EPFL

Enseignant: Bossoney
Analyse 2 - CMS
12 juin 2024
Durée : 105 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x \,\cos y + \cos x \,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x \,\cos y - \sin x \,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x \,\cosh y + \cosh x \,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x \,\cosh y + \sinh x \,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproques:

$$\mathrm{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \mathrm{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad \mathrm{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}\, x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\mathrm{Arsinh}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{Arcosh}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{Artanh}x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{Arcoth}x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Enoncé

Question 1 (1 point) Résoudre $z^2 + 4z + 8 = 0$.

- [ ] $2 - i$ et $2 + i$.
- [ ] $2 + 2i$ et $2 - 2i$.
- [x] $-2 + 2i$ et $-2 - 2i$.
- [ ] $4 + 2i$ et $4 - 2i$.

Solution: Compléter le carré.

Question 2 (2 point)
Mettre sous la forme $a + ib$ la fraction $\frac{1+2i}{3-5i}$

- [ ] $\frac{11+7i}{\sqrt{34}}$.
- [x] $\frac{-7+11i}{34}$.
- [ ] $\frac{11+7i}{34}$.
- [ ] $\frac{7-11i}{\sqrt{34}}$.

Solution: $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Question 3 (2 points) Trouver les racines de $1+z^2+z^4+z^6$.

- ☐ $\exp(i\frac{(k+2)\pi}{4})$, $\quad k=1,2,3,5,6,7.$
- ☒ $\exp(i\frac{k\pi}{4})$, $\quad k=1,2,3,5,6,7.$
- ☐ $\exp(i\frac{k\pi}{4})$, $\quad k=0,1,2,3,4,5,6,7.$
- ☐ $\exp(i\frac{(k+4)\pi}{4})$, $\quad k=1,2,3,5,6,7.$

Solution: Série géométrique de raison z^2. Appliquer la formule $\sqrt[n]{z}=|z|^{1/n}\exp(i\frac{\varphi}{n}+i\frac{2\pi k}{n})$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Enlever les valeurs interdites $z=\pm1$.

Question 4 (2 points) La forme polaire de $z=\cos(\frac{\pi}{4})-i\sin(\frac{\pi}{3})$ est

- ☒ $z=\frac{\sqrt{5}}{2}\exp(i\varphi)$ avec $\varphi=-\arccos(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$.
- ☐ $z=5\exp(i\frac{\pi}{4})$.
- ☐ $z=5\exp(-i\frac{\pi}{3})$.
- ☐ $z=\frac{5}{\sqrt{2}}\exp(i\varphi)$ avec $\varphi=-\arccos(\frac{2}{5})$.

Solution: Formule des formes polaires $z=|z|\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z))\exp(i\arccos(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}))$.

Enoncé

Question 5 (2 points) Si le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)(X-2)$ est $X-1$, alors, le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)^2$ est:

- [ ] $X-1$ aussi.
- [x] Cela dépends du polynôme $P(X)$.
- [ ] $X-2$.
- [ ] $\frac{1}{X-1}$.

Solution: Deux exemples différents: $P(X)=(X-1)^2(X-2)+(X-1)$ et $P(X)=(X-1)(X-2)+(X-1)$.

Question 6 (2 points) Soit un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Alors:

- [ ] Les racines de $P(X)^2$ sont les produits de celles de $P(X)$ avec leur complexes conjuguées.
- [x] Les racines de $P(X)^2$ sont celles de $P(X)$ et leur complexes conjuguées.
- [ ] Les racines de $P(X)^2$ sont les carrées de celles de $P(X)$.
- [ ] Les racines de $P(X)^2$ sont exactement les mêmes que celles de $P(X^2)$.

Solution: $P(X)^2 \in \mathbb{R}[x]$ possède les mêmes facteurs que $P(X)$, donc les mêmes racines et elle arrivent par paires conjuguées,

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Trouver l'ensemble des polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient

- $\deg(P(X)) = 4$.
- $P(X)$ est normalisé.
- La division avec reste de $P(X)$ par $X - i$ est 2.
- $P'(i) = 1$.

Solution Puisque $P(X)$ est de degé 4, on peut l'écrire comme son polynôme de Taylor autour de $x_0 = i$:

$$P(X) = a + b(X-i) + c(X-i)^2 + d(X-i)^3 + e(X-i)^4.$$

Comme $P(X)$ est normalisé on doit choisir $e = 1$.
Comme la division avec reste de $P(X)$ par $X - i$ est 2 on doit choisir $a = 2$.
Comme $P'(i) = 1$, on doit prendre $b = 1$.
L'ensemble des polynômes recherché est donc

$$S = \{2 + (X-i) + c(X-i)^2 + d(X-i)^3 + (X-i)^4 \,|\, c, d \in \mathbb{C}\},$$

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5

(a) Trouver les solutions générales à l'EDOL

$$\frac{1}{\ln(x)}y' + \frac{2}{x}y = 2 + \frac{1}{\ln(x)},$$

sachant que $y(x) = x$ en est une solution particulière.

