Enseignant: Bossoney
Analyse 2 - CMS
20 avril 2023
Durée : 105 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
On considère $\mathbb{R}^2$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soient z_P l'affixe du point $P \in \mathbb{R}^2$ pour la base $\{e_1\}$ et z'_P l'affixe pour ce même point pour la base $\{e_1 - ie_2\}$. Alors

- ☐ $z'_P = z_P$
- ☐ $z'_P = \frac{1+i}{2} z_P$
- ☐ $z'_P = (1-i)z_P$
- ☐ $z'_P = (1+i)z_P$
- ☐ $z'_P = iz_P$
- ■ $z'_P = \frac{1}{2} z_P$
- ☐ $z'_P = \frac{1-i}{2} z_P$
- ☐ $z'_P = 2z_P$

Question 2 (2 points)
On rappelle que $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Arctan}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Que vaut $\dfrac{d^{157}}{dx^{157}}\mathrm{Arctan}(0)$?

- ☐ $\dfrac{1}{157!}$
- ☐ -1
- ■ 156!
- ☐ -156!
- ☐ $\dfrac{1}{78!}$
- ☐ 1
- ☐ 157!
- ☐ 78!
- ☐ -78!
- ☐ -157!
- ☐ $\dfrac{1}{156!}$

Question 3 (2 points)
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et supposons que $\cosh^2(x) = \dfrac{1}{1+\sinh^2(y)}$. Alors,

- ☐ $\sinh^2(x) = \dfrac{1}{1-\cosh^2(y)}$
- ☐ $\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}\ln(y-\sqrt{1-y^2})}$
- ☐ $\coth^2(x) = \dfrac{1}{1-\tanh^2(y)}$
- ■ $\cos^2(x) = \dfrac{1}{1+\sin^2(y)}$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 4: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5

■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Sachant que $3.14 < \pi < 3.15$, déterminer, en justifiant votre réponse, si $\sqrt{10} < \pi$ ou si $\pi < \sqrt{10}$.

(b) En étudiant la différence des fonctions $y = \pi^x$ et $y = x^\pi$, comparer $\pi^{\sqrt{10}}$ à $\sqrt{10}^\pi$.

Solution

(a) Clairement, $\pi^2 < (3.15)^2 = 9 + 0.90 + 0.0225 < 10$, d'où $\pi < \sqrt{10}$.

(b) Posons $f(x) = \pi^x - x^\pi = e^{x\ln(\pi)} - e^{\pi\ln(x)}$. Par la monotonie de l'exponentielle,

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x\ln(\pi) - \pi\ln(x) \geq 0.$$

Posons alors $g(x) = x\ln(\pi) - \pi\ln(x)$. On remarque que $g'(x) = \ln(\pi) - \frac{\pi}{x}$. Donc:

- $g(\pi) = 0$.
- $g'(\pi) > 0$, car $\pi > e$ et donc $\ln(\pi) > 1$.
- Si $x \geq \pi$, $g'(x) > g'(\pi) > 0$.

On a donc que $g(\sqrt{10}) = g(\sqrt{10}) - g(\pi) = g'(c)(\sqrt{10} - \pi)$ avec $c \in]\pi, \sqrt{10}[$. Donc, $g(\sqrt{10}) > 0$, i.e. $f(\sqrt{10}) > 0$, i.e. $\pi^{\sqrt{10}} > \sqrt{10}^\pi$.

Question 5: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5

(a) Montrer par récurrence que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n n!}x^{-n-\frac{1}{2}}.$$

En déduire $\mathrm{dl}^n_{\frac{1}{\sqrt{x}},1}(x)$.

(b) Sachant que $\frac{d}{dx}\mathrm{Arccos}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, calculer le développement limité à l'ordre n de $y = \mathrm{Arccos}(x)$ autour de $x_0 = 0$.

