EPFL

Enseignant: Bossoney
Analyse 2 - CMS
15 juin 2023
Durée : 105 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
Soit $y' = hy + f$ une EDOL1 avec $f \neq 0$ et soient y_1, y_2 deux solutions distinctes à cette équation. Alors

- ☐ Toute solution à l'EDOL1 s'écrit comme $\lambda(y_1 + y_2) + y_2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ☐ Toute solution à l'EDOL1 s'écrit comme $y_1 + \lambda y_2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ☐ Toute solution à l'EDOL1 s'écrit comme $\mu y_1 + \lambda y_2$ avec $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.
- ■ Toute solution à l'EDOL1 s'écrit comme $\lambda(y_1 - y_2) + y_1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 2 (2 points)
Tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur à 3 est réductible dans $\mathbb{R}[X]$. On en déduit que

- ☐ Un tel polynôme $P(X)$ doit donc avoir au moins une racine imaginaire.
- ■ Il se peut qu'un tel polynôme $P(X)$ n'ait pas de racines réelles du tout.
- ☐ Un tel polynôme $P(X)$ doit donc avoir au moins une racine réelle.
- ☐ Il se peut qu'un tel polynôme $P(X)$ n'ait pas de racines complexes.

Question 3 (2 points)
En sachant que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, on en déduit que

- ■ $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$
- ☐ $\cos 3\theta = -3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$
- ☐ $\cos 3\theta = \cos^3\theta + 3\sin^2\theta\cos\theta$
- ☐ $\cos 3\theta = \cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 4: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5

On considère le polynome

$$P(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^N = \sum_{k=0}^{N} X^k.$$

(a) Calculer $(1-X)P(X)$.

(b) Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

(c) Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ pour $N = 7$.

Solution

(a) Clairement, $(1-X)P(X) = 1 - X^{N+1}$.

(b) D'après le point précédent, les racines de $P(X)$ sont

$$\sqrt[N+1]{1} \setminus \{1\} = \{e^{i\frac{2\pi}{N+1}k} \ : \ k = 1, \ldots, N\}.$$

Ainsi,

$$P(X) = \prod_{k=1}^{N} (X - e^{i\frac{2\pi}{N+1}k}).$$

(c) Pour trouver les facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, il faut jumeler les racines complexes et complexes conjuguées dans la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$. Or, $e^{i\frac{2\pi}{N+1}k}$ est une racine réelle seulement si $2k = N+1$. Pour les autres valeurs de k, on a $(X - e^{i\frac{2\pi}{N+1}k})(X - e^{-i\frac{2\pi}{N+1}k}) = X^2 - 2X\cos(\frac{2\pi}{N+1}k) + 1$. Ainsi,

$$P(X) = \prod_{k=1}^{N/2} \left(X^2 - 2X\cos(\frac{2\pi}{N+1}k) + 1 \right) \quad \text{si } N \text{ est pair,}$$

$$P(X) = (X+1) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(X^2 - 2X\cos(\frac{2\pi}{N+1}k) + 1 \right) \quad \text{si } N \text{ est impair.}$$

Pour $N = 7$ on a donc

$$P(X) = (X+1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

Question 5: *Cette question est notée sur 5 points.*

0   .5   1   .5   2   .5   3   .5   4   .5   5

Trouver la solution à l'EDOLv.s.

$$y' = \frac{\cos(y)}{x}$$

qui vérifie

(a) $y(1) = 0$

(b) $y(1) = \pi$

(Indications: $\frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}$; $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)$.)

Solution Appliquant la méthode de la résolution des EDOLv.s., on trouve

$$\begin{aligned}
H(y) &= \int_{Y_0}^{y} \frac{1}{\cos(t)}dt = \int_{Y_0}^{y} \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)}dt \\
&= \int_{Y_0}^{y} \frac{d\sin(t)}{1-\sin^2(t)} = \int_{\sin(Y_0)}^{\sin(y)} \frac{1}{1-u^2}du \\
&= \int_{\sin(Y_0)}^{\sin(y)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)du \\
&= \frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)}) - \frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin(Y_0)}{1-\sin(Y_0)}), \\
\mathrm{Def}_H &= \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \,:\, n \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathrm{im}_H = \mathbb{R}; \\
F(x) &= \int_{X_0}^{x} \frac{1}{t}dt = \ln(|x|) - \ln(|X_0|), \\
\mathrm{Def}_F &= \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{im}_F = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comme $X_0 = 1$ et $\sin(Y_0) = 0$, on doit inverser $H(y) = F(x)$, i.e. $\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)}) = \ln(|x|)$, ou encore $\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)} = x^2$. On trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)} = x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 1+\sin(y) = (1-\sin(y))x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(y) = \frac{x^2-1}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

(a) Si $y(1) = 0$, alors $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on trouve comme solution

$$y(x) = \mathrm{Arcsin}(\frac{x^2-1}{x^2+1}) \quad \text{pour } x \in]0, \infty[.$$

(b) Si $y(1) = \pi$, alors $y \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et on trouve comme solution

$$y(x) = \pi - \mathrm{Arcsin}(\frac{x^2-1}{x^2+1}) \quad \text{pour } x \in]0, \infty[.$$

Question 6: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois continûment dérivables, qui vérifient

$$f'(x) + f(-x) = e^x.$$

(que ce passe-t-il si on dérive une fois cette équation?)
Solution On a

$$f'(x) + f(-x) = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f'(x) + f(-x) = e^x \\ f''(x) - f'(-x) = e^x \end{cases}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f'(x) + f(-x) = e^x \\ f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x}. \end{cases}$$

La deuxième équation est maintenant une EDOL2c.c. qui a comme solutions homogènes $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$. Une solution particulière et vite trouvée: $f_P = \cosh(x)$. Toute solution à cette EDOL2c.c. est donc de la forme

$$f(x) = \cosh(x) + \mu \cos(x) + \lambda \sin(x).$$

En insérant cela dans la première équation, on trouve

$$\begin{aligned} e^x &= \sinh(x) + \lambda \cos(x) - \mu \sin(x) + \cosh(-x) + \lambda \sin(-x) + \mu \cos(-x) \\ &= \cosh(x) + \sinh(x) + \cos(x)(\mu + \lambda) - \sin(x)(\mu + \lambda). \end{aligned}$$

On en conclut que $\mu = -\lambda$ et les fonctions recherchées sont

$$f(x) = \cosh(x) + \lambda \left(\sin(x) - \cos(x) \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$