

**EPFL****1**

Enseignant: Bossoney

Analyse 2 - CMS

12 juin 2024

Durée : 105 minutes

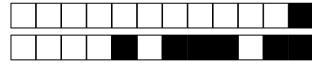
Robin des Bois

SCIPER: **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/>		



Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \cos x &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \tan x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y & \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproques:

$$\text{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\text{Arsinh}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\text{Arcosh}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\text{Artanh}x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{arccot } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\text{Arcoth}x$	$\frac{1}{1-x^2}$

**Enoncé**

Question 1 (1 point) Résoudre $z^2 + 4z + 8 = 0$.

- $2 - i$ et $2 + i$.
- $2 + 2i$ et $2 - 2i$.
- $-2 + 2i$ et $-2 - 2i$.
- $4 + 2i$ et $4 - 2i$.

Question 2 (2 point)

Mettre sous la forme $a + ib$ la fraction $\frac{1+2i}{3-5i}$

- $\frac{11+7i}{\sqrt{34}}$.
- $\frac{-7+11i}{34}$.
- $\frac{11+7i}{34}$.
- $\frac{7-11i}{\sqrt{34}}$.

**Enoncé**

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Question 3 (2 points) Trouver les racines de $1 + z^2 + z^4 + z^6$.

- $\exp(i \frac{(k+2)\pi}{4})$, $k = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.
- $\exp(i \frac{k\pi}{4})$, $k = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.
- $\exp(i \frac{k\pi}{4})$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
- $\exp(i \frac{(k+4)\pi}{4})$, $k = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.

Question 4 (2 points) La forme polaire de $z = \cos(\frac{\pi}{4}) - i \sin(\frac{\pi}{3})$ est

- $z = \frac{\sqrt{5}}{2} \exp(i\varphi)$ avec $\varphi = -\arccos(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$.
- $z = 5 \exp(i \frac{\pi}{4})$.
- $z = 5 \exp(-i \frac{\pi}{3})$.
- $z = \frac{5}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi)$ avec $\varphi = -\arccos(\frac{2}{5})$.

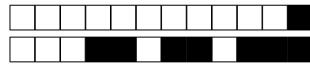
**Enoncé**

Question 5 (2 points) Si le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - 1)(X - 2)$ est $X - 1$, alors, le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - 1)^2$ est:

- $X - 1$ aussi.
- Cela dépend du polynôme $P(X)$.
- $X - 2$.
- $\frac{1}{X-1}$.

Question 6 (2 points) Soit un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Alors:

- Les racines de $P(X)^2$ sont les produits de celles de $P(X)$ avec leur complexes conjuguées.
- Les racines de $P(X)^2$ sont celles de $P(X)$ et leur complexes conjuguées.
- Les racines de $P(X)^2$ sont les carrées de celles de $P(X)$.
- Les racines de $P(X)^2$ sont exactement les mêmes que celles de $P(X^2)$.



