X)$ sont donc $\{1, 2\}$. Mais

$$P(1) \quad = \qquad\qquad ,$$

$$P(2) \quad = \qquad\qquad$$

On sait alors que $P(X)$ est divisible par $(X-2)$ et par $(X-1)$. Mais alors,

$$P(X) \quad = \quad D(X)(X-1).$$

Comme $P(2)=0$ et que $(X-1)|_{X=2} \neq 0$, il faut que . Donc $(X-2)$ divise $D(X)$ et

$$P(X) \quad = \quad \underbrace{E(X)(X-2)}_{D(X)}(X-1) \quad = \quad .$$

On a donc bien que $Q(X) = X^2 - 3X + 2$ divise $P(X)$.

2. $\boxed{(X-1)^2 \text{ divise-t-il } P(X) = X^{n+1} - X^2 + (1-n)X + n - 1\,?}$

On vérifie facilement que $P(1) = 0$. On en conclut que $(X-1)$ divise $P(X)$. Mais comment savoir, si $(X-1)^2$ divise $P(X)$?

En fait, la réponse nous est donnée par les polynômes de Taylor, dont notre connaissance va nous être utile même ici. $P(X)$ étant un polynôme de degré n, on sait que son polynôme de Taylor autour de tout X_0 et de degré n lui sera égal.

L'astuce est maintenant de considérer le polynôme de Taylor de $P(X)$ autour de $X_0 = 1$:

$$P(X) \quad = \qquad .$$

Le reste de la division de $P(X)$ par $(X-1)^2$ est donc . La division sera alors possible si $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. Dérivons alors $P(X)$:

$$P'(X) \quad = \qquad .$$

On voit alors maintenant qu'en effet, $P'(1) = 0$. On conclut alors que $(X-1)^2$ divise bel et bien $P(X)$.

4.4 Factorisation

La question de savoir si toute équation polynômiale dans $\mathbb{C}$ possède une solution a été soulevée mais pas complètement résolue au paragraphe précédent.
La bonne nouvelle vient maintenant sous la forme du **théorème fondamental de l'algèbre :**

Théorème 4.4.1. Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré plus grand que 1. Alors l'équation $P(X) = 0$ possède au moins une solution dans $\mathbb{C}$. □

Remarques.

- Le théorème fondamental de l'algèbre n'est pas vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$: on a déjà vu que $X^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
  Par contre, $X^2 + 1 = 0$ a les solutions $X = \pm i$. Un polynôme à coefficients réels peut donc avoir des solutions dans $\mathbb{C}$.
- La preuve de ce théorème est laissé dans une note séparée et est donc facultative.

Comme nous assure la division euclidienne, on peut procéder à une division d'un polynôme $P(X)$ par un facteur $X - w$, pour autant que $P(w) = 0$. En effet, le reste R de la division euclidienne par $X - w$ représente la valeur $P(w)$, qui est donc nul.

Exemples.

1. $\boxed{\text{Division de } P(X) = X^3 + 2X^2 - i2X + i \text{ par } X - i :}$

On commence par constater que

$$P(i) \quad = \qquad\qquad = \qquad\qquad = 0.$$

On peut donc diviser $P(X)$ par $X - i$. Le tableau de la division euclidienne donne

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{X^3 + \qquad 2X^2 - \qquad 2iX + i}^{P(X)} & \overbrace{X - i}^{Q(X)} \\ \hline
- \qquad\qquad\qquad\qquad & \\ \hline
- \qquad\qquad\qquad & \\
\\ \hline
- \qquad & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

On obtient donc

$$X^3 + 2X^2 - i2X + i = (X^2 + (2+i)X - 1)(X - i).$$

On remarque que le reste est effectivement nul.

2. Factoriser complètement $P(X) = 2X^3 + (2i-4)X^2 + (6-6i)X + 4i - 4$:

On remarque premièrement qu'on peut factoriser le polynôme par 2 :

$$\begin{aligned} P(X) &= 2X^3 + (2i-4)X^2 + (6-6i)X + 4i - 4 \\ &= 2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \end{aligned}$$

Les racines de $P(X)$ seront donc les mêmes que celles de

$$N(X) = X^3 + (i-2)X^2 + (3-3i)X + 2i - 2.$$

On dit que $N(X)$ est le polynôme $P(X)$ **normalisé**.

Puis on cherche une racine apparente. Dans ce cas, $X = 1$ en est une (**astuce :** si la somme des coefficients d'un polynôme est nulle, $X = 1$ en est une racine).

On passe donc à une division par $X-1$:

$$\begin{array}{rl|l}
 & \overbrace{X^3+(i-2)X^2+(3-3i)X-2+2i}^{N(X)} & \overbrace{X-1}^{Q(X)} \\ \cline{3-3}
- & & \\ \cline{2-2}
 & & \\
- & & \\ \cline{2-2}
 & & \\
- & & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

On obtient ainsi

$$N(X) = (X-1)(X^2+(i-1)X+2-2i).$$

Les racine du deuxième facteur peuvent se calculer soit par discriminant, soit on remarque encore une solution par tâtonnement : on peut remarquer que $X=-2i$ en est une. On divise alors par $(X+2i)$:

$$X^2+(i-1)X+2-2i=(X+2i)\qquad\qquad$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} N(X) &= (X-1)(X+2i)(X-i-1), \\ \Rightarrow \quad P(X) &= \qquad\qquad\qquad\qquad . \end{aligned}$$

Ces exemples montrent donc qu'on peut factoriser un Polynôme à coefficients complexes en produits de facteurs de degré 1. Il semble que ce processus puisse se généraliser pour des polynômes à coefficients complexes de n'importe quel degré.
En fait, on se retrouve dans une situation très similaire aux nombres entiers, qu'on peut écrire comme produit de leur facteurs premiers. Cette état de faite est précisé par la **deuxième version du TFA :**

Théorème 4.4.2. Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme de degré $n \geq 1$. Il existe alors des nombres complexes $w_1, \ldots, w_n$ (pas toujours tous distincts), tels que

$$P(X) = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - w_k).$$

Démonstration. On peut procéder par récurrence sur le degré de $P(X) \in \mathbb{C}[X]$:
si $\deg(P) = 1$, on peut écrire

$$P(X) \quad = \quad a_1 X + a_0, \quad \text{et } a_1 \neq 0.$$

On a donc

$$P(X) \quad = \quad a_1 \Big(X + \underbrace{\frac{a_0}{a_1}}_{}\Big),$$

qui est exactement la forme annoncée par le théorème.
Supposons maintenant le théorème prouvé pour tous les polynômes de degré n et soit $P(X) \in$

$\mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n+1$. On peut alors écrire

$$P(X) \quad = \quad a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n+1} X^{n+1}.$$

La première version du théorème fondamental de l'algèbre nous dit qu'il existe au moins une racine pour $P(X)$, disons w_0 : $P(w_0) = 0$.
La division euclidienne nous permet alors de dire, que $X - w_0$ divise le polynôme $P(X)$:

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - w_0) D(X), \qquad , \\ D(X) &= \underbrace{b_n} X^n + \ldots + b_1 X + b_0 \quad . \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $D(X)$, étant de degré n, peut se factoriser complètement sur ses racines. Il existe donc des nombres complexes $w_1, \ldots, w_n$ (pas tous distincts), tels que

$$D(X) \quad = \quad b_n \prod_{k=1}^{n} (X - w_k) \quad = \quad a_{n+1} \prod_{k=1}^{n} (X - w_k),$$

$$\Rightarrow \quad P(X) \quad = \quad (X-w_0)D(X) \quad = \quad a_{n+1}\prod_{k=0}^{n}(X-w_k),$$

qui est exactement la forme annoncée par le théorème. $\square$

Exemples.

1. $\boxed{\text{Déterminer un polynôme à partir de propriétés :}}$

   On va chercher un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, de degré 3, qui satisfait

   - $P(i) = 0$,
   - $P(1) = 2$,
   - La somme des racines de $P(X)$ égale $2+i$.
   - Le produit des racines de $P(X)$ égale $2i$.