Solution

(a) Pour $n = 0$, on trouve

$$\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n n!}x^{-n-\frac{1}{2}}|_{n=0} = x^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour $n = 1$, on trouve

$$\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n n!}x^{-n-\frac{1}{2}}|_{n=1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Par hypothèse de récurrence, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^n}x^{-\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dx}\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n)!}x^{-n-\frac{1}{2}} = (-1)(n+\frac{1}{2})\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n n!}x^{-n-1-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)(2n)!}{24^n n!}x^{-n-1-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{n+1}2(n+1)(2n+1)(2n)!}{44^n(n+1)n!}x^{-n-1-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1))!}{4^{(n+1)}(n+1)!}x^{-(n+1)-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

ce qu'il fallaît vérifier.
On en déduit que

$$\mathrm{dl}^n_{\frac{1}{\sqrt{x}},1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(-1)^k(2k)!}{4^k(k)!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}(x-1)^k.$$

(b) Par composition des développements limités, on obtient que

$$\mathrm{dl}^{2n}_{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},0}(x) = \mathrm{dl}^{2n+1}_{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{4^k}\binom{2k}{k}(-x^2)k.$$

Par intégration on obtient

$$\mathrm{dl}^{2n+1}_{\mathrm{Arccos},0}(x) = \mathrm{dl}^{2n+2}_{\mathrm{Arccos},0}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k(2k+1)}\binom{2k}{k}x^{2k+1}.$$

Question 6: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

(a) Montrer que si $z, w \in \mathbb{C}^*$ et si $z \cdot w \in \mathbb{R}$, alors $w = c\bar{z}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

(b) Les **entiers de Gauss** $\mathbb{Z}[i]$ sont des nombres complexes avec parties réelles et imaginaires entières:

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Peut-on factoriser les nombres premiers $2, 3, 5$ ou 7 sur $\mathbb{Z}[i]$ (Autrement dit, existe-t-il des entiers de Gauss $l, k \in \mathbb{Z}[i]$, tels que $l \cdot k = p$ avec $p \in \{2, 3, 5, 7\}$) ? Si oui lesquels?

Solution

(a) Posons $z = x + iy$ et $w = s + it$. Alors,

$$z \cdot w = xs - yt + i(xt + ys).$$

Si on veut qu ce produit soit réel, il faut que $xt + ys = 0$. Autrement dit, il faut que $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

(b) Si $l = a_l + ib_l$, $k = a_k + ib_k$, $(a_l + ib_l)(a_k + ib_k) = p$ et $a_l, b_l, a_k, b_k \in \mathbb{Z}$, alors, par la partie précédente, on doit avoir

$$l = n(a + ib),\ k = m(a - ib), \quad (n \cdot m)(a^2 + b^2) = p, \quad a, b, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Comme p est un nombre premier on a comme solution

$$\begin{cases} m \cdot n = 1, \\ a^2 + b^2 = p \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m \cdot n = p, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} .$$

Comme tous ces nombres sont entiers, on trouve alors

$$2 = \begin{cases} (1+i)(1-i) \\ (-1+i)(-1-i) \end{cases} \quad \text{ou} \quad 2 = \begin{cases} 1 \cdot 2 \\ i(-2i) \\ (-1) \cdot (-2) \\ -i(2i) \end{cases} ;$$

$$3 = \begin{cases} 1 \cdot 3 \\ i(-3i) \\ (-1) \cdot (-3) \\ -i(3i) \end{cases} , \quad 7 = \begin{cases} 1 \cdot 7 \\ i(-7i) \\ (-1) \cdot (-7) \\ -i(7i) \end{cases} ;$$

$$5 = \begin{cases} (2+i)(2-i) \\ (-1+2i)(-1-2i) \\ (-2-i)(-2+i) \\ (1-2i)(1+2i) \end{cases} \quad \text{ou} \quad 5 = \begin{cases} 1 \cdot 5 \\ i(-5i) \\ (-1) \cdot (-5) \\ -i(5i) \end{cases}$$