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

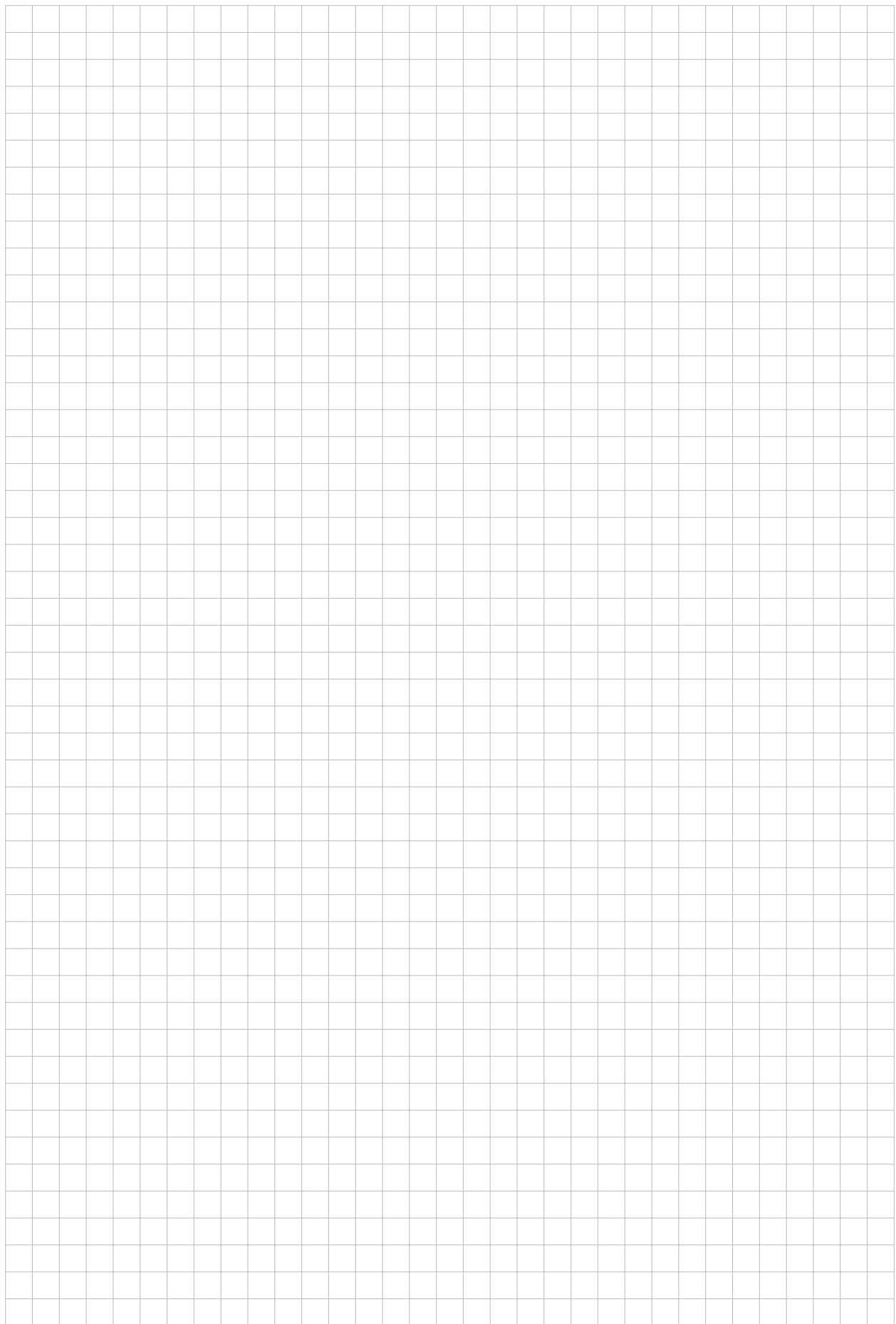
<input type="checkbox"/> .5	<input type="checkbox"/> .5	<input type="checkbox"/> .5	<input type="checkbox"/> .5	
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4

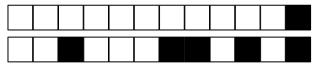
Trouver l'ensemble des polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient

- $\deg(P(X)) = 4$.
