1

Analyse 2 - CMS
9 avril 2025
Durée : 105 minutes

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Signature

Absent.e

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 20 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte CAMIPRO sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page. Au démarrage de l'épreuve, signez la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé. L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire. Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie). Les brouillons ne seront pas ramassés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Formulaire

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\ \cosh y + \cosh x\ \sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\ \cosh y + \sinh x\ \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\ \tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Développement limité de quelques fonctions

$f(x)$	Polynôme de Taylor de $f(x)$ au voisinage de 0
$\dfrac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$
e^x	$1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$
$\sin x$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\tan x$	$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315}$
$\sinh x$	$x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cosh x$	$1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\tanh x$	$x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315}$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}\sinh(x)$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

Question 1 (1 point)

- [ ] $f(x) - f(-x)$ est la partie impaire de $f(x)$.
- [ ] $f(x)$ est impaire
- [x] $f(x)$ est paire.
- [ ] $f(x)$ n'est ni paire ni impaire.

Correction : Produit de deux impaires est paire.

Question 2 (2 point)

- [ ] $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.
- [x] $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
- [ ] $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.
- [ ] $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

Correction : Appliquer Bernouilli .

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Alors, le polynôme de Taylor et le terme de correction de f, autour de $x_0 = 0$ à l'odre n est:

Question 3 (2 points)

- ☐ $r_{f,x_0,n}(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(1-x^2)}$.
- ■ $r_{f,x_0,n}(x) = \frac{(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.
- ☐ $r_{f,x_0,n}(x) = \frac{x^{2(n+1)}}{(1-x)^2}$.
- ☐ $r_{f,x_0,n}(x) = \frac{(n+1)x^n - (n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

Correction : Règle de dérivation et $\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Question 4 (2 points)

- ■ $P_{f,0,n}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1}$.
- ☐ $P_{f,0,n}(x) = \sum_{0\leq 2k\leq n} x^{2k}$.
- ☐ $P_{f,0,n}(x) = \sum_{0\leq 2k\leq n} (-1)^k x^{2k}$.
- ☐ $P_{f,0,n}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)^2$.

Correction : On utilis la règle de la dérivation, puisque $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}$.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

Question 5 (2 points)

- ☐ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$.
- ☐ $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ n'existe pas.
- ■ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
- ☐ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Correction : Définition de la fonction puissance généralisée et Bernouilli.

Question 6 (2 points)

- ■ Le maximum de $f(x)$ est $e^{1/e}$.
- ☐ $f(x)$ ne possède ni de maximum, ni de minimum.
- ☐ Le minimum de $f(x)$ est $1/e^e$.
- ☐ Le minimum de $f(x)$ est $e^{1/e}$.

Correction : On localise l'exremum de l'exposant.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

.5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \cosh(x) + \cosh(y) = a, \\ \sinh(x) + \sinh(y) = b, \end{cases}$$

en précisant les conditions que a et b doivent satisfaire.

Solution

$$\begin{cases} \cosh(x) + \cosh(y) = a, \\ \sinh(x) + \sinh(y) = b \end{cases} \qquad \text{cond1: } a \geq 2$$

$$\iff \begin{cases} e^x + e^y = a + b, \\ e^{-x} + e^{-y} = a - b \end{cases} \qquad \text{cond2: } a > b \text{ et } a + b > 0$$

$$\iff \begin{cases} e^x + e^y = a + b, \\ \frac{e^x + e^y}{e^{x+y}} = a - b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x + e^y = a + b, \\ e^x e^y = \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x + e^y = a + b, \\ e^x + e^{-x} \frac{a+b}{a-b} = a + b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x + e^y = a + b, \\ e^{2x} + \frac{a+b}{a-b} - e^x(a+b) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^y = \frac{(a+b) \mp \sqrt{(a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b}}}{2}, \\ e^x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b}}}{2} \end{cases} \qquad \text{cond3: } (a+b) \geq \frac{4}{a-b}.$$

$$\iff \begin{cases} y = \ln\left((a+b) \mp \sqrt{(a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b}]}\right) - \ln(2), \\ x = \ln\left((a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4\frac{a-b}{a+b}}\right) - \ln(2) \end{cases} \qquad \text{si } a-b,\ (a+b) > 0\ a \geq 2,\ a^2 - b^2 - 4 \geq 0.$$

Les conditions sont redondantes: si $a + b > 0$, alors $a^2 - b^2 - 4 \geq 0$ implique $a - b > 0$ d'une part, puis et $a \geq 2$ d'autre part. On a alors les conditions $a + b > 0$ et $a^2 - b^2 \geq 4$.