   D'après le Théorème fondamental de l'algèbre, il doit exister un nombre complexe a_3 et trois racines w_1, w_2 et w_3 qui nous permettent d'écrire

$$P(X) \quad = \quad a_3(X-w_1)(X-w_2)(X-w_3)$$
$$= a_3(X^3 + X^2 \qquad\qquad + X \qquad\qquad - \qquad\qquad).$$

D'après la première condition on peut poser $w_1 = i$. Les deux dernières conditions nous disent alors que

$$\begin{cases} 2 + i = \qquad\qquad\qquad\qquad , \\ 2i = \qquad\qquad\qquad \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 = \qquad\qquad\qquad\qquad , \\ 2 = \qquad\qquad\qquad \end{cases} .$$

On pose alors $w_3 = 2 - w_2$ qu'on insère dans la deuxième équation :

$$2 = 2w_2 - w_2^2 \quad \Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

On trouve alors comme solutions

$$w_2 = \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

On obtient donc,

$$w_1 = i, \quad w_2 = 1 + i, \quad w_3 = 1 - i,$$

ce qui implique

$$P(X) = a_3(X - i)(X - 1 - i)(X - 1 + i).$$

Le coefficient a_3 nous est maintenant fourni par la deuxième condition $P(1) = 2$:

$$2 = \qquad = \qquad .$$

On obtient ainsi $a_3 = 1 + i$ et

$$P(X) = (1+i)(X-i)(X-1-i)(X-1+i).$$

2. $\boxed{\text{Factoriser } P(X) = 1 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{16}X^4 :}$

On remarque ici un polynôme qui est une progression géométrique de raison $-\frac{1}{2}X$. On a donc, pour autant que $X \neq -2$:

$$P(X) = \qquad = \qquad = \qquad .$$

Factorisons alors

$$Q(X) = 32 + X^5.$$

Il s'agit de trouver les racines $5^{\text{ième}}$ de -32. En représentation polaire, on a

$$w^5 = -32 \quad = \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |w|^5 = 2^5, \\ 5\varphi_w = \qquad\qquad \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} |w| \quad = 2, \\ \varphi_w \in \qquad\qquad\qquad\qquad \end{cases}.$$

On peut donc écrire la factorisation complète pour $Q(X)$:

$$Q(X) = 32 + X^5 \quad = \quad \prod_{k=0}^{4} (X - 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}).$$

Remarquons que pour $k = 2$,

$$(X - 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}) \quad = \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad.$$

Par conséquent,

$$P(X) = \frac{32+X^5}{16(2+X)} \quad = \quad \frac{1}{16}\prod_{k\in\{0,1,3,4\}}(X-2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}).$$

Cette égalité est maintenant aussi valable pour $X=-2$, puisque c'est une égalité entre polynômes.

Le théorème fondamental de l'algèbre nous permet donc d'écrire tout polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ comme un produit de facteurs linéaires $(X-w_k)$, où w_k est la $k^{\text{ième}}$ racine de $P(X)$. Le facteur $(X-w_k)$ est lui-même plus réductible. On les appelle des **facteurs irréductibles**. Dans $\mathbb{C}[X]$, tout facteur irréductible est donc de degré 1 et réciproquement.

Qu'en est-il dans $\mathbb{R}[X]$? On sait déjà que $P(X)=X^2+1$ n'est pas réductible sur $\mathbb{R}[X]$. En effet, sa réduction sur $\mathbb{C}[X]$ est

$$X^2+1 \quad = \qquad\qquad ,$$

mais c'est un produit de facteurs dans $\mathbb{C}[X]$. Par contre, cet exemple nous suggère, que si un nombre complexe w est une racine d'un polynôme $P(X)\in\mathbb{R}[X]$, alors le complexe conjugué,

$\overline{w}$ en est aussi une. On peut en effet montrer le

Théorème 4.4.3. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme à coefficients **réels**. Si $w \in \mathbb{C}$ est tel que $P(w) = 0$, alors $P(\overline{w}) = 0$.

Démonstration. On a en effet

$$
\begin{aligned}
P(w) \quad = \quad 0 \quad = \quad \overline{0} \quad = \quad \overline{P(w)} \\
= \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad \\
= \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad = \quad P(\overline{w}).
\end{aligned}
$$

□

En conclusion, les racines **complexes** d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients **réels** arrivent toujours par **paires conjuguées**.

Cela nous facilite la factorisation. En fait, l'idée est maintenant pour un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de le considérer comme un polynôme à coefficients complexes, puis de le factoriser sur $\mathbb{C}[X]$, puis de remultiplier les facteurs complexes conjugués, pour obtenir des facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemples.

1. $\boxed{\text{Factoriser } P(X) = 1 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{16}X^4 \text{ sur } \mathbb{R}[X] :}$

Ce polynôme est à coefficients réels et on connait déjà sa factorisation sur $\mathbb{C}[X]$ (voir exemple **2** précédent) :

$$P(X) = \frac{1}{16} \prod_{k\in\{0,1,3,4\}} (X - 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}).$$

Ses racines arrivent effectivement par paires conjuguées :

$$2e^{i\frac{\pi}{5}} \text{ avec } \qquad \text{ et } \quad 2e^{i\frac{3\pi}{5}} \text{ avec } \qquad .$$

En multipliant les facteurs associés, on trouve

$$P(X) = \frac{1}{16}(X - 2e^{i\frac{\pi}{5}})(X - 2e^{i\frac{9\pi}{5}})(X - 2e^{i\frac{3\pi}{5}})(X - 2e^{i\frac{7\pi}{5}})$$

$$= \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{16}$$

En insérant les valeurs $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(3\pi/5) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ on trouve

$$P(X) = \frac{1}{16}(X^2 - (1+\sqrt{5})X + 4)(X^2 - (1-\sqrt{5})X + 4).$$

2. $\boxed{\text{Factoriser } P(X) = X^4 + 2X^2 + 2 \text{ dans } \mathbb{R}[X].}$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 4 - 2 \cdot 4 = -4$. Ce nombre négatif indique donc que $P(X)$ n'a pas de racines réelles. Pourtant, **il est réductible**, même sur $\mathbb{R}[X]$! Factorisons $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$. On cherche ses racines en écrivant $Y = X^2$. Donc

$$P(X) = Y^2 + 2Y + 2\Big|_{Y=X^2}, \quad \Delta = -4.$$

Les racines pour Y sont donc données par

$$Y_\pm = \qquad = \qquad .$$

Ensuite, il faut chercher les racines complexes de $-1 \pm i$. On l'écrit en polaire

$$-1+i \quad = \qquad\qquad , \quad -1-i \quad = \qquad\qquad .$$

Les racines complexes de ces nombres sont alors obtenus en prenant la racine des modules et en divisant l'argument $\mod 2\pi$ par 2. On obtient alors

$$\sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}, \quad \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{5\pi}{8}}, \quad \sqrt[4]{2}e^{i\frac{5\pi}{8}}, \quad \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{3\pi}{8}}.$$

La factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{C}[X]$ s'écrit alors comme

$$P(X) \quad = \qquad\qquad .$$

On remarque que le premier facteur est conjugué du quatrième, et que le deuxième facteur est conjugué du troisième. En les multipliant on obtient alors des facteurs de degré 2, irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) \quad = $$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

La procédure de factorisation d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ est donc

- Factoriser $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
- Identifier les facteurs non réels et complexe conjugués.
- Multiplier les facteurs non réels et complexe conjugués deux à deux pour obtenir des facteurs irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ de degré 2.

Existe-t-il des facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieurs à 2 ? On y répond par le

Théorème 4.4.4.
Les facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Les facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont soit les polynômes de degré 1, soit les polynômes de degré 2, sans racines réelles.

Tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 ou plus est donc réductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration. Le cas de $\mathbb{C}[X]$ est une conséquence du théorème fondamentale de l'algèbre. Soit maintenant un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Soit n son degré et $k \leq n$ le nombre de racines réelles de $P(X)$.
Puisque les racines non-réelles de $P(X)$ apparaissent par paires complexe conjuguées, on doit avoir que $n - k$, le nombre de racines non réelles, est un nombre paire.
En considérant $P(X)$ comme un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, sa factorisation aura donc k facteurs de degré 1 réels et $(n-k)/2$ facteurs non réels ainsi que leur $(n-k)/2$ facteurs complexe conjugués.
Chaque facteur non réel peut donc être multiplié par son facteur conjugué. Le résultat sera un facteur de degré 2 à coefficients réel. Ainsi, $P(X)$ sera le produit de k facteurs réels de degré 1 et de $(n-k)/2$ facteurs réels de degré 2.
Aucun facteur de degré 3 n'apparaît dans cette factorisation, d'où la conclusion du théorème.