 - $P(X)$ est normalisé.
 - La division avec reste de $P(X)$ par $X - i$ est 2.
 - $P'(i) = 1$.



+1/7/54+





+1/8/53+



Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

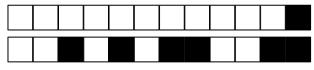
.5 .5 .5 .5 .5
 0 1 2 3 4 5

- (a) Trouver les solutions générales à l'EDOL

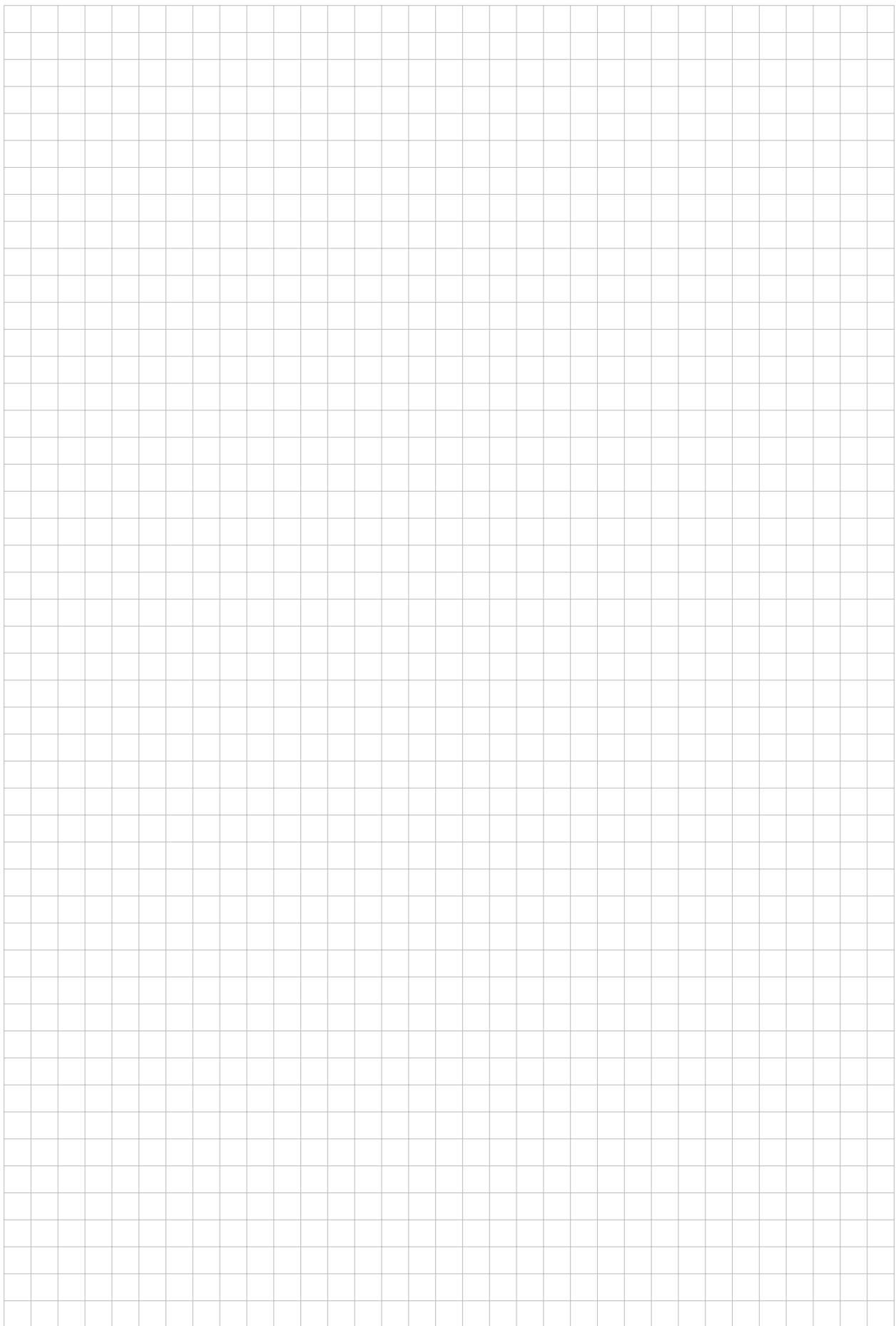
$$\frac{1}{\ln(x)}y' + \frac{2}{x}y = 2 + \frac{1}{\ln(x)},$$

