

**EPFL****1**

Enseignant: Bossoney

Analyse 2 - CMS

17 avril 2024

Durée : 105 minutes

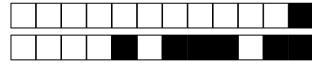
Robin des Bois

SCIPER: **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/>		



Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \cos x &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \tan x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y & \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproques:

$$\text{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\text{Arsinh}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\text{Arcosh}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\text{Artanh}x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{arccot } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\text{Arcoth}x$	$\frac{1}{1-x^2}$

**Enoncé**

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Si $P(\cosh(t), \sinh(t))$, $t \in \mathbb{R}$ sont des points sur l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ et $x > 0$, alors

Question 1 (2 point)

$Q\left(\frac{d}{dt} \cosh(t), \frac{d}{dt} \sinh(t)\right)$ sont des points sur l'hyperbole d'équation

- $y^2 - x^2 = 1$ et $x > 0$.
- $x^2 - y^2 = 1$ et $y > 0$.
- $y^2 - x^2 = 1$ et $y > 0$.
- $x^2 - y^2 = 1$ et $x > 0$.

Question 2 (2 point)

$Q\left(\frac{d}{dt} \cosh(-t), \frac{d}{dt} \sinh(-t)\right)$ sont des points sur l'hyperbole d'équation

- $x^2 - y^2 = 1$ et $x < 0$.
- $y^2 - x^2 = 1$ et $y < 0$.
- $y^2 - x^2 = 1$ et $x < 0$.
- $x^2 - y^2 = 1$ et $y < 0$.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit la fonction

$$\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto f(x) := (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Alors:

Question 3 (2 point)

- $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{e}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$.
- la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas.

Question 4 (2 point)

- la limite de $f(x)$ n'existe pas en 0^+ .
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e$.

**Enoncé**

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit le polynôme de Taylor

$$P_{f(x),0,3}(x) = 1 + 2x - 3x^2.$$

associé à la fonction f . Alors:

Question 5 (2 point)

- $f^{(3)}(0) = -2.$
- On ne peut pas connaître la valeur de $f^{(3)}(0).$
- $f^{(3)}(0) = 2.$
- $f^{(3)}(0) = 0.$

Question 6 (2 point)

- $P_{f(-x),0,3}(x) = -1 - 2x - 3x^2.$
- $P_{f(2x),0,3}(x) = 1 + 4x - 6x^2.$
- $P_{f(x^2),0,6}(x) = 1 + 2x^2 - 3x^4.$
- $2P_{f(x),0,3}(x) = 1 + 4x - 6x^2.$



Deuxième partie, questions de type ouvert

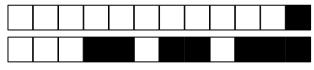
Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

