Enseignant: Bossoney
Analyse 2 - CMS
17 avril 2024
Durée : 105 minutes

1

Robin des Bois

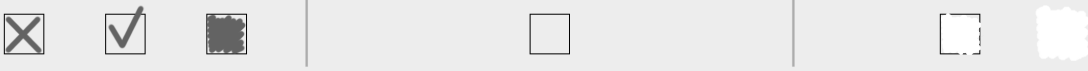
SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

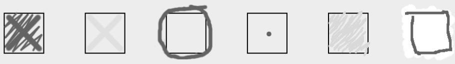
- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren



ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproques:

$$\text{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \text{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad \text{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\text{Arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\text{Arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\text{Artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{Arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit le point du plan $P(x_P, y_P)$.

Question 1 (1 point)
Si $x_P^2 - y_P^2 = 1$ et $x_P > 0$ alors:

- ☐ $x_P = \cosh(t)$, $y_P = \sinh(t)$ et $t = \ln(x_P - y_P)$.
- ☐ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = \cosh(t)$ et $t = \ln(x_P - y_P)$.
- ■ $x_P = \cosh(t)$, $y_P = \sinh(t)$ et $t = \ln(x_P + y_P)$.
- ☐ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = \cosh(t)$ et $t = \ln(x_P + y_P)$.

Solution: Parties paire et impaire de $\exp(x)$.

Question 2 (2 point)
Si $y_P^2 - x_P^2 = 1$ et $y_P < 0$ alors:

- ☐ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = \cosh(t)$ et $t = \ln(x_P + y_P)$.
- ■ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = -\cosh(t)$ et $t = \ln(x_P - y_P)$.
- ☐ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = -\cosh(t)$ et $t = \ln(x_P + y_P)$.
- ☐ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = \cosh(-t)$ et $t = \ln(x_P + y_P)$.

Solution: Parité et signe des fonctions $\exp(x)$ et hyperboliques.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit $f(x)$ une fonction n fois continûment dérivable dans un voisinage de x_0 et soit $0 \leq k \leq n$. Alors:

Question 3 (2 points)

- [ ] $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{f,x_0,k}(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.
- [x] $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{f,x_0,k}(x)}{(x-x_0)^k} = 0$.
- [ ] $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{f,x_0,k}(x)}{(x-x_0)^k} = f^{(k)}(x_0)$.
- [ ] la limte $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{f,x_0,k}(x)}{(x-x_0)^k}$ dépend du terme de correction.

<u>Solution:</u> Appliquer Bernouilli et la définition des polynômes de Taylor.

Question 4 (2 points)

- [x] Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $r_{f,0,n}(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.
- [ ] Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $r_{f,0,n}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1-x}$.
- [ ] Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $r_{f,0,n}(x) = 0$.
- [ ] Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $r_{f,0,n}(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1-x}$.

<u>Solution:</u> Formule des séries géométriques

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit la fonction $f(x) = (\frac{1}{x})^x$.

Question 5 (2 points)

- ☐ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$.
- ☐ $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ n'existe pas.
- ■ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.
- ☐ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = e$.

Solution: Définition de la fonction puissance généralisée et Bernouilli sur l'exposant.

Question 6 (2 points)

- ■ Le maximum de $f(x)$ est $e^{1/e}$.
- ☐ $f(x)$ ne possède ni de maximum, ni de minimum.
- ☐ Le minimum de $f(x)$ est $1/e^e$.
- ☐ Le minimum de $f(x)$ est $e^{1/e}$.

Solution: Définition de la fonction puissance généralisée et étude de l'exposant.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5

■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Résoudre $\cosh(x) + 2\sinh(x) = 3$.

(b) Pour $u, v \geq 1$, simplifier l'expression $\mathrm{Arcosh}(uv + \sqrt{(u^2-1)(v^2-1)})$.

Solution

(a) Résoudre $\cosh(x) + 2\sinh(x) = 3$.
En reprenant les définitions des fonctions hyperboliques on obtient

$$\begin{aligned} 3 &= \cosh(x) + 2\sinh(x) = \cosh(x) + \sinh(x) + \sinh(x) \\ &= e^x + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}. \end{aligned}$$

Après substitution de e^x par Y ($Y > 0$), on a

$$6 = 3Y - Y^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3Y^2 - 6Y - 1.$$