$\square$

4.5 Les fonctions complexes élémentaires

Tout comme les polynômes à coefficients réels, les polynômes à coefficients complexes peuvent être vus comme des fonctions de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$. Qu'en est-il des fonctions déjà étudiées comme les fonctions trigonométriques ou hyperboliques ?

On a déjà ouvert la brèche en remarquant, grâce aux développements limités, que

$$e^{ib} =$$

$$=$$

$$=$$

$$= \cos(b) + i\sin(b).$$

Pour l'exponentielle réelle, on a que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Si on veut garder cette propriété pour un nombre complexe $z = a + ib$ aussi, on est porté vers la

Définition 4.5.1.
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ on définit alors

$$\exp(z) = \exp(a+ib) := \exp(a)\exp(ib) = \exp(a)\big(\cos(b) + i\sin(b)\big).$$

Propriétés.

1. $\boxed{z \mapsto \exp(z) \text{ est une surjection de } \mathbb{C} \text{ sur } \mathbb{C}^*.}$

   En représentation polaire, on écrit pour $z \neq 0$

   $$z \quad = \qquad = \qquad = \qquad .$$

   Ainsi,

   $$\exp^{-1}\{z\} \quad = \qquad .$$

On a donc des valeurs négatives ou imaginaires pour l'exponentielle complexe :

$$-1 = \qquad , \quad 1 + i = \qquad \ldots$$

2. $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \exp(z + 2\pi i).}$

En reprenant la définition et en écrivant $z = a + ib$*, on a bien*

$$\begin{aligned} \exp(z + 2\pi i) \quad &= \quad \exp(a + ib + i2\pi) \\ &= \qquad = \\ &= \qquad = \qquad = \quad \exp(z). \end{aligned}$$

L'exponentielle complexe a donc une périodicité de $i2\pi$*.*

3. $\boxed{\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad \exp(z + w) = \exp(z)\exp(w).}$

En effet, partant de la définition, on a pour $z = a + ib$ *et* $w = x + iy$ *:*

$$\begin{aligned} \exp(z+w) &= \exp(a+ib+x+iy) \\ &= \exp(a+x+i(b+y)) = \qquad \\ = \qquad &= \qquad \\ = \qquad &= \exp(z)\exp(w). \end{aligned}$$

4. $\boxed{\exp(z)\big|_{z\in\mathbb{R}} \text{ \textit{redonne l'exponentielle réelle.}}}$

Si $z \in \mathbb{R}$*, alors* $z = a + i0$ *et par conséquent* $\exp(z) = \exp(a + i0) = \exp(a)$.

5. $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}).}$

Appliquant les définitions, on a pour $z = a + ib$ *:*

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\exp(a+ib)} = \overline{\exp(a)\exp(ib)}$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad$$
$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad$$
$$= \qquad\qquad = \quad \exp(\overline{z}).$$

Comme $\exp(iy) = \cos(y) + i\sin(y)$, on voit que l'exponentielle complexe, quand on restreint son argument sur les imaginaires $i\mathbb{R}$, implémente la fonction cosinus par sa partie réelle et sinus par sa partie imaginaire.
Quand on restreint l'argument de l'exponentielle complexe aux réelles, on retrouve l'exponentielle réelle.
On voit donc que grâce aux **polynômes de Taylor** et aux **nombres complexes**, on arrive à synthétiser **trois fonctions réelles** en **une fonction complexe** !

Les fonctions hyperboliques étaient les parties paires et impaires de l'exponentielle réelle. On peut alors, par parité, généraliser cela pour l'exponentielle complexe aussi :

Définition 4.5.2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\begin{aligned} \cosh(z) &:= \frac{1}{2}\left(\exp(z) + \exp(-z)\right), \\ \sinh(z) &:= \frac{1}{2}\left(\exp(z) - \exp(-z)\right). \end{aligned}$$

A nouveau, comme la restriction de $\exp(z)$ à des valeurs réelles redonne l'exponentielle réelle, la restriction de $\cosh(z)$ et de $\sinh(z)$ à des valeurs réelles redonnent les fonctions réelles $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$.

Propriétés.

1. $\boxed{\overline{\cosh(z)} = \cosh(\overline{z}) \quad \textit{et} \quad \overline{\sinh(z)} = \sinh(\overline{z})}$ *:*

   En partant des définitions et en utilisant que $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$, *on trouve que*

$$\overline{\cosh(z)} = $$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \quad \cosh(\overline{z}).$$

Le cas du sinus hyperbolique se traîte de manière tout à fait similiaire.

2. $\boxed{\textit{Pour } z = a + ib\textit{, on a } \cosh(z) = \cosh(a)\cos(b) + i\sinh(a)\sin(b) \textit{ :}}$

On peut calculer directement les parties réelles et imaginaires :

$$\cosh(z) = \quad \frac{1}{2}\left(\exp(z) + \exp(-z)\right)$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad .$$

On a une identité similaire pour le $\sinh(z)$ *:*

$$\boxed{\sinh(z) = \sinh(a)\cos(b) + i\cosh(a)\sin(b).}$$

La vérification de cette dernière égalité est laissée en exercices.

3. $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1 :}$

La vérification de cette égalité se fait exactement comme dans le cas réel, en utilisant notamment la parité des fonctions hyperboliques :

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \qquad = \qquad = \qquad = 1.$$

4. $\boxed{\forall z, w \in \mathbb{C}, \cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) :}$

La vérification de cette égalité utilise la même stratégie que dans le cas réel et est laissée en exercices, en même temps que la suivante :

5. $\boxed{\forall z, w \in \mathbb{C}, \sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w) :}$

6. $\boxed{\cosh(z) \textit{ et } \sinh(z) \textit{ sont des surjections de } \mathbb{C} \textit{ vers } \mathbb{C} :}$

En effet, si $w \in \mathbb{C}$ *on peut résoudre* $\cosh(z) = w$. *Autrement dit, la pré-image par* $\cosh(z)$ *de l'ensemble* $\{w\}$ *n'est jamais vide, ce qui montrera la surjectivité.*
En effet,

$$\cosh(z) = w \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \exp(z) = w \pm \sqrt{w^2 - 1}.$$

Cette dernière égalité est toujours possible, puisqu'on a montré que $\exp(z)$ *était une surjection de* $\mathbb{C}$ *vers* $\mathbb{C}^*$ *et que* $w \pm \sqrt{w^2 - 1}$ *n'est jamais nul. En effet,*

$$w \pm \sqrt{w^2 - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \mp\sqrt{w^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad w^2 = w^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = -1,$$

ce qui est absurde.
On montre de manière similaire que $\sinh(z)$ *est une surjection de* $\mathbb{C}$ *vers* $\mathbb{C}$.

7. $\boxed{\cosh(z) \text{ et } \sinh(z) \text{ sont périodiques de période } i2\pi :}$

En effet, pour $z \in \mathbb{C}$ *et par la périodicité de l'exponentielle complexe,*

$$\cosh(z + i2\pi) = \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \cosh(z),$$

$$\sinh(z + i2\pi) = \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \sinh(z).$$

On remarque maintenant une certaine curiosité : si $z = i\alpha$ est un nombre imaginaire pure, alors

$$\begin{aligned}
\cosh(i\alpha) &= \\
&= \\
&= \qquad = \cos(\alpha), \\
\sinh(i\alpha) &= \\
&= \\
&= \qquad = i\sin(\alpha).
\end{aligned}$$

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ réelle ne sont donc rien d'autre que les fonctions $\sinh$ et $\cosh$ pour des arguments imaginaires ! Ceci nous conduit à poser la

Définition 4.5.3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\begin{aligned} \cos(z) &:= \cosh(iz), \\ \sin(z) &:= -i\sinh(iz). \end{aligned}$$

Cette définition nous assure donc que pour des valeurs z réelles, on retrouve bien nos fonctions trigonométriques usuelles. On retrouve d'ailleurs aussi certaines propriétés familières :

Propriétés.