sachant que $y(x) = x$ en est une solution particulière.

- (b) Trouver la solution à l'EDOL ci-dessus vérifiant les conditions initiales $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.
(c) Trouver la solution à l'EDOL ci-dessus vérifiant les conditions initiales $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 1$.

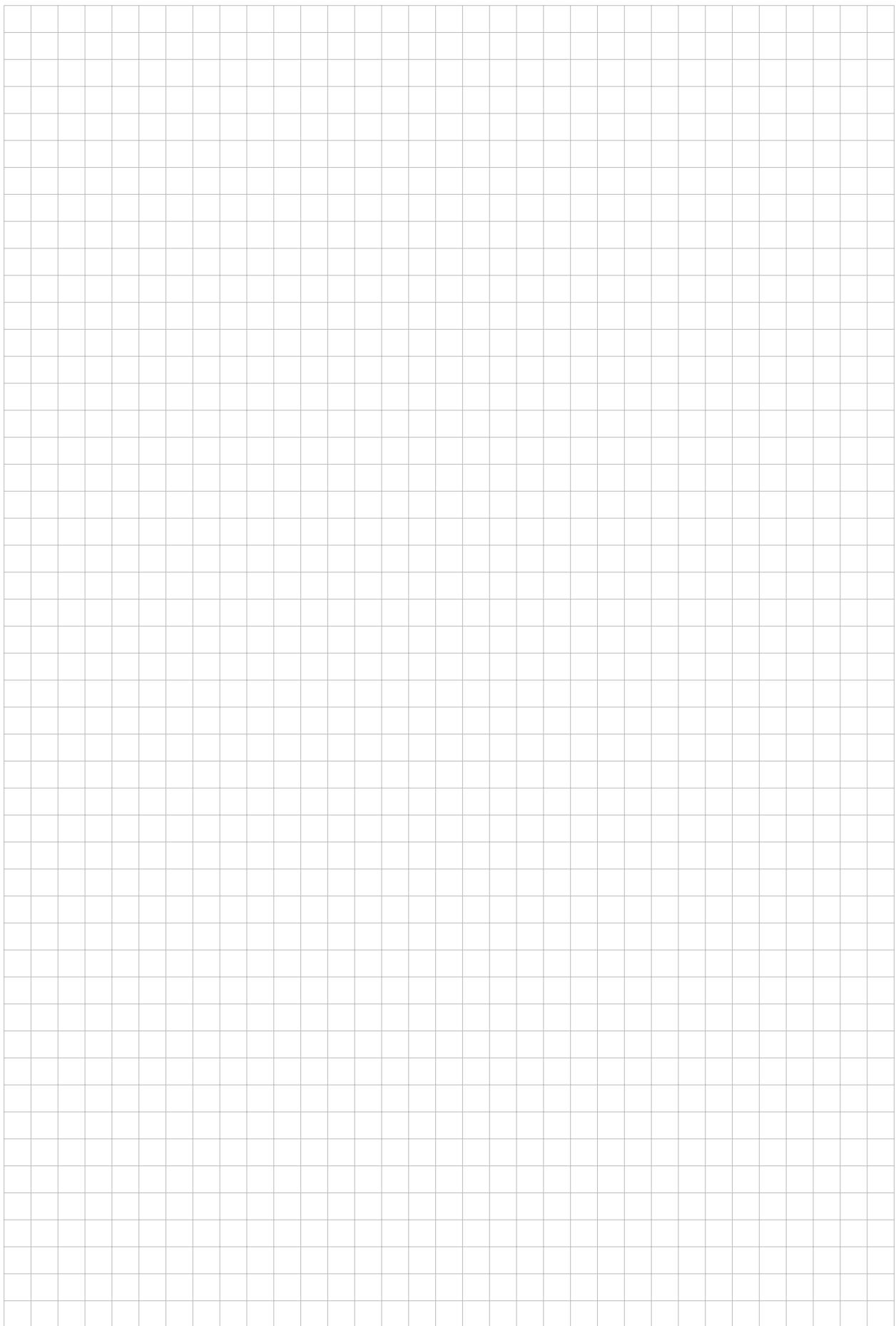


+1/10/51+



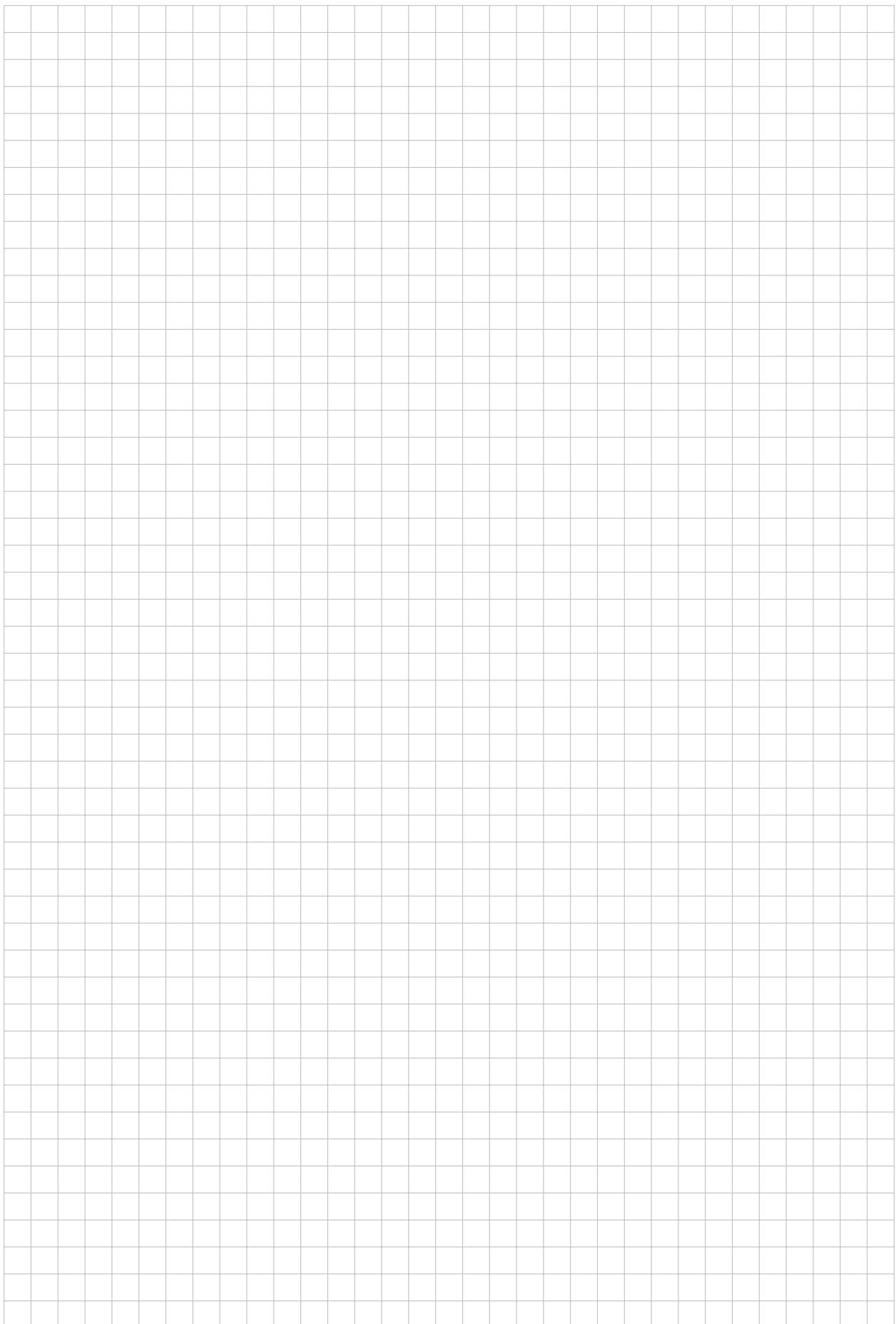


+1/11/50+





+1/12/49+



**EPFL**

Enseignant: Bossoney

Analyse 2 - CMS

12 juin 2024

Durée : 105 minutes

2

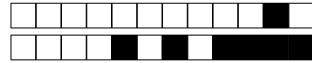
Marianne

SCIPER: **888888**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire** ou **bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/>		



Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \cos x &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \tan x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y & \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproques:

$$\text{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\text{Arsinh}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\text{Arcosh}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\text{Artanh}x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{arccot } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\text{Arcoth}x$	$\frac{1}{1-x^2}$

**Enoncé****Question 1** (2 point)Mettre sous la forme $a + ib$ la fraction $\frac{1+2i}{3-5i}$

$\frac{11+7i}{\sqrt{34}}.$

$\frac{7-11i}{\sqrt{34}}.$

$\frac{11+7i}{34}.$

$\frac{-7+11i}{34}.$

Question 2 (1 point) Résoudre $z^2 + 4z + 8 = 0$.

$4 + 2i$ et $4 - 2i$.

$-2 + 2i$ et $-2 - 2i$.

$2 + 2i$ et $2 - 2i$.

$2 - i$ et $2 + i$.

**Enoncé**

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Question 3 (2 points) La forme polaire de $z = \cos(\frac{\pi}{4}) - i \sin(\frac{\pi}{3})$ est

- $z = 5 \exp(-i\frac{\pi}{3}).$
- $z = \frac{5}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi)$ avec $\varphi = -\arccos(\frac{2}{5}).$
- $z = \frac{\sqrt{5}}{2} \exp(i\varphi)$ avec $\varphi = -\arccos(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}).$
- $z = 5 \exp(i\frac{\pi}{4}).$

Question 4 (2 points) Trouver les racines de $1 + z^2 + z^4 + z^6$.

- $\exp(i\frac{k\pi}{4}), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$
- $\exp(i\frac{k\pi}{4}), \quad k = 1, 2, 3, 5, 6, 7.$
- $\exp(i\frac{(k+4)\pi}{4}), \quad k = 1, 2, 3, 5, 6, 7.$
- $\exp(i\frac{(k+2)\pi}{4}), \quad k = 1, 2, 3, 5, 6, 7.$

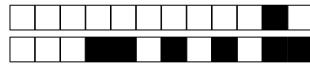
**Enoncé**

Question 5 (2 points) Si le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - 1)(X - 2)$ est $X - 1$, alors, le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - 1)^2$ est:

- $X - 2$.
- $\frac{1}{X-1}$.
- Cela dépend du polynôme $P(X)$.
- $X - 1$ aussi.

Question 6 (2 points) Soit un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Alors:

- Les racines de $P(X)^2$ sont exactement les mêmes que celles de $P(X^2)$.
- Les racines de $P(X)^2$ sont les carrées de celles de $P(X)$.
- Les racines de $P(X)^2$ sont les produits de celles de $P(X)$ avec leur complexes conjuguées.
- Les racines de $P(X)^2$ sont celles de $P(X)$ et leur complexes conjuguées.