(b) Trouver la solution à l'EDOL ci-dessus vérifiant les conditions initiales $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

(c) Trouver la solution à l'EDOL ci-dessus vérifiant les conditions initiales $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 1$.

Solution

(a) Commençons par poser l'ensemble de définition de cette équation: $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
Réécrivons cette équation pour obtenir la forme $y' + py = q$:

$$y' + \frac{2\ln(x)}{x}y = 2\ln(x) + 1.$$

Il s'agit d'une EDOL1 inhomogène, on commence par trouver les solutions pour la partie homogène:

$$y' + \frac{2\ln(x)}{x}y = 0,$$

dont la solution générale est

$$\begin{aligned} y(x) = \exp(-\int_{x_0}^{x}\frac{2\ln(t)}{t}dt) &= \exp(\ln^2(x_0) - \ln^2(x)) \\ &= (x_0)^{\ln(x_0)}x^{-\ln(x)}. \end{aligned}$$

On peut trouver une solution particulière par la variation de la constante.
Ou bien, sachant que toute solution à l'EDOL1 s'écrira sur tout intervalle ouvert comme $\varphi_p + \lambda\varphi_h$, où φ_p est une solution particulière. Puisque $y(x) = x$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on peut trouver alors que l'ensemble solution est

$$y(x) = x + \lambda(x_0)^{\ln(x_0)}x^{-\ln(x)}.$$

(b) Puisque $2 > 1$, on a unicité de la solution dans l'intervalle $I =]1, \infty[$. On doit donc trouver la valeur de λ, telle que

$$y(2) = 1 \iff 1 = 2 + \lambda(2)^{\ln(2)}2^{-\ln(2)} \iff \lambda = -1.$$

On a donc, en pour $x \in]1, \infty[$,

$$y(x) = x - (2)^{\ln(2)}x^{-\ln(x)}$$

(c) Puisque $\frac{1}{2} < 1$, on a unicité de la solution dans l'intervalle $I =]0, 1[$. On doit donc trouver la valeur de λ, telle que

$$y(0.5) = 1 \iff 1 = .5 + \lambda(0,5)^{-\ln(2)}(0,5)^{\ln(2)} \iff \lambda = \frac{1}{2}.$$

On a donc, en pour $x \in]0, 1[$,

$$y(x) = x + (\frac{1}{2})^{1-\ln(2)}x^{-\ln(x)}$$

EPFL

Enseignant: Bossoney
Analyse 2 - CMS
12 juin 2024
Durée : 105 minutes

2

Marianne

SCIPER : **888888**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproques:

$$\mathrm{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \mathrm{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad \mathrm{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\mathrm{Arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{Arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{Artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{Arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Enoncé

Question 1 (2 point)
Mettre sous la forme $a + ib$ la fraction $\frac{1+2i}{3-5i}$

- ☐ $\frac{11+7i}{\sqrt{34}}$.
- ☐ $\frac{7-11i}{\sqrt{34}}$.
- ☐ $\frac{11+7i}{34}$.
- ■ $\frac{-7+11i}{34}$.

Solution: $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Question 2 (1 point) Résoudre $z^2 + 4z + 8 = 0$.

- ☐ $4 + 2i$ et $4 - 2i$.
- ■ $-2 + 2i$ et $-2 - 2i$.
- ☐ $2 + 2i$ et $2 - 2i$.
- ☐ $2 - i$ et $2 + i$.

Solution: Compléter le carré.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Question 3 (2 points) La forme polaire de $z = \cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{3})$ est

- ☐ $z = 5\exp(-i\frac{\pi}{3})$.
- ☐ $z = \frac{5}{\sqrt{2}}\exp(i\varphi)$ avec $\varphi = -\arccos(\frac{2}{5})$.
- ■ $z = \frac{\sqrt{5}}{2}\exp(i\varphi)$ avec $\varphi = -\arccos(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$.
- ☐ $z = 5\exp(i\frac{\pi}{4})$.

<u>Solution:</u> Formule des formes polaires $z = |z|\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z))\exp(i\mathrm{arcos}(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}))$.

Question 4 (2 points) Trouver les racines de $1 + z^2 + z^4 + z^6$.

- ☐ $\exp(i\frac{k\pi}{4})$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
- ■ $\exp(i\frac{k\pi}{4})$, $k = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.
- ☐ $\exp(i\frac{(k+4)\pi}{4})$, $k = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.
- ☐ $\exp(i\frac{(k+2)\pi}{4})$, $k = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.

<u>Solution:</u> Série géométrique de raison z^2. Appliquer la formule $\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\exp(i\frac{\varphi}{n} + i\frac{2\pi k}{n})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Enlever les valeurs interdites $z = \pm 1$.