1. $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \text{ :}}$

En suivant les définitions, on trouve

$$\begin{aligned} \cos(z)^2 + \sin^2(z) &= \\ &= \qquad\qquad = 1. \end{aligned}$$

2. $\boxed{\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \text{ :}}$

Toujours en suivant les définitions, on trouve

$$\cos(z+w) \quad = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w).$$

3. $\boxed{\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) - \cos(z)\sin(w) \text{ :}}$

Encore en suivant les définitions, on trouve

$$\sin(z+w) \quad = \qquad$$

$$= \qquad = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w).$$

4. $\boxed{\sin(z) \text{ et } \cos(z) \text{ sont des surjections de } \mathbb{C} \text{ vers } \mathbb{C} \text{ :}}$

Vérifions que $\sin(z) = w$ *a toujours une solution pour tout* $w \in \mathbb{C}$. *Comme* $\sin(z) = -i\sinh(iz)$, *cela revient à trouver des solutions à* $\sinh(iz) = iw$. *Or,* $\sinh$ *est une surjection de* $\mathbb{C}$ *vers* $\mathbb{C}$. *Il existe donc un* $w' \in \mathbb{C}$, *tel que* $\sinh(w') = iw$. *On pose alors* $z = -iw'$ *et on a bien*

$$\sin(z) = -i\sinh(iz) = -i\sinh(w') = w.$$

Le cas pour $\cos(z)$ *est similaire et se déduit de la surjectivité de* $\cosh(z)$.

5. $\boxed{\sin(z) \text{ et } \cos(z) \text{ sont périodiques de périodes } 2\pi \text{ :}}$

Cela suit de la périodicité des fonctions $\cosh(z)$ *et* $\sinh(z)$ *qui est de* $i2\pi$. *En effet,*

$$\begin{aligned} \sin(z+2\pi) &= \qquad\qquad = \qquad\qquad = \sin(z), \\ \cos(z+2\pi) &= \qquad\qquad = \qquad\qquad = \cos(z). \end{aligned}$$

5 Introduction aux équations différentielles

5.1 Cadre général

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est elle-même une fonction. On a par exemple ; si $x(t)$ est le déplacement mesuré par rapport à un point de référence d'un objet attaché à un ressort au cours du temps et k est la constante de ce ressort, alors

$$x'' = -kx$$

sera l'équation du mouvement associée (pour autant que le déplacement est mesuré dans un référentiel dit d'inertie, notion qu'on approfondira plus au cours de l'étude de la relativité). La fonction $x(t)$ est l'inconnue et si on arrive à résoudre cette équation, on sera en mesure de décrire tout le mouvement de cet objet soumis à la force de rappel du ressort.
En mécanique générale, l'accélération d'un objet est proportionnel aux forces qui lui sont appliquées. Celles-ci peuvent dépendre de la position de l'objet (champ de gravitation, électrique, etc), ou encore de sa vitesse (frottement). On a ainsi en général, que si $x(t)$ décrit la

position de l'objet, on devra résoudre l'équation

$$x'' = F(x, x', t),$$

qui est une équation différentielle pour la position x. En général, nous posons la

Définition 5.1.1. Une **équation différentielle ordinaire** de **degré** n est une équation

$$F(x, y, \frac{d}{dx}y, \ldots, \frac{d^n}{dx^n}y) = 0,$$

où $F : D \to \mathbb{R}$ est une fonction avec $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Une solution à cette équation est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I, n fois dérivable sur celui-ci et telle que $(x, f(x), \ldots, \frac{d^n}{dx^n}f(x)) \in D$ pour tout $x \in I$.
Une **équation différentielle ordinaire explicite** de **degré** n est une équation

$$\frac{d^n}{dx^n}y = G(x, y, \frac{d}{dx}y, \ldots, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y),$$

où $G : E \to \mathbb{R}$ est une fonction avec $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Une solution à cette équation est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, n fois dérivable et telle que $(x, f(x), \ldots, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)) \in E$ pour tout x dans l'ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

La question de l'existence et de l'unicité de tels équations est une question classique en mathématiques. Un premier résultat a été obtenu par Peano en 1886 :

Théorème 5.1.2. Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un ouvert et soit $G : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'équation

$$y' = G(x, y),\ y(x_0) = y_0,\ (x_0, y_0) \in D$$

possède une solution $f : I \to \mathbb{R}$ où $x_0 \in I$ et I est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Il est hors de question de prouver ce théorème ici. Remarquons que le théorème ne dit rien sur l'unicité de la solution. Il existe d'ailleurs des exemples ou on peut avoir plusieurs solutions, même si on garde les conditions initiales $y_0 = y(x_0)$ identiques. On donnera comme exemple l'équation $y' = 3(\sqrt[3]{y})^2$ avec $y(0) = 0$, qui possède les solutions $y = 0$ et $y = x^3$.
Si on veut l'unicité, il faut ajouter des conditions sur G plus sévères. On a par exemple le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 5.1.3. Si $G : E \to \mathbb{R}$ avec $E \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert est telle que pour tout $(x_1, x_2) \in E$ il existe un ouvert $U \ni (x_1, x_2)$ et un nombre positif M tel que pour tout couple $(t, w),\ (t, v) \in U \subset E$, $|G(t, w) - G(t, v)| \leq M|w - v|$, alors l'équation $y' = G(x, y)$ avec $y(x_0) = y_0$ et $(x_0, y_0) \in E$ possède une unique solution sur un certain intervalle ouvert $I \ni x_0$.

Il peut aussi paraître étonnant de constater qu'il a fallu attendre presque deux siècles pour

obtenir un tel résultat. En effet, le sujet des équations différentielles a été introduit vers le début du dix-huitième siècle afin de calculer et de prédire des mouvements d'objets soumis à des forces. Ceci indique la difficulté de cette discipline.
Pourtant, les équations différentielles ont depuis considérablement étendu leur domaines d'application et il ne reste presque plus de disciplines scientifiques où elles n'apparaissent pas sous une forme ou une autre. Des découvertes sur leur natures précise sont souvent célébrées comme des avancées centrales en mathématiques et récompensées par des prix prestigieux.
Nous allons ici nous bornés à une introduction à ce vaste sujet et étudier des équations différentielles pour lesquelles des résultats sur les solution sont connues.

5.2 Les équations différentielles linéaires de premier ordre

La première classe d'équations différentielles que nous allons étudier sont les celles dites linéaires. On va en plus commencer par celles dites de premier ordre,. Cela signifie, que dans l'équation différentielle, seul vont apparaître les dérivées de premier ordre.

Définition 5.2.1. Une **équation différentielle ordinaire et linéaire de premier ordre** (**EDOL1**) est une équation du type

$$y' + py = q,$$

où $p, q : D \to \mathbb{R}$ sont continues et $D \subset \mathbb{R}$.
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en est une **solution**, si $I \subset D$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et si $f' + pf = q$ pour tout $x \in I$.
Une EDOL1 est dite **homogène** si $q = 0$.

Une solution f d'une EDOL1 est donc dérivable sur un ouvert I. La question est alors de savoir, dans quels cas une solution existe et si elle est unique. On va commencer par la partie la plus simple d'une EDOL1, c'est à dire qu'on va étudier les équations homogènes : soit

$p : D \to \mathbb{R}$ continue et considérons l'équation différentielle

$$y' + py = 0.$$

Remarquons que si f et g sont deux solutions à cette équation, définies sur un ouvert $I \subset D$, alors $f + \lambda g$ sera encore une solution de cette équation pour n'importe quel $\lambda \in \mathbb{R}$. C'est là l'origine de l'appellation de ces équations.
En effet

$$(f + \lambda g)' + p(f + \lambda g) = \qquad\qquad$$
$$= \qquad\qquad = 0.$$

Les solutions à une EDOL1 homogène peuvent donc se combiner linéairement. Mais comment en trouver une ?
mettons pour l'instant de côté la rigueur mathématique et essayons de travailler l'équation $y' + py = 0$. Essayons de la résoudre en séparant fonctions connues, i.e. p et fonctions inconnue, i.e. y :

$$y' + py = 0 \quad \Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad$$

On ne se soucie pas pour l'instant de savoir, si $y \neq 0$ et faisons le pari que tout ira bien. Pour autant que $y > 0$, on reconnaît $\frac{y'}{y}$ comme étant $\frac{d}{dx}\ln(y)$. A partir de là on procède à des calculs pour isoler y :

$$\frac{y'}{y} = -p \quad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y = A\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right), \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

A posteriori, on voit que notre hypothèse $y \neq 0$ s'est avérée correcte, pour autant que $A \neq 0$. On peut d'ailleurs vérifier que $y(x)$ est en effet une solution à $y' + py = 0$:

$$\frac{d}{dx}y(x) = \quad \frac{d}{dx}A\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right)$$

$$= \qquad = y(x)\cdot(-p(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad y' + py = 0.$$