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

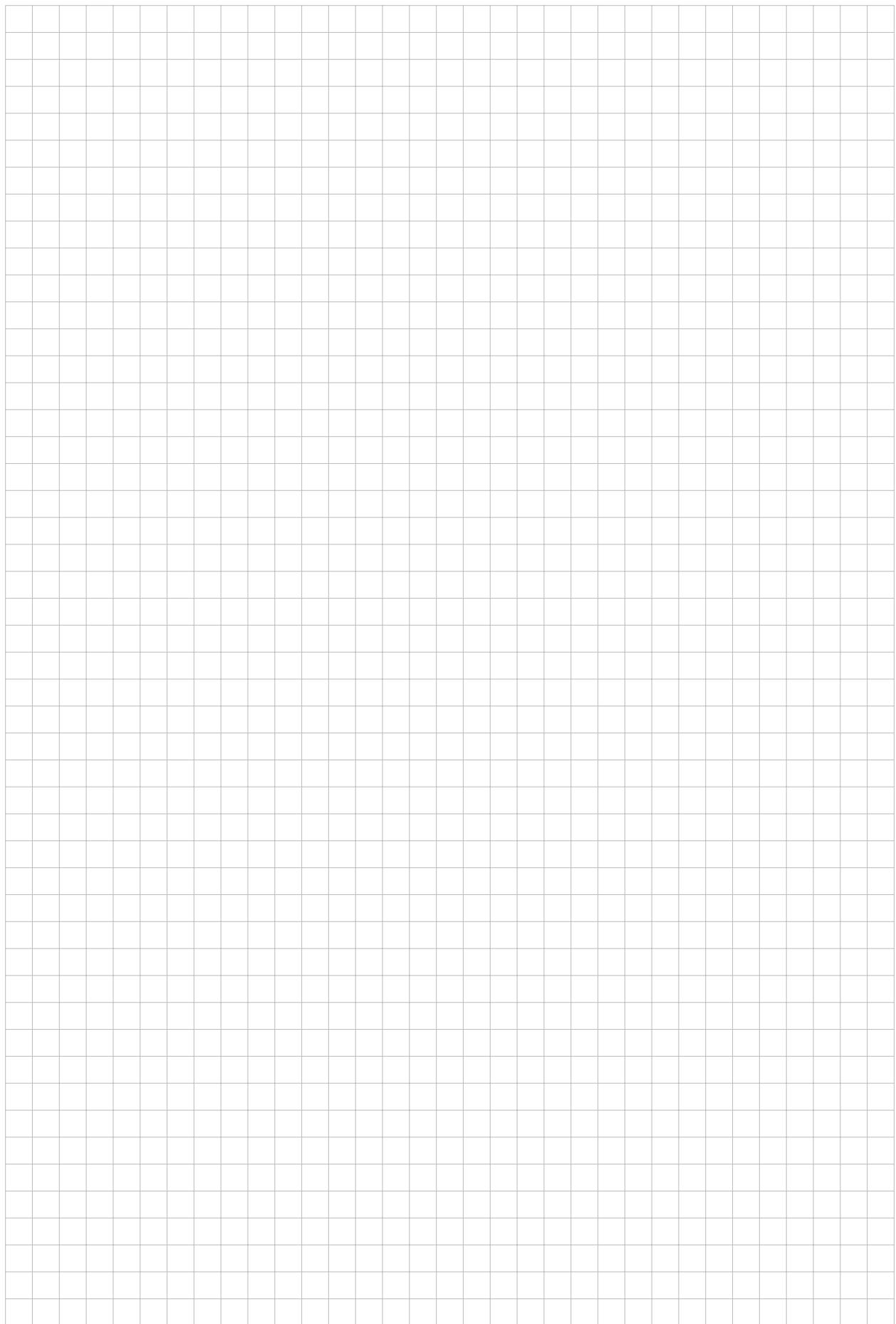
.5 .5 .5 .5
 0 1 2 3 4

Trouver l'ensemble des polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient

- $\deg(P(X)) = 4$.
 - $P(X)$ est normalisé.
 - La division avec reste de $P(X)$ par $X - i$ est 2.
 - $P'(i) = 1$.