Ainsi,

$$Y = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3},$$

dont on retient que la solution positive, pour trouver finalement

$$x = \ln(y) = \ln(3 + 2\sqrt{3}) - \ln(3)$$

(b) Pour $u, v \geq 1$, simplifier l'expression $\mathrm{Arcosh}(uv + \sqrt{(u^2-1)(v^2-1)})$. Puisque $u, v \geq 1$, on peut trouver $s, t \geq 0$, tels que $u = \cosh(s)$ et $v = \cosh(t)$. On a alors les égalités

$$\begin{aligned} \mathrm{Arcosh}(uv + \sqrt{(u^2-1)(v^2-1)}) &= \mathrm{Arcosh}(\cosh(s)\cosh(t)v + \sqrt{(\cosh(s)^2-1)(\cosh(t)^2-1)}) \\ &= \mathrm{Arcosh}(\cosh(s)\cosh(t) + \sqrt{\sinh(s)^2\sinh(t)^2}) = \mathrm{Arcosh}(\cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t)) \\ &= \mathrm{Arcosh}(\cosh(s+t)) = s + t = \mathrm{Arch}(u) + \mathrm{Arch}(v). \end{aligned}$$

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

(a) Trouver des constantes réelles a et b telles que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$.

(b) Utiliser le point précédent et la règle d'addition pour calculer le $P_{\frac{1}{1-x^2},0,n}(x)$.

(c) Intégrer le polynôme $P_{\frac{1}{1-x^2},0,n}(x)$. On obtient le polynôme de Taylor pour quelle fonction et pour quel x_0?

Solution

(a) Si $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$, alors

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a(1-x)+b(1+x)}{(1+x)(1-x)}$$
$$= \frac{a+b+x(b-a)}{1-x^2}.$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a+b=1, \\ b-a=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a=1, \\ b=a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a=b=\frac{1}{2}$$

(b) Par la règle d'addition, on a

$$P_{\frac{1}{1-x^2},0,n}(x) = P_{\frac{1}{2(1-x)},0,n}(x) + P_{\frac{1}{2(1+x)},0,n}(x)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \quad \text{séries géométriques}$$
$$= \sum_{0\le 2k\le n} x^{2k}.$$

(c) Puisque $\mathrm{Artanh}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$ et que $x_0 = 0 \in \mathrm{Def}_{\mathrm{Artanh}}$, on a par la règle d'intégration

$$P_{\mathrm{Artanh},0,n}(x) = \mathrm{Artanh}(0) + \int_0^x P_{\frac{1}{1-x^2},0,n-1}(t)dt$$
$$= 0 + \int_0^x \sum_{0\le 2k\le n-1} t^{2k}dt = \sum_{0\le 2k\le n-1}\int_0^x t^{2k}dt$$
$$= \sum_{0\le 2k\le n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{1\le 2k+1\le n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Enseignant: Bossoney
Analyse 2 - CMS
17 avril 2024
Durée : 105 minutes

2

Marianne

SCIPER : **888888**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproques:

$$\mathrm{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \mathrm{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad \mathrm{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\mathrm{Arsinh}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{Arcosh}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{Artanh}x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{Arcoth}x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit le point du plan $P(x_P, y_P)$.

Question 1 (2 point)
Si $y_P^2 - x_P^2 = 1$ et $y_P < 0$ alors:

- ☐ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = \cosh(t)$ et $t = \ln(x_P + y_P)$.
- ☐ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = \cosh(-t)$ et $t = \ln(x_P + y_P)$.
- ☐ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = -\cosh(t)$ et $t = \ln(x_P + y_P)$.
- ■ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = -\cosh(t)$ et $t = \ln(x_P - y_P)$.

Solution: Parité et signe des fonctions $\exp(x)$ et hyperboliques.

Question 2 (1 point)
Si $x_P^2 - y_P^2 = 1$ et $x_P > 0$ alors:

- ☐ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = \cosh(t)$ et $t = \ln(x_P + y_P)$.
- ■ $x_P = \cosh(t)$, $y_P = \sinh(t)$ et $t = \ln(x_P + y_P)$.
- ☐ $x_P = \sinh(t)$, $y_P = \cosh(t)$ et $t = \ln(x_P - y_P)$.
- ☐ $x_P = \cosh(t)$, $y_P = \sinh(t)$ et $t = \ln(x_P - y_P)$.

Solution: Parties paire et impaire de $\exp(x)$.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit $f(x)$ une fonction n fois continûment dérivable dans un voisinage de x_0 et soit $0 \leq k \leq n$. Alors:

Question 3 (2 points)

- ☐ Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $r_{f,0,n}(x) = 0$.
- ☐ Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $r_{f,0,n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1-x}$.
- ■ Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $r_{f,0,n}(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.
- ☐ Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $r_{f,0,n}(x) = \frac{(-1)^{n}x^{n+1}}{1-x}$.