De plus, on a

$$y(x_0) \quad = \quad A \exp\left(-\int_{x_0}^{x_0} p(t)dt\right) \quad = A.$$

On vient donc de trouver une solution à l'EDOL1, pour autant que p soit continue sur un intervalle qui contient x_0 et x. En fait, sous de telles hypothèses, on vient de trouver toutes les solutions à l'EDOL1 homogène :

Théorème 5.2.2. Soit $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur l'intervalle ouvert I et soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) := y_0 \exp(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt)$$

est l'unique solution à l'EDOL1 homogène $f' + pf = 0$ définie sur I telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration. On a déjà montrer que f était une solution à l'EDOL1 homogène

$$y' + py = 0 \quad \text{avec} \quad f(x_0) = y_0.$$

Soit maintenant une solution à cette EDOL1 homogène, telle que $f(x_0) = y_0$. On considère la fonction

$$g : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x) := \quad f(x)\exp(\int_{x_0}^{x} p(t)dt).$$

On a alors,

$$\frac{d}{dx}g(x) = \qquad$$

$$= \qquad$$

$$= \qquad = \quad 0.$$

Sur un **intervalle** ouvert, les seules fonctions de dérivée nulle sont les fonctions constantes. Ceci implique que $g(x) = \lambda =$ cste. On a donc que

$$f(x) = A\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right)$$

pour un certain A réel. De plus,

$$f(x_0) = A \exp\left(\int_{x_0}^{x_0} p(t)dt\right) = \lambda.$$

Si $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ et si f est une solution à $y' + py = 0$ avec $f(x_0) = y_0$, on voit qu'on doit avoir $A = y_0$. □

On a donc complètement résolu le problème d'une EDOL1 homogène. Le couple (x_0, y_0) est appelé une **condition initiale** pour l'EDOL1 homogène.

Remarques.

1. La condition que I soit un intervalle est cruciale à l'unicité de la solution. En effet, considérons l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{|x|}y = 0$$

définie sur $\mathbb{R}^*$. Imposons encore la condition initiale $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$. On a alors deux solutions à cette équation sur $\mathbb{R}^*$ qui satisfont la même condition initiale :

$$f_1(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

2. L'ensemble des solutions à l'EDOL1 homogène $y' + py = 0$ sur l'intervalle ouvert I sans restrictions sur la condition initiale s'écrit comme

$$S = \{\lambda \varphi_h(x), : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

avec $\varphi_h(x) = \exp(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt)$ et $x_0 \in I$ arbitraire. En fait, cela rappelle la description d'une droite paramètrisée en géométrie analytique.

3. Deux choix distincts d'un x_0 sur l'intervalle I vont donner deux solutions $\varphi_h(x)$ différentes, mais proportionnelles entre elles : en effet, soient x_0 et $\tilde{x_0} \in I$. On aura alors

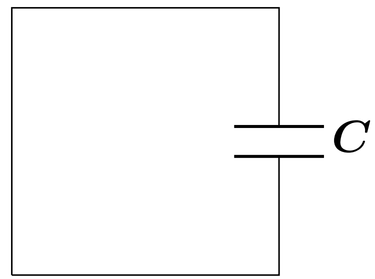
$$\varphi_h(x) = \quad \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) \quad = \quad \exp\left(-\int_{x_0}^{\tilde{x}_0} p(t)dt - \int_{\tilde{x}_0}^{x} p(t)dt\right)$$

$$= \quad \underbrace{\exp\left(-\int_{x_0}^{\tilde{x}_0} p(t)dt\right)}_{\text{cste}} \underbrace{\exp\left(-\int_{\tilde{x}_0}^{x} p(t)dt\right)}_{\tilde{\varphi}_h(x)} \quad = \quad \lambda\tilde{\varphi}_h(x).$$

Exemples.

1. $\boxed{\text{Un exemple de la physique}}$

Considérons un problème qu'on rencontre en électricité, qui est celui d'un condensateur en décharge. On suppose qu'on ait un circuit, dont le fil relie les deux plaques d'un condensateur.



Le fil a une résistance de R Ohm et le condensateur une capacité de C. Supposons de plus une charge Q_0 placée sur le condensateur à un temps initial $t_0 = 0$.
On va laisser cette charge se propager le long du circuit. Au temps t, la tension au bornes du condensateur sera de $U(t) = \frac{Q(t)}{C}$.
Les lois de l'électricité nous disent, que

$$U(t) = RI(t),$$

où $I(t)$ est le courant dans le circuit. Il faut choisir un sens au courant. On le choisira dans le sens trigonométrique.
Si on chosit ce sens pour le courant, celui-ci correspond à la variation de charges par unité de temps, i.e.

$$I(t) = \qquad .$$

Le signe négatif vient de ce que le courant augmente, si le condensateur se décharge. On a ainsi

$$RI(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0 \iff \qquad .$$

Ceci est une EDOL1 (on le reconnaît malgré la notation chère à la physique) homogène, et on en connait donc toutes les solution, qui auront la forme

où nous avons posé $\tau := (RC)^{-1}$. $Q(0) = Q_0$ est notre condition initiale, qui nous conduit à poser

$$Q(t) = \qquad .$$

Physiquement, cela signifie, qu'un condensateur laissé libre se déchargera exponentiellement rapidement, avec un temps caractéristique τ qui est inversement proportionnel à la résistance du circuit et à la capacité du condensateur.

2. $\boxed{\text{Résoudre } y' + \cot(x)y = 0,\ y(\tfrac{\pi}{2}) = 1.}$

C'est clairement une EDOL1 homogène, avec $p(x) = \cot(x)$. On sait donc que toutes les solutions sur l'intervalle $]0, \pi[$ seront du type

$$f(x) = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

$$= \quad \lambda \exp\left(-\ln(\sin(x)) + \ln(\sin(\frac{\pi}{2}))\right) \quad = \quad \frac{\lambda}{\sin(x)}.$$

Comme on cherche la solution avec $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, on pose $\qquad\qquad$ et on trouve

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sin(x)}.$$

3. $\boxed{\text{Trouver toutes les fonctions } f \in C^1(\mathbb{R}_+^*)\text{, telles que } f(x^y) = yf(x).}$

Si on dérive une fois cette équation selon y on trouve

$$f(x^y) = yf(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dy}f(x^y) = \frac{d}{dy}yf(x)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

On pose maintenant $y = 1$ et on a par conséquent

$$f'(x)x\ln(x) = f(x).$$

pour $x > 0$ cette équation peut se réécrire comme

qui est une EDOL1 homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $p(x) = -\frac{1}{x\ln(x)}$.
La présence de $\frac{1}{x}$ dans $p(x)$ est heureuse, car c'est la dérivée de $\ln(x)$. Ainsi,

$$-p(x) = \qquad = \qquad .$$

Les solutions à notre EDOL1 homogène semblent donc être la fonction nulle et

$$\lambda \exp(\ln(|\ln(x)|)) = \lambda |\ln(x)|.$$

Mais **attention** : le théorème précédent nous dit que la solution à une EDOL1 homogène est proportionnelle à

$$\varphi(x) =$$

$\varphi(x)$ est donc définie strictement sur un intervalle sur lequel $p(x)$ est intégrable, donc définie. Dans notre cas, $p(x) = -\frac{1}{x\ln(x)}$, qui n'est pas défini en $x = 1$. On a donc deux familles de solutions :

- <u>Sur l'intervalle $I_1 =]0, 1[$</u> : sur cet intervalle, $|\ln(x)| = -\ln(x)$ et les solutions à l'EDOL1 homogène s'écrivent comme

$$\varphi(x) = -\lambda \ln(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Sur l'intervalle $I_1 =]1, \infty[$: sur cet intervalle, $|\ln(x)| = \ln(x)$ et les solutions à l'EDOL1 homogène s'écrivent comme

$$\varphi(x) = \mu \ln(x), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

On voit en fait que deux éléments de ces familles peuvent facilement se raccorder en $x = 1$ si on choisit $\mu = -\lambda$. On aura alors des solutions dans $C^1(\mathbb{R}_+^*)$, qui seront de la forme

$$\varphi(x) = \lambda \ln(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ce sont là les seules fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui vérifient $\varphi(x^y) = y\varphi(x)$.