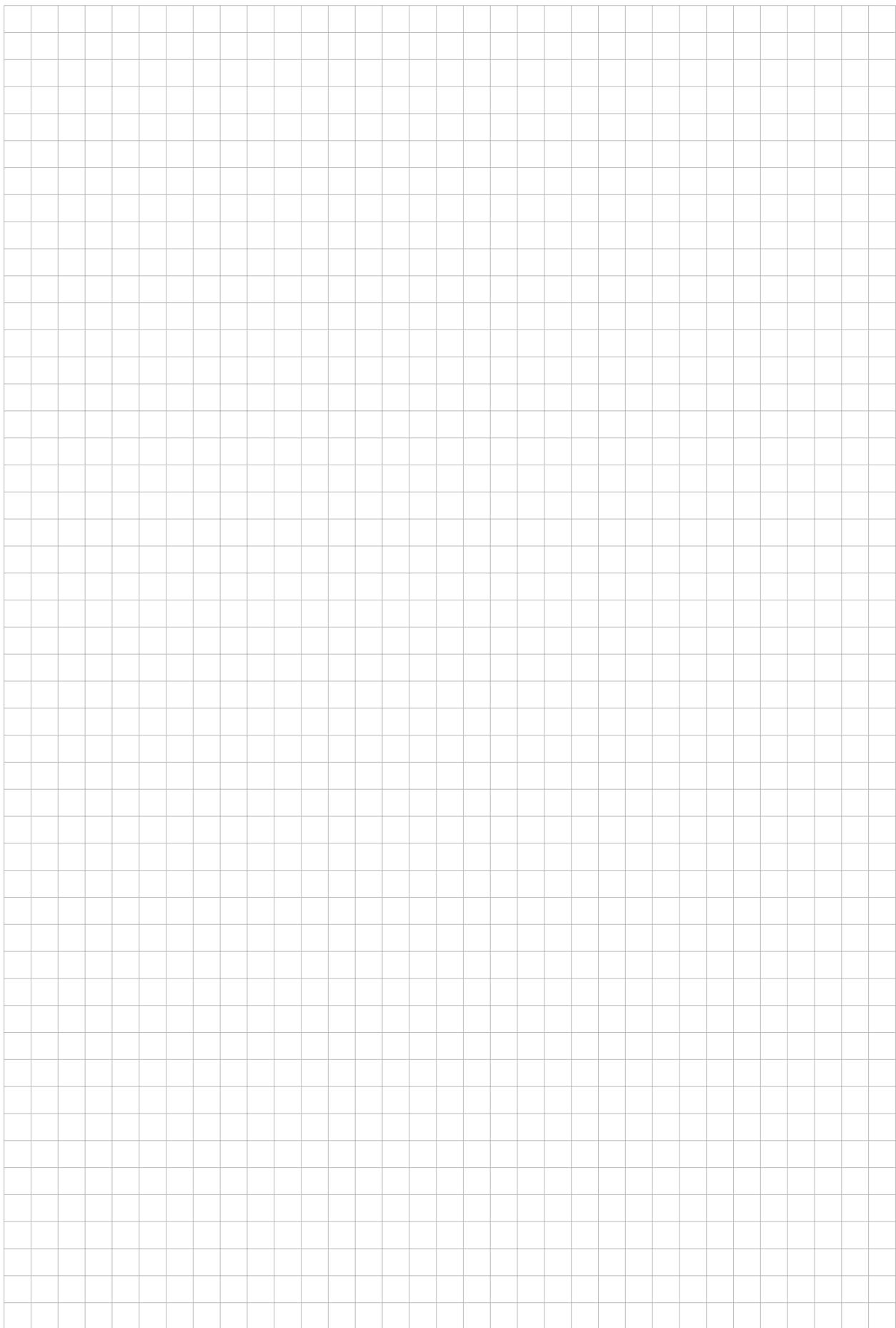


+2/7/42+





+2/8/41+





Question 8: Cette question est notée sur 5 points.

	.5		.5		.5		.5		.5		
<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5

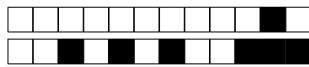
- (a) Trouver les solutions générales à l'EDOL

$$\frac{1}{\ln(x)}y' + \frac{2}{x}y = 2 + \frac{1}{\ln(x)},$$

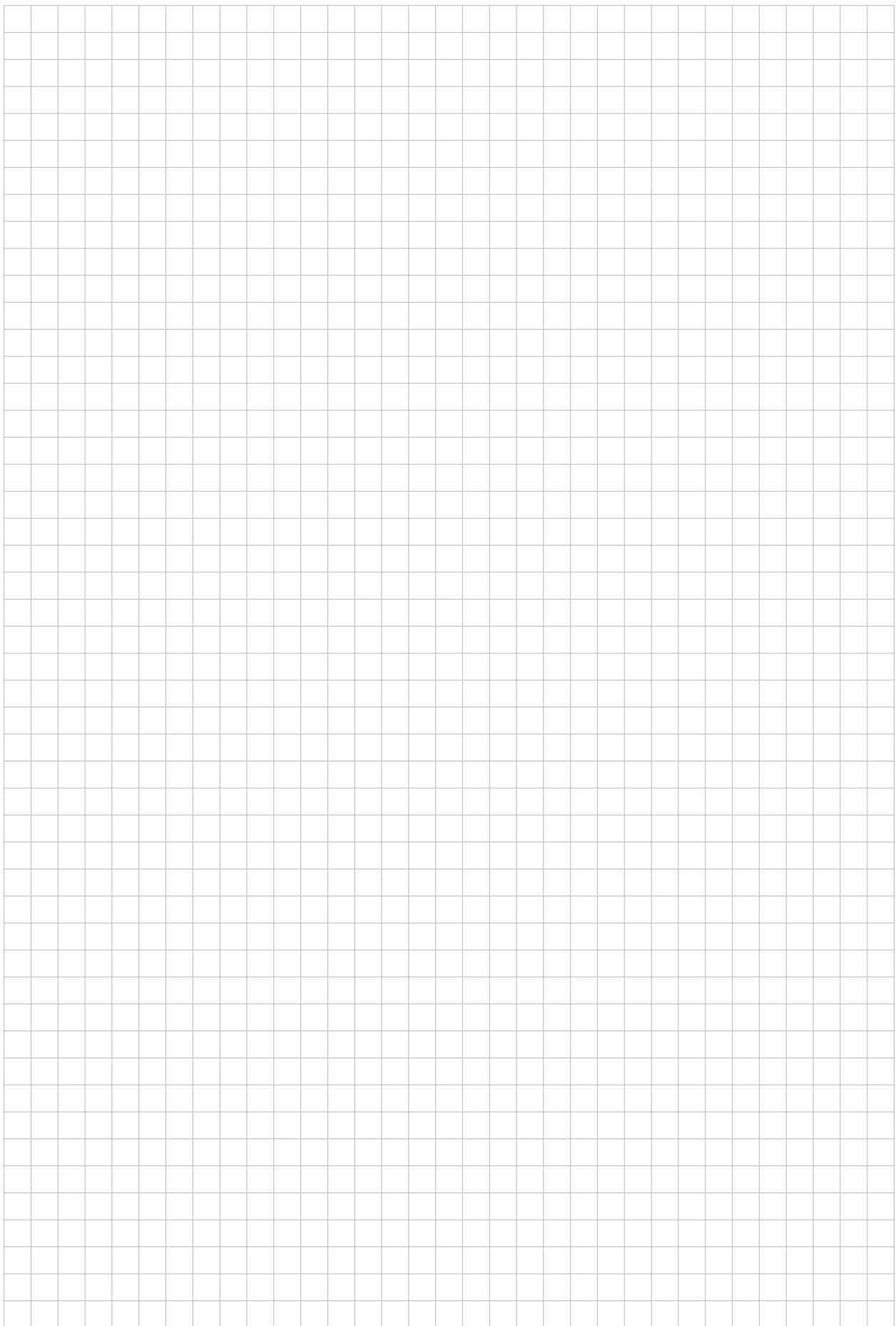
sachant que $y(x) = x$ en est une solution particulière.