<u>Solution:</u> Formule des séries géométriques

Question 4 (2 points)

- ☐ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{f,x_0,k}(x)}{(x-x_0)^k} = f^{(k)}(x_0)$.
- ■ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{f,x_0,k}(x)}{(x-x_0)^k} = 0$.
- ☐ la limte $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{f,x_0,k}(x)}{(x-x_0)^k}$ dépend du terme de correction.
- ☐ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{f,x_0,k}(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

<u>Solution:</u> Appliquer Bernouilli et la définition des polynômes de Taylor.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit la fonction $f(x) = (\frac{1}{x})^x$.

Question 5 (2 points)

- [x] $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.
- [ ] $\lim_{x \to 0^+} f(x) = e$.
- [ ] $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ n'existe pas.
- [ ] $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$.

Solution: Définition de la fonction puissance généralisée et Bernouilli sur l'exposant.

Question 6 (2 points)

- [ ] Le minimum de $f(x)$ est $e^{1/e}$.
- [ ] Le minimum de $f(x)$ est $1/e^e$.
- [x] Le maximum de $f(x)$ est $e^{1/e}$.
- [ ] $f(x)$ ne possède ni de maximum, ni de minimum.

Solution: Définition de la fonction puissance généralisée et étude de l'exposant.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

.5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4

(a) Résoudre $\cosh(x) + 2\sinh(x) = 3$.

(b) Pour $u, v \geq 1$, simplifier l'expression $\operatorname{Arcosh}(uv + \sqrt{(u^2-1)(v^2-1)})$.

Solution

(a) Résoudre $\cosh(x) + 2\sinh(x) = 3$.
En reprenant les définitions des fonctions hyperboliques on obtient

$$\begin{aligned} 3 &= \cosh(x) + 2\sinh(x) = \cosh(x) + \sinh(x) + \sinh(x) \\ &= e^x + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}. \end{aligned}$$

Après substitution de e^x par Y $(Y > 0)$, on a

$$6 = 3Y - Y^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3Y^2 - 6Y - 1.$$

Ainsi,

$$Y = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3},$$

dont on retient que la solution positive, pour trouver finalement

$$x = \ln(y) = \ln(3 + 2\sqrt{3}) - \ln(3)$$

(b) Pour $u, v \geq 1$, simplifier l'expression $\operatorname{Arcosh}(uv + \sqrt{(u^2-1)(v^2-1)})$. Puisque $u, v \geq 1$, on peut trouver $s, t \geq 0$, tels que $u = \cosh(s)$ et $v = \cosh(t)$. On a alors les égalités

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcosh}(uv + \sqrt{(u^2-1)(v^2-1)}) &= \operatorname{Arcosh}(\cosh(s)\cosh(t)v + \sqrt{(\cosh(s)^2-1)(\cosh(t)^2-1)}) \\ &= \operatorname{Arcosh}(\cosh(s)\cosh(t) + \sqrt{\sinh(s)^2\sinh(t)^2}) = \operatorname{Arcosh}(\cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t)) \\ &= \operatorname{Arcosh}(\cosh(s+t)) = s + t = \operatorname{Arch}(u) + \operatorname{Arch}(v). \end{aligned}$$

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5

(a) Trouver des constantes réelles a et b telles que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$.

(b) Utiliser le point précédent et la règle d'addition pour calculer le $P_{\frac{1}{1-x^2},0,n}(x)$.

(c) Intégrer le polynôme $P_{\frac{1}{1-x^2},0,n}(x)$. On obtient le polynôme de Taylor pour quelle fonction et pour quel x_0?

Solution

(a) Si $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2} &= \frac{a(1-x)+b(1+x)}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{a+b+x(b-a)}{1-x^2}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a+b=1, \\ b-a=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a=1, \\ b=a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a=b=\frac{1}{2}$$

(b) Par la règle d'addition, on a

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{1-x^2},0,n}(x) &= P_{\frac{1}{2(1-x)},0,n}(x) + P_{\frac{1}{2(1+x)},0,n}(x) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \quad \text{séries géométriques} \\ &= \sum_{0\le 2k\le n} x^{2k}. \end{aligned}$$

(c) Puisque $\mathrm{Artanh}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$ et que $x_0 = 0 \in \mathrm{Def}_{\mathrm{Artanh}}$, on a par la règle d'intégration

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{Artanh},0,n}(x) &= \mathrm{Artanh}(0) + \int_0^x P_{\frac{1}{1-x^2},0,n-1}(t)dt \\ &= 0 + \int_0^x \sum_{0\le 2k\le n-1} t^{2k}dt = \sum_{0\le 2k\le n-1}\int_0^x t^{2k}dt \\ &= \sum_{0\le 2k\le n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{1\le 2k+1\le n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$