Enseignant: Bossoney
Analyse 2 - CMS
21 juin 2024
Durée : 105 minutes

1

Crittin Loïc Maxime

SCIPER : **373127**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproques:

$$\mathrm{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \mathrm{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad \mathrm{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\mathrm{Arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{Arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{Artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{Arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Mettre sous la forme $a + ib$ les nombres suivants:

Question 1 (1 point)
$2 + i + (1 + i)(2 - i)$.

- [ ] $5 - 3i$.
- [ ] $5 + 3i$.
- [ ] $5 + 2i$.
- [ ] $4 + i$.

Solution: Distribuer le produit sur la somme.

Question 2 (2 point)
$\frac{1}{2+3i}$

- [ ] $\frac{2+3i}{\sqrt{13}}$.
- [ ] $\frac{2-3i}{13}$.
- [ ] $\frac{2+3i}{13}$.
- [ ] $\frac{2-3i}{\sqrt{13}}$.

Solution: $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Question 3 (2 points) La racine troisième $\sqrt[3]{z}$ de $z = 8(1+i)$ est

- ☐ $\sqrt[3]{8(1+i)} = 2\exp(i\frac{\pi+4k}{12}), \quad k = 0, 1, 2.$
- ☐ $\sqrt[3]{8(1+i)} = 2\sqrt[6]{2}\exp(i\frac{(1+8k)\pi}{12}), \quad k = 0, 1, 2.$
- ☐ $\sqrt[3]{8(1+i)} = 2\sqrt[3]{2}\exp(i\frac{(1+4k)\pi}{12}), \quad k = 0, 1, 2.$
- ☐ $\sqrt[3]{8(1+i)} = 2\sqrt[3]{2}\exp(i\frac{(1+8k)\pi}{12}), \quad k = 0, 1, 2.$

Solution: Appliquer la formule $\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\exp(i\frac{\varphi}{n} + i\frac{2\pi k}{n})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Question 4 (2 points) La forme polaire de $z = 3 - i4$ est

- ☐ $z = 5\exp(i\varphi)$ avec $\varphi = -\text{arcos}(\frac{3}{5})$.
- ☐ $z = 5\exp(i\varphi)$ avec $\varphi = -\text{arcos}(\frac{4}{5})$.
- ☐ $z = 5\exp(i\varphi)$ avec $\varphi = \text{artan}(\frac{4}{5})$.
- ☐ $z = 5\exp(i\varphi)$ avec $\varphi = \text{arcos}(-\frac{3}{5})$.

Solution: Formule des formes polaires $z = |z|\text{sgn}(\text{Im}(z))\exp(i\text{arcos}(\frac{\text{Re}(z)}{|z|}))$.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit le polynôme $P(X) = X^n - 1$.

Question 5 (2 points) Le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par X, $(X-1)$ et $(X-2)$ est respectivement

- ☐ $X, \quad X-(-1)^2 \quad \text{et} \quad X-(-2)^n$
- ☐ $-1, \quad (-1)^n - 1 \quad \text{et} \quad (-2)^n - 1.$
- ☐ $-1, \quad 0 \quad \text{et} \quad 2^n - 1.$
- ☐ $X, \quad X-1 \quad \text{et} \quad (-2)^n - 1$

Solution: Calculer $P(r)$, où r est la racine du polynôme diviseur.

Question 6 (2 points) Le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par X^2, $(X-1)^2$ et $(X-2)^2$ est respectivement

- ☐ $2X, \quad 2(X-1) \quad \text{et} \quad 2n(X-2)+(1-n)2^n.$
- ☐ $X^{n-2}-1, \quad nX^{n-1}-n \quad \text{et} \quad n2^{n-1}X^{n-2}+(1-n)2^{n-1}-1$
- ☐ $-1, \quad (n-1)X-n \quad \text{et} \quad n(-2)^{n-1}X+(1-n)(-2)^n-1$
- ☐ $-1, \quad nX-n \quad \text{et} \quad n2^{n-1}X+(1-n)2^n-1.$

Solution: Polynôme de Taylor $P^1_{P,r}(X)$ pour les racines $0, 1$ et 2.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Trouver le polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, vérifiant les conditions suivantes:

- $\deg(P(X)) = 3$.
- $P(2i) = 0$.
- $P(0) = P(1) = 1$.

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

(a) Trouver les solutions générales à l'EDOL

$$y' + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

(b) Trouver la solution à l'EDOL ci-dessus vérifiant les conditions initiales $x_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = 2$.