



EPFL

1

Enseignant: Bossoney
Analyse 2 - CMS
21 juin 2024
Durée : 105 minutes

Crittin Loïc Maxime

SCIPER: 373127

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bisection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \tan x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y & \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Formules de bisection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproques:

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \operatorname{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{Arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\operatorname{Arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{Artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\operatorname{Arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$



Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Mettre sous la forme $a + ib$ les nombres suivants:

Question 1 (1 point)

$$2 + i + (1 + i)(2 - i).$$

☐ $5 - 3i.$

☐ $5 + 3i.$

☒ $5 + 2i.$

☐ $4 + i.$

Solution: Distribuer le produit sur la somme.

Question 2 (2 point)

$$\frac{1}{2+3i}$$

☐ $\frac{2+3i}{\sqrt{13}}.$

☒ $\frac{2-3i}{13}.$

☐ $\frac{2+3i}{13}.$

☐ $\frac{2-3i}{\sqrt{13}}.$

Solution: $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$

**Enoncé**

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Question 3 (2 points) La racine troisième $\sqrt[3]{z}$ de $z = 8(1 + i)$ est

☐ $\sqrt[3]{8(1 + i)} = 2 \exp(i \frac{\pi + 4k}{12}), \quad k = 0, 1, 2.$

☒ $\sqrt[3]{8(1 + i)} = 2 \sqrt[6]{2} \exp(i \frac{(1+8k)\pi}{12}), \quad k = 0, 1, 2.$

☐ $\sqrt[3]{8(1 + i)} = 2 \sqrt[3]{2} \exp(i \frac{(1+4k)\pi}{12}), \quad k = 0, 1, 2.$

☐ $\sqrt[3]{8(1 + i)} = 2 \sqrt[3]{2} \exp(i \frac{(1+8k)\pi}{12}), \quad k = 0, 1, 2.$

Solution: Appliquer la formule $\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} \exp(i \frac{\varphi}{n} + i \frac{2\pi k}{n}), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$

Question 4 (2 points) La forme polaire de $z = 3 - i4$ est

☒ $z = 5 \exp(i\varphi)$ avec $\varphi = -\arccos(\frac{3}{5}).$

☐ $z = 5 \exp(i\varphi)$ avec $\varphi = -\arccos(\frac{4}{5}).$

☐ $z = 5 \exp(i\varphi)$ avec $\varphi = \arctan(\frac{4}{5}).$

☐ $z = 5 \exp(i\varphi)$ avec $\varphi = \arccos(-\frac{3}{5}).$

Solution: Formule des formes polaires $z = |z| \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z)) \exp(i \arccos(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}))$.

**Enoncé**

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit le polynôme $P(X) = X^n - 1$.

Question 5 (2 points) Le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par X , $(X - 1)$ et $(X - 2)$ est respectivement

☐ X , $X - (-1)^2$ et $X - (-2)^n$

☐ -1 , $(-1)^n - 1$ et $(-2)^n - 1$.

☒ -1 , 0 et $2^n - 1$.

☐ X , $X - 1$ et $(-2)^n - 1$

Solution: Calculer $P(r)$, où r est la racine du polynôme diviseur.

Question 6 (2 points) Le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par X^2 , $(X - 1)^2$ et $(X - 2)^2$ est respectivement

☐ $2X$, $2(X - 1)$ et $2n(X - 2) + (1 - n)2^n$.

☐ $X^{n-2} - 1$, $nX^{n-1} - n$ et $n2^{n-1}X^{n-2} + (1 - n)2^{n-1} - 1$

☐ -1 , $(n - 1)X - n$ et $n(-2)^{n-1}X + (1 - n)(-2)^n - 1$

☒ -1 , $nX - n$ et $n2^{n-1}X + (1 - n)2^n - 1$.

Solution: Polynôme de Taylor $P_{P,r}^1(X)$ pour les racines $0, 1$ et 2 .



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: Cette question est notée sur 4 points.

☐	.	☐	.	☐	.	☐	.	☐	.
☒	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4

Trouver le polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, vérifiant les conditions suivantes:

- $\deg(P(X)) = 3$.
- $P(2i) = 0$.
- $P(0) = P(1) = 1$.

Solution

Puisque $P(X)$ est à coefficients réels, et que $P(2i) = 0$, on a aussi que $P(-2i) = 0$.

Donc, $P(X)$ se factorise par $(X - 2i)(X + 2i) = X^2 + 4$.

Comme $P(X)$ est de degré 3, on peut donc l'écrire comme

$$P(X) = (X^2 + 4)(aX + b).$$

On détermine les coefficients réels a et b par les deux dernières conditions:

$$\begin{cases} P(0) = 1 \Rightarrow (4)(b) = 1, \\ P(1) = 1 \Rightarrow (5)(a + b) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{4}, \\ a = \frac{-1}{20}. \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$P(X) = \frac{1}{20}(X^2 + 4)(-X + 5) = -\frac{1}{20}X^3 + \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{5}X + 1.$$



Question 8: Cette question est notée sur 5 points.

.5 .5 .5 .5 .5

0

1

2

3

4

5

(a) Trouver les solutions générales à l'EDOL

$$y' + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

(b) Trouver la solution à l'EDOL ci-dessus vérifiant les conditions initiales $x_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = 2$.

Solution

(a) Comme il s'agit d'une EDOL1 inhomogène, on commence par trouver les solutions générales sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Sur cet ensemble, la partie homogène s'écrit

$$y' + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}y = 0,$$

dont une solution est

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}dt\right) = \begin{cases} \exp(\text{Arcosh}(x_0) - \text{Arcosh}(x)) & \text{si } x_0, x > 1, \\ \exp(\text{Arcosh}(-x) - \text{Arcosh}(-x_0)) & \text{si } x_0, x < -1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \exp(\ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})) & \text{si } x_0, x > 1, \\ \exp(\ln(-x + \sqrt{x^2 - 1}) - \ln(-x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1})) & \text{si } x_0, x < -1. \end{cases} = \begin{cases} \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x_0, x > 1, \\ \frac{-x + \sqrt{x^2 - 1}}{-x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}} & \text{si } x_0, x < -1. \end{cases}$$

On peut trouver une solution particulière par la variation de la constante. Ou bien, sachant que toute solution à l'EDOL1 sur un intervalle ouvert s'écrit comme $\varphi_p + \lambda\varphi_h$, où φ_p est une solution particulière et φ_h est une solution homogène, on peut aussi bien deviner cette dernière.

On devine que $\varphi_p(x) = 1$ en est une, pour $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. On trouve alors que l'ensemble solution est

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \lambda \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x_0, x > 1, \\ 1 + \mu \frac{-x + \sqrt{x^2 - 1}}{-x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}} & \text{si } x_0, x < -1. \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(b) Puisque $\sqrt{2} > 1$, on a unicité de la solution dans l'intervalle $I =]1, \infty[$. On doit donc trouver la valeur de λ , telle que

$$y(\sqrt{2}) = 2 \iff 1 + \lambda \frac{\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{2}^2 - 1}}{\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{2}^2 - 1}} \iff \lambda = 1.$$

On a donc

$$\forall x > 1, \quad y(x) = 1 + \frac{\sqrt{2} + 1}{x + \sqrt{x^2 - 1}},$$

ou, si $|x| > 1$:

$$y(x) = \begin{cases} y(x) = 1 + \frac{\sqrt{2} + 1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x > 1, \\ 1 + \mu(-x + \sqrt{x^2 - 1}) & \text{si } x < -1. \end{cases}$$



+1/8/53+