- (b) Trouver la solution à l'EDOL ci-dessus vérifiant les conditions initiales $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

- (c) Trouver la solution à l'EDOL ci-dessus vérifiant les conditions initiales $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 1$.

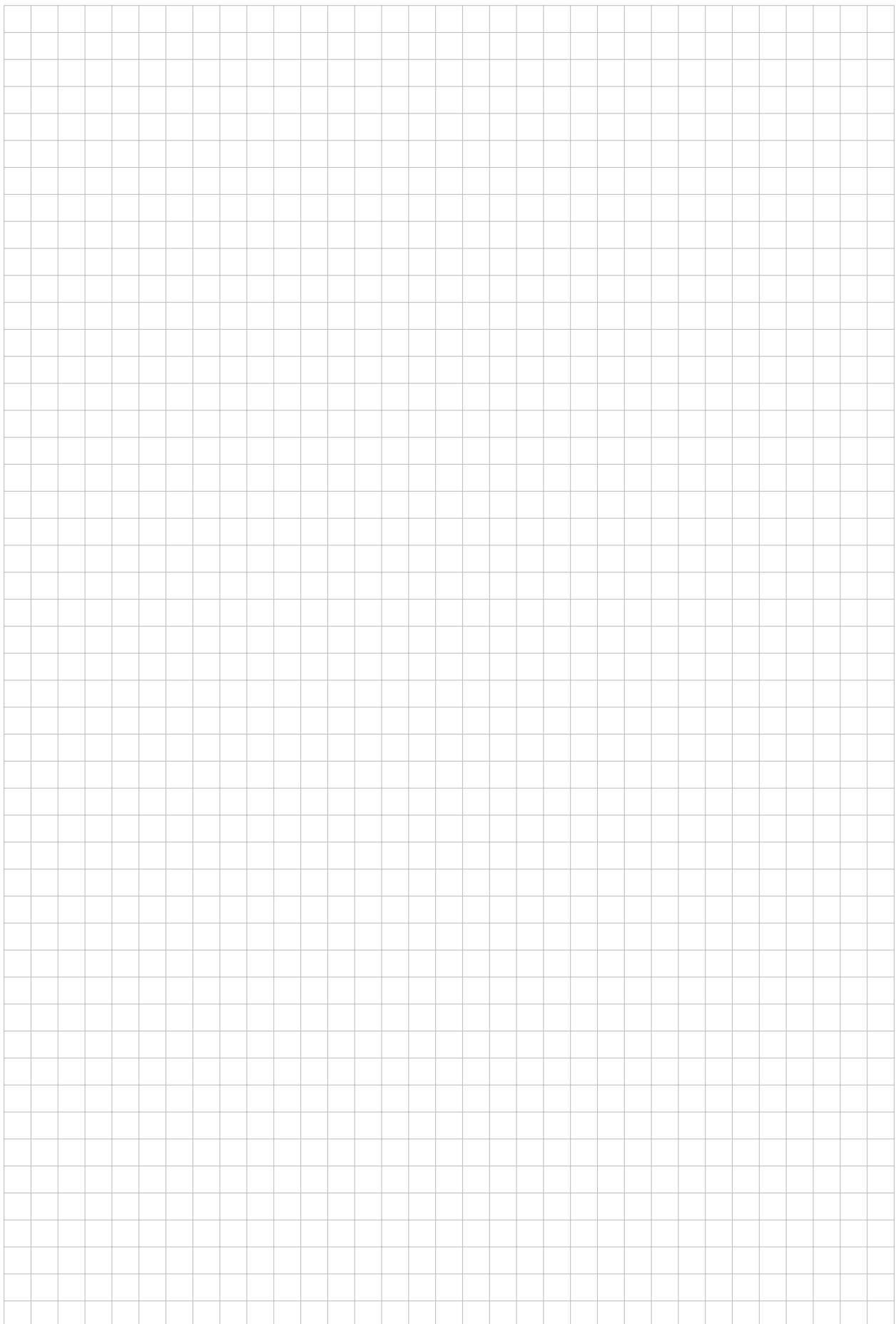


+2/10/39+





+2/11/38+





+2/12/37+