Barème:
1 pnt pour une éuqation avec des exponentielles, 1 pnt pour l'équation de second degré, 1 pnt pour solution, 1 pnt pour condition.

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

On rappelle que le polynôme de Taylor de la fonction $\frac{1}{\sqrt{y}}$ autour de $y_0 = 1$ à l'ordre n est

$$P_{\frac{1}{\sqrt{y}},1,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} (y-1)^k,$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(a) Utiliser la règle de composition pour obtenir le polynôme de Taylor pour la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, dont on précisera x_0 et l'ordre.

(b) Intégrer le polynôme de Taylor du point précédent. On obtient le polynôme de Taylor pour quelle fonction, autour de quel x_0 et à quelle ordre ?

Solution

(a) La règle de composition demande que $y_0 = 1 + x_0^2$. Comme $y_0 = 1$ pour le polynôme de la racine, on doit avoir $x_0 = 0$.
Après substitution de $y - 1$ par $y = 1 + x^2$ on trouve

$$P_{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},0,n} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} x^{2k}.$$

(b) Intégrant terme à terme on obtient

$$P_{\mathrm{Arsh}(x),0,n}(x) = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \frac{1}{4^k(2k+1)} \binom{2k}{k} x^{2k+1}.$$

Barème:
(a): 1 pnt pour x_0, 0,5 pnts pour la substitution, 0,5 pnt pour l'ordre
(b): 1 pnt pour l'intégration, 1 pnt pour Arsinh, 0,5 pnt pour la cste d'intégration, 0,5 pnt pour l'ordre.

Analyse 2 - CMS
9 avril 2025
Durée : 105 minutes

2

Marianne

SCIPER : **888888**

Signature | Absent.e

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 20 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte CAMIPRO sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page. Au démarrage de l'épreuve, signez la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé. L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire. Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie). Les brouillons ne seront pas ramassés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Formulaire

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\ \cosh y + \cosh x\ \sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\ \cosh y + \sinh x\ \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\ \tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Développement limité de quelques fonctions

$f(x)$	Polynôme de Taylor de $f(x)$ au voisinage de 0
$\dfrac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n$
e^x	$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$
$\sin x$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	$1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\tan x$	$x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{17x^7}{315}$
$\sinh x$	$x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cosh x$	$1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\tanh x$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}-\dfrac{17x^7}{315}$
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}\sinh(x)$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

Question 1 (2 point)

- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.
- ☐ $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$.
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.
- ■ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Correction : Appliquer Bernouilli .

Question 2 (1 point)

- ☐ $f(x)$ n'est ni paire ni impaire.
- ■ $f(x)$ est paire.
- ☐ $f(x)$ est impaire
- ☐ $f(x) - f(-x)$ est la partie impaire de $f(x)$.

Correction : Produit de deux impaires est paire.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Alors, le polynôme de Taylor et le terme de correction de f, autour de $x_0 = 0$ à l'odre n est:

Question 3 (2 points)

- ☐ $P_{f,0,n}(x) = \sum_{0\leq 2k\leq n}(-1)^k x^{2k}$.
- ☐ $P_{f,0,n}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)^2$.
- ■ $P_{f,0,n}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1}$.
- ☐ $P_{f,0,n}(x) = \sum_{0\leq 2k\leq n} x^{2k}$.

Correction : On utilis la règle de la dérivation, puisque $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}$.

Question 4 (2 points)

- ☐ $r_{f,x_0,n}(x) = \frac{x^{2(n+1)}}{(1-x)^2}$.
- ■ $r_{f,x_0,n}(x) = \frac{(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.
- ☐ $r_{f,x_0,n}(x) = \frac{(n+1)x^n - (n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$.
- ☐ $r_{f,x_0,n}(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(1-x^2)}$.