Revenons à notre EDOL1. Il faut encore discuter le cas inhomogène, i.e. quand $q \neq 0$.

On va à nouveau chercher une solution particulière, puis en conclure la forme générale d'une solution à cette équation.
On sait déjà, que $\lambda\varphi_h(x)$ est une solution de l'équation homogène. Supposons maintenant qu'on écrive

$$f(x) := \lambda(x)\varphi_h(x),$$

où $\lambda(x)$ est une fonction dérivable sur un ouvert $I \subset D$. On a alors

$$f' =$$

et si on impose que f soit une solution de l'EDOL1, on doit avoir

$$\underbrace{\lambda'(x)\varphi_h(x) + \lambda(x)\varphi'(x)_h}_{f'(x)} + p(x)\underbrace{\lambda(x)\varphi_h(x)}_{f(x)} = q(x).$$

Mais $\varphi_h'(x) + p(x)\varphi_h(x) = 0$, et on doit donc avoir

$$\Leftrightarrow \quad .$$

Cette dernière équation est facile à résoudre. En effet, si I est un intervalle ouvert et si $x_0, x \in I$, on a comme solution

$$\lambda(x) \quad = $$

qui est définie sur tout I. On pose maintenant

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= \lambda(x)\varphi(x) \\ &= \underbrace{\exp(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt)}_{\varphi_h} \underbrace{\left(\int_{x_0}^{x} q(t)\exp(\int_{x_0}^{t} p(s)ds)dt\right)}_{\lambda(x)}, \end{aligned}$$

qui sera une **solution particulière** à l'EDOL1 $y' + py = q$, définie sur un intervalle ouvert I. De plus, $\varphi_p(x_0) = 0$, puisqu'alors la deuxième intégrale est réduite à un intervalle de longueur nulle.

La technique qu'on vient d'illustrer est appelée la **variation des constantes**. Cette solution particulière génère en fait toutes les autres, comme le montre le

Lemme 5.2.3. Si $\boxed{f}$ et $\boxed{g}$ sont des fonctions dérivables sur un ouvert $I \subset D$ et qu'elles sont solutions de l'EDOL1 inhomogène

$$y' + py = q$$

avec $p, q : D \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, alors $\boxed{f - g}$ est solution de l'EDOL1 homogène

$$y' + py = 0$$

sur I.

Démonstration. Par un calcul direct,

$$(f-g)' + p(f-g) \quad = \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

□

On sait dès lors, que toute solution de l'EDOL1 $y' + py = q$ doit s'écrire sous la forme

$$f = \varphi_p + \lambda\varphi_h,$$

avec φ_p une solution particulière et φ_h une solution à l'équation homogène. On a donc le

Théorème 5.2.4. Soit $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Alors sur I, toute solution $f(x)$ à l'EDOL1 $y'(x) + q(x)y(x) = q(x)$ est de la forme

$$f(x) = \varphi_p(x) + \lambda\varphi_h(x),$$

où

$$\varphi_h(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right), \quad \varphi_p(x) = \varphi_h(x)\int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi_h(t)}dt.$$

De plus, si $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, alors

$$y(x) = \varphi_p(x) + y_0\varphi_h(x)$$

est l'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$

Démonstration. On sait déjà que

$$f = \varphi_p + \lambda\varphi_h$$

est une solution à l'EDOL1 inhomogène.
Si f est dérivable sur I et est solution de l'EDOL1 inhomogène, alors on sait par le lemme précédent que toute $f - \varphi_p$ est solution à l'EDOL1 homogène. On a donc

$$f - \varphi_p = \lambda\varphi_h \Leftrightarrow$$

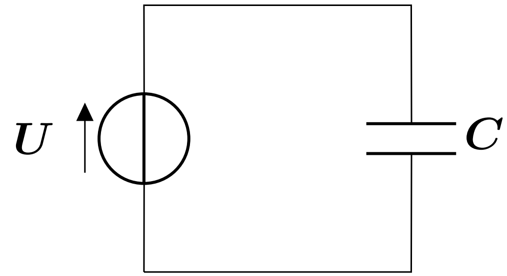
De plus, si $f(x_0) = y_0$ et comme $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi_h(x_0) = 1$, on doit poser qui donnera donc l'unique solution à l'EDOL1 vérifiant la condition initiale (x_0, y_0). □

Exemples.

1. Condensateur forcé

   On reprend l'exemple du condensateur qui se décharge mais cette fois avec en plus une source de tension U :

En choisissant à nouveau le sens trigonométrique pour le courant, on arrive au bilan des tensions:



$$\boldsymbol{RI - U - \frac{Q}{C} = 0.}$$

l'équation du mouvement pour les charges devient

$$-U - \frac{Q(t)}{C} - R\frac{d}{dt}Q(t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Ceci est une EDOL1 inhomogène, dont la solution à la partie homogène à déjà été calculée :

$$\varphi_h(x) \quad = \quad \exp(-\tau t), \quad \text{avec } \tau = \frac{1}{RC}.$$

Il suffit donc de trouver une solution particulière à cette équation par la variation des constantes. On trouve

$$\varphi_p(t) \quad = \quad \underbrace{\exp(-\tau t)}_{\varphi_h} \int_0^t \underbrace{\exp(\tau s)}_{1/\varphi_h} \underbrace{\left(\frac{-U}{R}\right)}_{q} ds$$

$$= \qquad = $$

$$= UC\left(\exp(-\tau t) - 1\right).$$

La solution satisfaisant $Q(0) = Q_0$ sera alors

$$Q(t) = UC\left(\exp(-\tau t) - 1\right) + $$

On voit dès lors, qu'à des temps très grand, la charge va se stabiliser à une valeur de $-UC$.

2. Retrouver l'EDOL1 à partir de ses solutions

On sait qu'une EDOL1 à comme ensemble solutions

$$S \quad = \quad \{\varphi_p + \lambda\varphi_h, : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

ou φ_p est une solution particulière à l'EDOL1 et ou φ_h en est solution de la partie homogène.

Supposons alors que cet ensemble soit

$$\boldsymbol{S = \{\frac{\lambda + e^{-x^2}}{1+e^x}, : \lambda} \in \mathbb{R}\}.$$

On peut y lire les solutions homogènes et particulière :

$$\varphi_h(x) \quad = \qquad\qquad \varphi_p(x) \quad = $$

Si on dérive la solution homogène on trouve :

$$\frac{d}{dx}\varphi_h(x) \quad = \quad \frac{d}{dx}\frac{1}{1+e^x} \quad = $$

$$= \qquad\qquad =$$

La partie homogène de notre EDOL1 doit donc être

$$\varphi_h'(x) + \underbrace{\frac{e^x}{1+e^x}}_{p(x)} \varphi_h(x) = 0.$$

On insère maintenant $\varphi_p(x)$ dans cette équation pour obtenir le terme inhomogène $q(x)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_p'(x) + \frac{e^x}{1+e^x}\varphi_p(x) \quad &= \quad \left(\frac{d}{dx}\frac{e^{-x^2}}{1+e^x}\right) + \frac{e^x}{1+e^x}\frac{e^{-x^2}}{1+e^x} \\
&= \quad \left(\frac{-2xe^{-x^2}(1+e^x) - e^{-x^2}e^x}{(1+e^x)^2}\right) + \frac{e^x e^{-x^2}}{(1+e^x)^2} \\
&= \quad \frac{-2e^{-x^2}}{(1+e^x)^2}(x + xe^x) \quad \equiv
\end{aligned}$$

On a donc retrouvé notre EDOL1 :

$$y'(x) - \frac{e^x}{1+e^x}y(x) = \frac{-2xe^{-x^2}}{(1+e^x)}.$$

Remarque. On vient de voir que pour une EDOL1 définie sur un intervalle ouvert I, l'ensemble des solutions est $S = \{f : I \to \mathbb{R} | \, f = \varphi_p + \lambda\varphi\}$. En fait, ceci rappelle l'équation vectorielle d'une droite. On peut en effet voir φ_p comme un point fixé dans S et φ comme un vecteur directeur. Cette droite est évidemment pas une droite dans $\mathbb{R}^n$, mais plutôt dans l'espace des fonctions définies sur I, qui est un ensemble bien plus vaste.