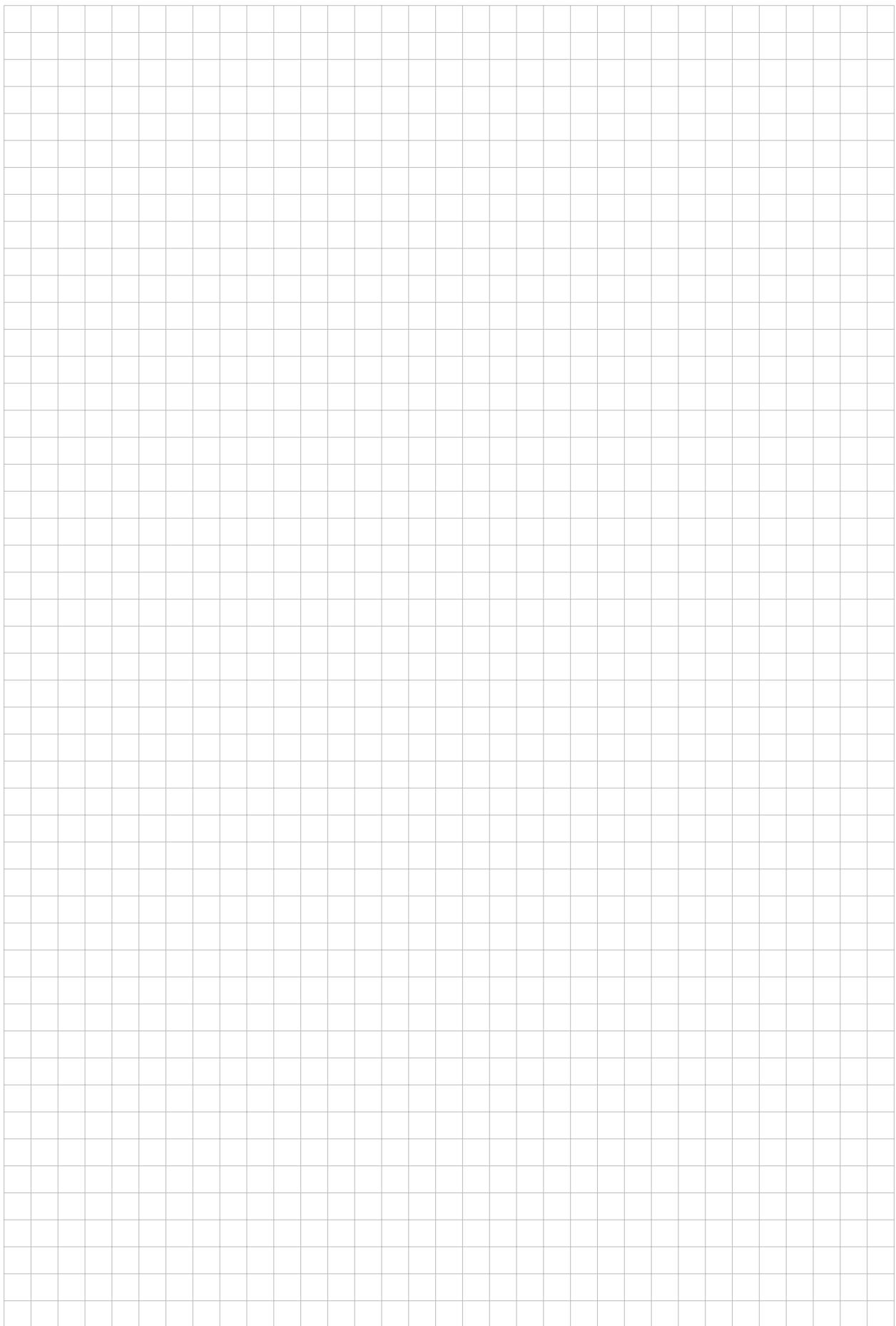
<input type="checkbox"/> .5	<input type="checkbox"/> .5	<input type="checkbox"/> .5	<input type="checkbox"/> .5	
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4

Résoudre du système:

$$\begin{cases} \text{Arch}^2(x) + \text{Arch}(x)\text{Arsh}(y) = 2, \\ \text{Arch}(x)\text{Arsh}(y) + \text{Arsh}^2(y) = 2. \end{cases}$$