Enoncé

Question 5 (2 points) Si le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)(X-2)$ est $X-1$, alors, le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)^2$ est:

- ☐ $X-2$.
- ☐ $\frac{1}{X-1}$.
- ■ Cela dépends du polynôme $P(X)$.
- ☐ $X-1$ aussi.

Solution: Deux exemples différents: $P(X)=(X-1)^2(X-2)+(X-1)$ et $P(X)=(X-1)(X-2)+(X-1)$.

Question 6 (2 points) Soit un polynôme $P(X)\in\mathbb{R}[X]$. Alors:

- ☐ Les racines de $P(X)^2$ sont exactement les mêmes que celles de $P(X^2)$.
- ☐ Les racines de $P(X)^2$ sont les carrées de celles de $P(X)$.
- ☐ Les racines de $P(X)^2$ sont les produits de celles de $P(X)$ avec leur complexes conjuguées.
- ■ Les racines de $P(X)^2$ sont celles de $P(X)$ et leur complexes conjuguées.

Solution: $P(X)^2\in\mathbb{R}[x]$ possède les mêmes facteurs que $P(X)$, donc les mêmes racines et elle arrivent par paires conjuguées,

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5

■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Trouver l'ensemble des polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient

- $\deg(P(X)) = 4$.
- $P(X)$ est normalisé.
- La division avec reste de $P(X)$ par $X - i$ est 2.
- $P'(i) = 1$.

Solution Puisque $P(X)$ est de degé 4, on peut l'écrire comme son polynôme de Taylor autour de $x_0 = i$:

$$P(X) = a + b(X - i) + c(X - i)^2 + d(X - i)^3 + e(X - i)^4.$$

Comme $P(X)$ est normalisé on doit choisir $e = 1$.
Comme la division avec reste de $P(X)$ par $X - i$ est 2 on doit choisir $a = 2$.
Comme $P'(i) = 1$, on doit prendre $b = 1$.
L'ensemble des polynômes recherché est donc

$$S = \{2 + (X - i) + c(X - i)^2 + d(X - i)^3 + (X - i)^4 \mid c, d \in \mathbb{C}\},$$

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

(a) Trouver les solutions générales à l'EDOL

$$\frac{1}{\ln(x)}y' + \frac{2}{x}y = 2 + \frac{1}{\ln(x)},$$

sachant que $y(x) = x$ en est une solution particulière.

(b) Trouver la solution à l'EDOL ci-dessus vérifiant les conditions initiales $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

(c) Trouver la solution à l'EDOL ci-dessus vérifiant les conditions initiales $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 1$.

Solution

(a) Commençons par poser l'ensemble de définition de cette équation: $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
Réécrivons cette équation pour obtenir la forme $y' + py = q$:

$$y' + \frac{2\ln(x)}{x}y = 2\ln(x) + 1.$$

Il s'agit d'une EDOL1 inhomogène, on commence par trouver les solutions pour la partie homogène:

$$y' + \frac{2\ln(x)}{x}y = 0,$$

dont la solution générale est

$$\begin{aligned} y(x) = \exp(-\int_{x_0}^{x} \frac{2\ln(t)}{t}dt) &= \exp(\ln^2(x_0) - \ln^2(x)) \\ &= (x_0)^{\ln(x_0)}x^{-\ln(x)}. \end{aligned}$$

On peut trouver une solution particulière par la variation de la constante.
Ou bien, sachant que toute solution à l'EDOL1 s'écrira sur tout intervalle ouvert comme $\varphi_p + \lambda\varphi_h$, où φ_p est une solution particulière. Puisque $y(x) = x$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on peut trouver alors que l'ensemble solution est

$$y(x) = x + \lambda(x_0)^{\ln(x_0)}x^{-\ln(x)}.$$

(b) Puisque $2 > 1$, on a unicité de la solution dans l'intervalle $I =]1, \infty[$. On doit donc trouver la valeur de λ, telle que

$$y(2) = 1 \iff 1 = 2 + \lambda(2)^{\ln(2)}2^{-\ln(2)} \iff \lambda = -1.$$

On a donc, en pour $x \in]1, \infty[$,

$$y(x) = x - (2)^{\ln(2)}x^{-\ln(x)}$$

(c) Puisque $\frac{1}{2} < 1$, on a unicité de la solution dans l'intervalle $I =]0, 1[$. On doit donc trouver la valeur de λ, telle que

$$y(0.5) = 1 \iff 1 = .5 + \lambda(0,5)^{-\ln(2)}(0,5)^{\ln(2)} \iff \lambda = \frac{1}{2}.$$

On a donc, en pour $x \in]0, 1[$,

$$y(x) = x + (\frac{1}{2})^{1-\ln(2)}x^{-\ln(x)}$$