Correction : Règle de dérivation et $\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

Question 5 (2 points)

- ■ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
- □ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
- □ $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ n'existe pas.
- □ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$.

Correction : Définition de la fonction puissance généralisée et Bernouilli.

Question 6 (2 points)

- □ Le minimum de $f(x)$ est $e^{1/e}$.
- □ Le minimum de $f(x)$ est $1/e^e$.
- ■ Le maximum de $f(x)$ est $e^{1/e}$.
- □ $f(x)$ ne possède ni de maximum, ni de minimum.

Correction : On localise l'exremum de l'exposant.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \cosh(x) + \cosh(y) = a, \\ \sinh(x) + \sinh(y) = b, \end{cases}$$

en précisant les conditions que a et b doivent satisfaire.

Solution

$$\begin{cases} \cosh(x) + \cosh(y) = a, \\ \sinh(x) + \sinh(y) = b \end{cases}$$

cond1: $a \geq 2$

$$\iff \begin{cases} e^x + e^y = a + b, \\ e^{-x} + e^{-y} = a - b \end{cases}$$

cond2: $a > b$ et $a + b > 0$

$$\iff \begin{cases} e^x + e^y = a + b, \\ \frac{e^x + e^y}{e^{x+y}} = a - b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x + e^y = a + b, \\ e^x e^y = \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x + e^y = a + b, \\ e^x + e^{-x}\frac{a+b}{a-b} = a + b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x + e^y = a + b, \\ e^{2x} + \frac{a+b}{a-b} - e^x(a+b) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^y = \frac{(a+b) \mp \sqrt{(a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b}}}{2}, \\ e^x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b}}}{2} \end{cases}$$

cond3: $(a+b) \geq \dfrac{4}{a-b}$.

$$\iff \begin{cases} y = \ln\left((a+b) \mp \sqrt{(a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b}]}\right) - \ln(2), \\ x = \ln\left((a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4\frac{a-b}{a+b}}\right) - \ln(2) \end{cases}$$

si $a-b$, $(a+b) > 0$ $a \geq 2$, $a^2-b^2-4 \geq 0$.

Les conditions sont redondantes: si $a + b > 0$, alors $a^2 - b^2 - 4 \geq 0$ implique $a - b > 0$ d'une part, puis et $a \geq 2$ d'autre part. On a alors les conditions $a + b > 0$ et $a^2 - b^2 \geq 4$.

Barème:

1 pnt pour une éuqation avec des exponentielles, 1 pnt pour l'équation de second degré, 1 pnt pour solution, 1 pnt pour condition.

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

On rappelle que le polynôme de Taylor de la fonction $\frac{1}{\sqrt{y}}$ autour de $y_0 = 1$ à l'ordre n est

$$P_{\frac{1}{\sqrt{y}},1,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} (y-1)^k,$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(a) Utiliser la règle de composition pour obtenir le polynôme de Taylor pour la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, dont on précisera x_0 et l'ordre.

(b) Intégrer le polynôme de Taylor du point précédent. On obtient le polynôme de Taylor pour quelle fonction, autour de quel x_0 et à quelle ordre ?

Solution

(a) La règle de composition demande que $y_0 = 1 + x_0^2$. Comme $y_0 = 1$ pour le polynôme de la racine, on doit avoir $x_0 = 0$.
Après substitution de $y - 1$ par $y = 1 + x^2$ on trouve

$$P_{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},0,n} = \sum_{0 \le 2k \le n} (-1)^k \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} x^{2k}.$$

(b) Intégrant terme à terme on obtient

$$P_{\mathrm{Arsh}(x),0,n}(x) = \sum_{0 \le 2k+1 \le n} (-1)^k \frac{1}{4^k(2k+1)} \binom{2k}{k} x^{2k+1}.$$

Barème:
(a): 1 pnt pour x_0, 0,5 pnts pour la substitution, 0,5 pnt pour l'ordre
(b): 1 pnt pour l'intégration, 1 pnt pour Arsinh, 0,5 pnt pour la cste d'intégration, 0,5 pnt pour l'ordre.