5.3 La séparation des variables

La suite logique est maintenant d'étudier des équations différentielles qui ne seraient pas linéaires. Il y a un cas de non-linéarité bien connu :

Définition 5.3.1. Une **équation différentielle ordinaire à variables séparées**, ou une EDOv.s., est une équation différentielle qui est sous la forme

$$f'(x)h(f(x)) = g(x),$$

où $g : D \to \mathbb{R}$ et $h : E \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.
f est une solution de cette équation si

- $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur un ouvert $I \subset D$,
- son image est inclue dans E : $\{(f(x)|x \in I\} \subset E$,
- et $h(f)f' = g(x)$.

On va d'abord voir ce qu'une telle solution implique : supposons donc que $f : I \to \mathbb{R}$ soit une fonction qui satisfasse les trois derniers points de la définition.

Supposons encore que $f(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in E$. On a alors

$$\begin{aligned} h(f(x))f'(x) &= g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} h(f(t))f'(t)dt = \int_{x_0}^{x} g(t)dt \\ &\underset{f(t)=y,\, f'(t)dt=dy}{\Leftrightarrow} \int_{y_0}^{f(x)} h(y)dy = \int_{x_0}^{x} g(t)dt \end{aligned}$$

C'est là d'ailleurs l'origine de l'appellation **séparation des variables** : on peut, formellement, écrire une EDOv.s. en séparant les termes en y des termes en x.
Si $H(y)$ est une primitive de $h(y)$ et $G(x)$ une primitive de $g(x)$ on alors que

$$\begin{aligned} h(f(x))f'(x) = g(x) \quad &\Rightarrow \quad H(f(x)) - H(y_0) = G(x) - G(x_0) \\ &\Leftrightarrow \quad H(f(x)) = G(x) - G(x_0) + H(y_0). \end{aligned}$$

Pour autant que H soit inversible, la solution sera ainsi donnée par

$$f(x) = H^{-1}(G(x) - G(x_0) + H(x_0)).$$

On a donc déjà une bonne idée d'une solution à l'équation $f'(x)h(f(x)) = g(x)$. On va maintenant dériver cette solution de manière rigoureuse, ajouter les conditions pour l'existence et étudier son unicité.

Théorème 5.3.2. Soient :

- $g : I_1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_1.
- $h : I_2 \to \mathbb{R}^*$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_2.
- $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$.

Il existe alors une fonction $f : J \to I_2$ définie sur un intervalle ouvert $x_0 \in J \subset I_1$, telle que $f(x_0) = y_0$ et telle que

$$\forall x \in J, \quad h(f(x))f'(x) \quad = \quad g(x).$$

De plus, si $\tilde{f} : \tilde{J} \to I_2$ est une fonction définie sur un intervalle $x_0 \in \tilde{J} \subset I_1$ telle que $\tilde{f}(x_0) = y_0$ et telle que $h(\tilde{f}(x))\tilde{f}' = g(x)$ pour $x \in \tilde{J}$, alors

$$\forall x \in J \cap \tilde{J}, \quad f(x) = \tilde{f}(x).$$

Démonstration. Comme I_2 est un ouvert et comme $y_0 \in I_2$, on peut pour $y \in I_2$ définir la fonction

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}) := \int_{\boldsymbol{y}_0}^{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{d}\boldsymbol{s}.$$

Cette fonction est clairement continue, dérivable de dérivée $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0} \in \mathrm{Im}(\boldsymbol{H})$. De plus, comme $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{0}$ pour tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{I}_2$, on a que $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y})$ est strictement monotone sur $\boldsymbol{I}_2$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{H}^{-1} : \mathrm{Im}(\boldsymbol{H}) \to \boldsymbol{I}_2 \quad \text{existe et}$$

$$\left(\boldsymbol{H}^{-1}\right)' \quad = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

En plus, comme $\boldsymbol{H}$ est une bijection continue, $\mathrm{Im}(\boldsymbol{H})$ est elle-même un intervalle ouvert.

On définit maintenant une fonction $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{I}_1 \to \mathbb{R}$ sur l'intervalle ouvert $\boldsymbol{I}_1 \ni \boldsymbol{x}_0$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \quad := \quad \int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{d}\boldsymbol{t}.$$

Clairement, $\boldsymbol{G}$ est continue et $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$. Ainsi, la pré-image $\boldsymbol{G}^{-1}[\mathrm{Im}(\boldsymbol{H})]$ est un un ouvert non-vide, puisqu'on a $x_0 \in G^{-1}[\mathrm{Im}(H)]$.

On définit alors l'intervalle J comme le plus grand intervalle ouvert qui contient x_0 et tel que $J \subset G^{-1}[\mathrm{Im}(H)]$.

Sur cet intervalle on pose

$$f(x) \quad := \quad H^{-1}(G(x)).$$

Manifestement, $f(x_0) = y_0$. Par un calcul directe, on obtient

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

d'où on déduit que $f'h(f) = g$.

Soit maintenant $\tilde{f} : \tilde{J} \to I_2$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $x_0 \in \tilde{J}$, telle que $\tilde{f}'h(\tilde{f}) = g$ et telle que $\tilde{f}(x_0) = y_0$.
Alors, pour $x \in J \cap \tilde{J}$, $H(\tilde{f}(x)) = \int_{y_0}^{\tilde{f}(x)} h(s)ds$ est bien définie, puisque $\tilde{f}$ est continue et

que donc $\mathrm{Im}(\tilde{f})$ est contenue dans un intervalle ouvert de I_2 et contient y_0. Mais alors,

$$\begin{aligned} H(\tilde{f}(x)) &= \int_{y_0}^{\tilde{f}(x)} h(s)ds = \int_{x_0}^{x} h(\tilde{f}(t))\tilde{f}'(t)dt \quad (\text{ substitution } s = \tilde{f}(t)) \\ &= \int_{x_0}^{x} g(t)dt = \int_{x_0}^{x} h(f(t))f'(t)dt = \int_{y_0}^{f(x)} h(s)ds = H(f(x)), \end{aligned}$$

et comme H est une bijection, $\tilde{f}(x) = f(x)$. □

Fixons alors la **marche à suivre** pour résoudre l'EDOv.s.

$$h(y)y' = g, \quad f(x_0) = y_0,$$

sous les **hypothèses** que

- $g : I_1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_1.
- $h : I_2 \to \mathbb{R}^*$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_2.
- $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$.

1. Poser $G : I_1 \to \mathbb{R}$ par
$$G(x) \quad := \quad \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$
2. Poser $H : I_2 \to \mathbb{R}$ par
$$H(y) \quad := \quad \int_{y_0}^{y} h(s)ds.$$
3. Chercher le plus grand intervalle ouvert J tel que $x_0 \in J$ et $J \subset G^{-1}(\mathrm{Im}(H))$.
4. La solution $f(x)$ recherchée sera
$$J \ni x \quad \mapsto \quad f(x) \quad := \quad H^{-1}(G(x)).$$

Exemples.

1. Trouver la solution à l'EDOv.s.
$$\boxed{y' = \frac{\cos(y)}{x}}$$
telle que $y(1) = \pi$.

Commençons par la mettre sous forme séparée :

On identifie

$$g(x) = \qquad , \quad h(y) = \qquad \text{et}$$

Pour se placer dans les hypothèses de la marche à suivre, on doit choisir pour les intervalles I_1 et I_2 :

$$x_0 = 1 \in I_1, \quad \Rightarrow \quad I_1 =$$

$$y_0 = \pi \in I_2, \quad \Rightarrow \quad I_2 =$$

On suit maintenant les quatre points de la résolution :

1. Pour $x > 0$,

$$G(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \qquad\qquad .$$

2. Pour $y \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$,

$$H(y) = \int_\pi^y \frac{1}{\cos(s)}\,ds = \int_\pi^y \frac{\cos(s)}{\cos^2(s)}\,ds = \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad \quad \text{par éléments simples}$$

$$= \qquad\qquad = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)}\right).$$

3. Comme la dérivée de $H(y)$ est $\frac{1}{\cos(y)}$ et pour $y \in I_2 =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ celle-ci est toujours strictement négative, on a que $H(y)$ est strictement décroissante.