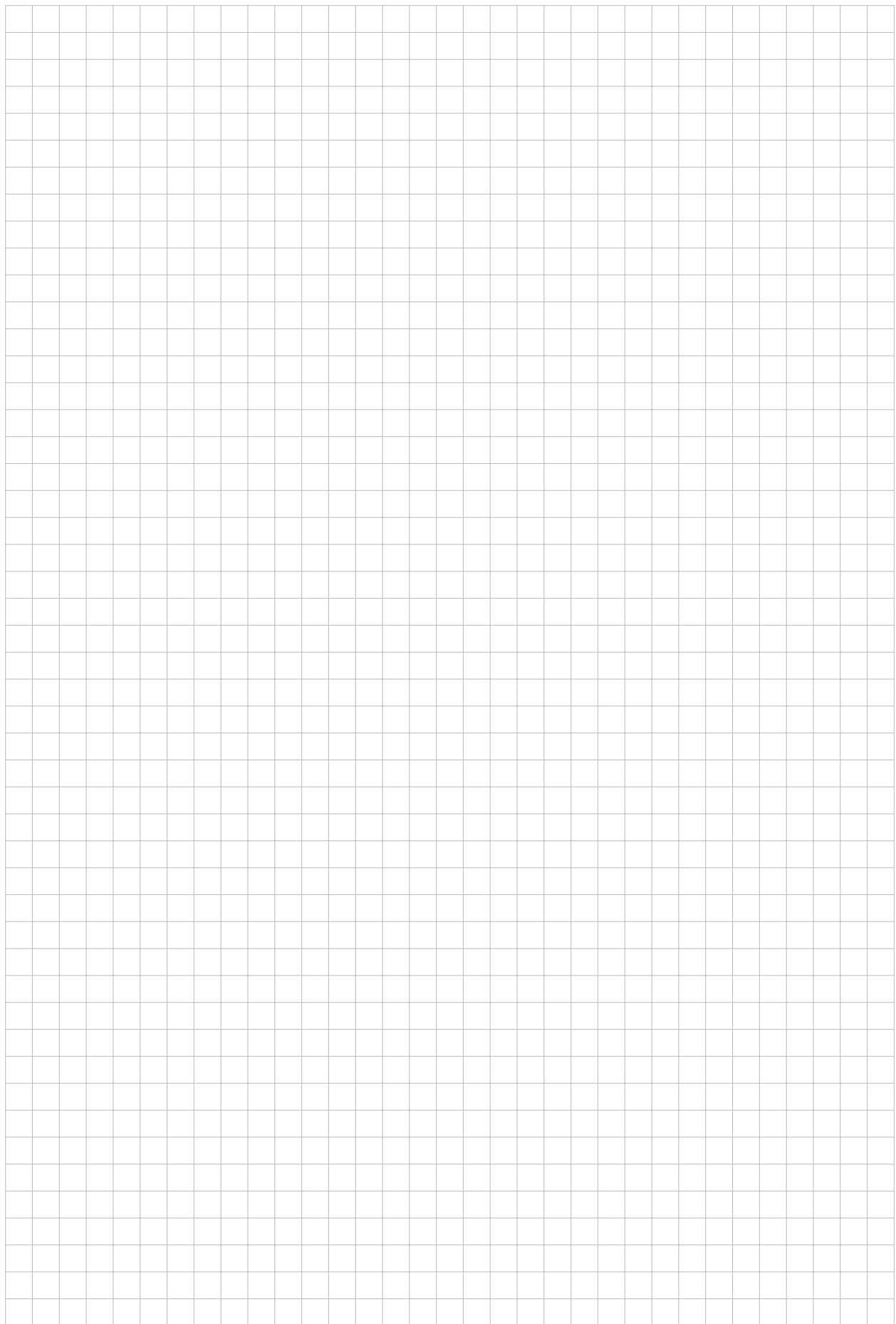


+1/6/55+





+1/7/54+





Question 8: Cette question est notée sur 4 points.

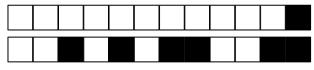
<input type="checkbox"/>	.5							
<input type="checkbox"/> 0		<input type="checkbox"/> 1		<input type="checkbox"/> 2		<input type="checkbox"/> 3		<input type="checkbox"/> 4

Calculer le polynôme de taylor de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ autour de $x_0 = 8$ à l'ordre 2. Calculer le terme de correction et estimer l'erreur faite pour $x = 9$.