Un calcul de limite montre que

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^+} H(y) \quad = \quad \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)}\right) \quad = \qquad\qquad = \qquad$$

$$\lim_{y\to\frac{3\pi}{2}^-} H(y) \quad = \quad \lim_{y\to\frac{3\pi}{2}^-} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)}\right) \quad = \qquad\qquad = \qquad$$

On a donc que $\mathrm{Im}(H) = \mathbb{R}$ et donc

$$G^{-1}(\mathrm{Im}(H)) \quad = \qquad\qquad = \qquad$$

On a alors

$$x_0 = 1 \in \quad J \quad = \quad \mathbb{R}_+^*.$$

4. Sur $J = \mathbb{R}_+^*$ la solution à l'EDOv.s. est donnée par

$$f(x) \quad = \quad H^{-1}(G(x)).$$

Calculons alors $H^{-1}(x)$: pour $y \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, on a

$$x = H(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

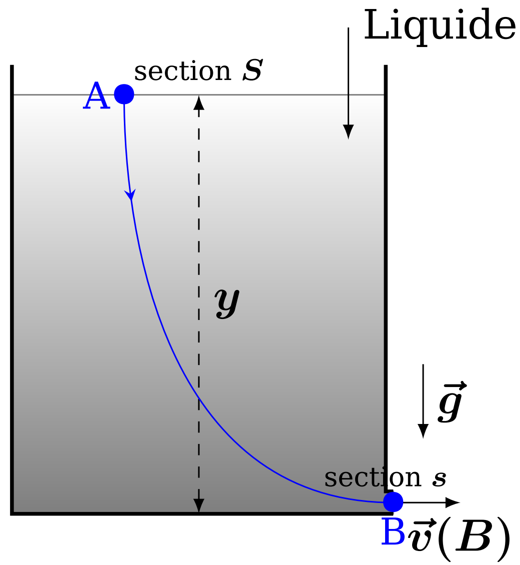
$$\Leftrightarrow \quad y = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}\right)$$

On a alors

$$\boxed{f(x) = H^{-1}(G(x)) = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right).}$$

2.

Considérons un récipient cylindrique de section S contenant de l'eau qui peut s'échapper par une petite ouverture de section s située en bas de ce récipient Notons $y(t)$ la hauteur dans le récipient de l'eau à l'instant t.
Nous allons établir une équation différentielle pour $y(t)$.



On suppose g constant le long du récipient et on suppose que l'eau est incompressible et parfaite, de sorte que sa densité est constante et qu'on peut négliger les effets de la viscosité. De plus, l'écoulement de l'eau sera stationnaire et $S \gg s$. Considérons un petit volume d'eau se dèplaçant sur une ligne de courant (en bleu sur la figure).
Le théorème de Bernouilli exprime alors la conservation de la densité d'énergie :

$$p_A + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2(A,t) = p_B + \frac{1}{2}\rho v^2(B,t),$$

où

- p_A, p_B est la pression aux endroits A et B respectivement, qu'on supposera égales à la pression atmosphérique.
- $v(A,t)$ et $v(B,t)$ sont les vitesses en valeurs absolues à l'instant t et aux endroits A et B respectivement. En A, cette vitesse vaut manifestement

$$v(A,t) = |\frac{d}{dt}y(t)| \equiv |\dot{y}| \quad = -\dot{y}.$$

Par conservation de la masse, on doit avoir

$$\rho\, S\, v(A,t) \quad = \quad \rho\, s\, v(B,t).$$

Ainsi, après simplifications, Bernouilli nous dit que

$$\begin{aligned} gy + \frac{1}{2}(\dot{y})^2 &\quad = \quad \frac{1}{2}(\dot{y}\frac{S}{s})^2 \\ \Leftrightarrow \quad 2gy &\quad = \qquad\qquad = \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\dot{y})^2}{y} \quad = \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad |\dot{y}|\frac{1}{\sqrt{y}} = k,$$

avec $k^2 = \frac{2gs^2}{S^2-s^2}$.
Pour enlever la valeur absolue on va faire le choix physique de prendre $\dot{y} < 0$. Cela revient à supposer que le niveau d'eau descend avec le temps. Prendre $\dot{y} > 0$ reviendrait à dire que le niveau d'eau monte avec le temps, ou encore descend avec le temps renversé. On a donc comme EDO :

$$\boxed{\dot{y}\frac{1}{\sqrt{y}} \quad = \quad -k, \quad y(0) = y_0 > 0,\ t_0 = 0.}$$

On vérifie les hypothèses de la marche à suivre avec

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) \quad = \qquad$.
- $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^*$, $h(y) \quad = \qquad$.
- $(0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

On peut alors tranquillement appliquer la démarche à suivre :

1. On pose

$$\mathbb{R} \ni t \quad \mapsto \quad G(t) \quad = \quad \int_0^t g(s)ds \quad = $$

2. On calcule

$$\mathbb{R}_+^* \ni y \quad \mapsto \quad H(y) \quad = \quad \int_{y_0}^{y} h(u)du \quad = $$

3. On calcule

$$\mathrm{Im}(H) = \qquad \Rightarrow \quad G^{-1}(\mathrm{Im}(H)) \quad = \quad]-\infty, \frac{2\sqrt{y_0}}{k}[.$$

   Ceci est déjà un intervalle ouvert qui possède $t_0 = 0$ comme élément. On pose alors

$$J \quad = \quad]-\infty, \frac{2\sqrt{y_0}}{k}[.$$

4. Sur J, la solution à notre EDOv.s. sera donnée par

$$y(t) \quad = \quad H^{-1}(G(t)) \quad \Leftrightarrow \quad H(y(t)) \quad = \quad G(t)$$

$$\Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) \quad = \quad \left(\sqrt{y_0} - \frac{k}{2}t\right)^2 .$$

Ainsi, le récipient se vide en un temps

$$\tau \quad = \quad \sqrt{y_0}\frac{2}{k} \quad = \quad \sqrt{\frac{2y_0}{g}}\frac{\sqrt{S^2 - s^2}}{s}.$$

3. $\boxed{\text{Une EDOv.s. peut être cachée.}}$

Considérons l'équation différentielle

$$xy' = y + \cos^2(\frac{y}{x}), \quad y(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Telle quelle, ceci n'est pas une EDOv.s. Mais on peut la transformer pour la rendre à variable séparée.

Notons d'abord que l'ensemble de définition de cette équation est $\mathbb{R}^*$. Sur cet ensemble, on est en droit de poser

$$z(x) \quad := \quad \frac{y(x)}{x},$$

On aura donc

$$y = xz \quad \Rightarrow$$

et l'équation différentielle devient

$$x(z + xz') \quad = \quad xz + \cos^2(z), \quad z(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \qquad z(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\mathbb{R}^*} \qquad z(1) = \frac{\pi}{4}.$$

On retrouve donc une EDOv.s. avec

$$h(z) = \qquad g(x) = \qquad x_0 = 1, \quad y_0 = \frac{\pi}{4}.$$

On applique alors tranquillement la démarche à suivre :

1. On pose

$$\mathbb{R}_+^* \ni x \quad \mapsto \quad G(x) \quad = \quad \int_1^x \frac{1}{t^2} dt \quad =$$

2. On calcule

$$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ni y \quad \mapsto \quad H(y) \quad = \quad \int_{\pi/4}^{y} \frac{1}{\cos^2(s)} ds \quad =$$

3. On calcule

$$\mathrm{Im}(H) = \qquad \Rightarrow \quad G^{-1}(\mathrm{Im}(H)) \quad =$$

Ceci est déjà un intervalle ouvert qui possède $x_0 = 1$ comme élément. On pose alors

$$J \quad = \quad \mathbb{R}_+^*.$$

4. Sur J, la solution à notre EDOv.s. sera donnée par

$$y(t) \quad = \quad H^{-1}(G(t)) \quad \Leftrightarrow \quad H(y(t)) \quad = \quad G(t)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) \quad = \quad \arctan(2 - \frac{1}{x}).$$

Remarque. On peut observer, que si on connait les conditions initiales à un moment donné t_0 et si les lois de la nature peuvent se mettre sous une forme d'équation différentielle, alors, l'évolution d'un système est en principe univoque et connu pour tout temps t. Ceci est une formulation du **déterminisme**, c'est-à-dire que le future, ainsi que le passé, est complètement déterminé par le présent. En citant Laplace :

> "Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle et l'avenir, comme le passé serait présent à ses yeux."

L'avènement au ***XX***ème siècle de la théorie du chaos a quelque peu ébranlé ce système de pensée. La mécanique quantique semble l'avoir rendu définitivement obsolète et à ce jour, il semble plutôt qu'on ne reviendra plus jamais à un déterminisme absolu en science.