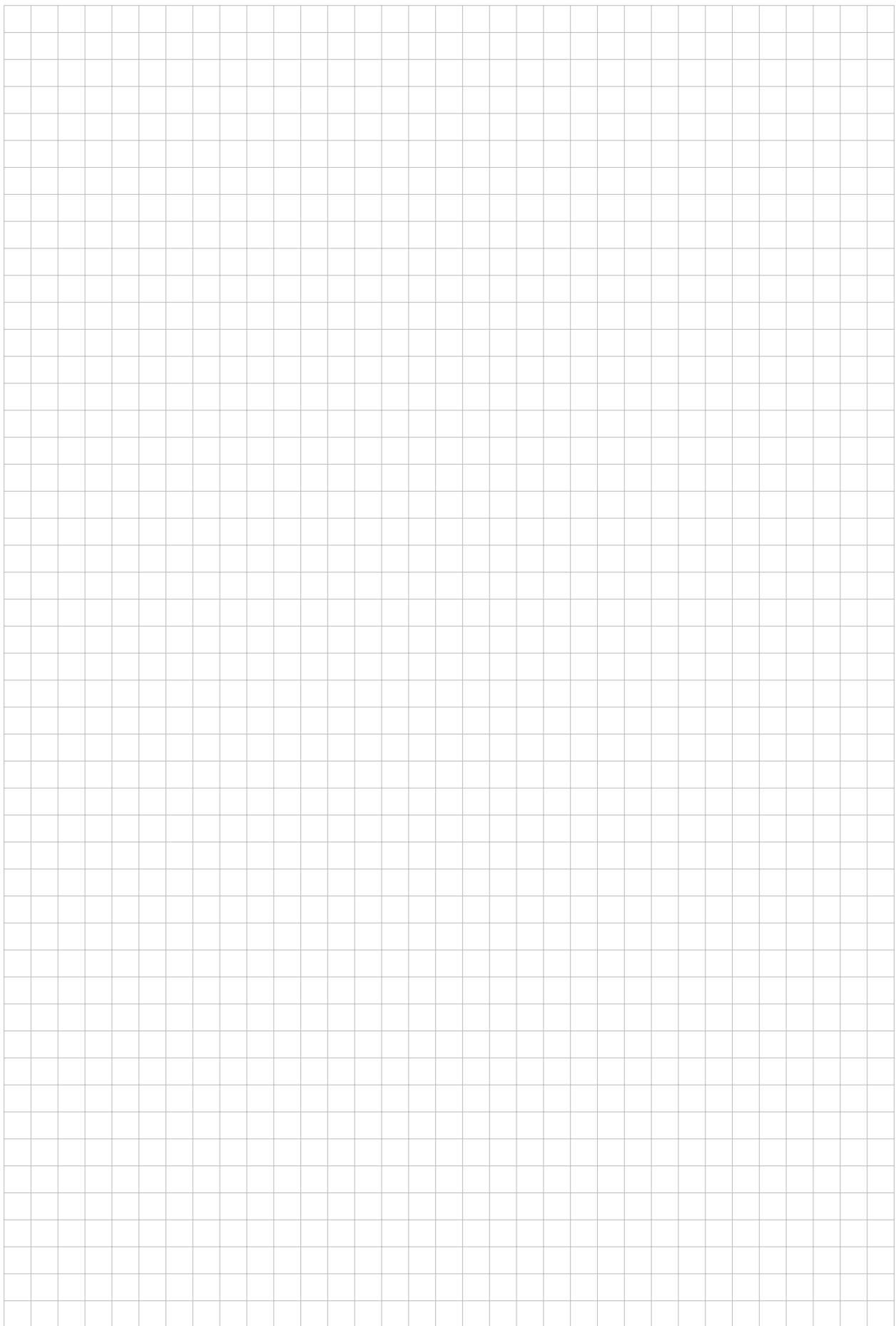


+1/9/52+



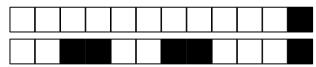


+1/10/51+





+1/11/50+



+1/12/49+

**EPFL**

Enseignant: Bossoney

Analyse 2 - CMS

17 avril 2024

Durée : 105 minutes

2

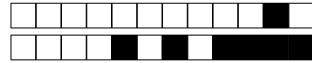
Marianne

SCIPER: **888888**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/>		



Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \cos x &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \tan x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y & \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproques:

$$\text{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\text{Arsinh}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\text{Arcosh}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\text{Artanh}x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{arccot } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\text{Arcoth}x$	$\frac{1}{1-x^2}$

**Enoncé**

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Si $P(\cosh(t), \sinh(t))$, $t \in \mathbb{R}$ sont des points sur l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ et $x > 0$, alors

Question 1 (2 point)

$Q\left(\frac{d}{dt} \cosh(-t), \frac{d}{dt} \sinh(-t)\right)$ sont des points sur l'hyperbole d'équation

- $x^2 - y^2 = 1$ et $x < 0$.
- $x^2 - y^2 = 1$ et $y < 0$.
- $y^2 - x^2 = 1$ et $x < 0$.
- $y^2 - x^2 = 1$ et $y < 0$.

Question 2 (2 point)

$Q\left(\frac{d}{dt} \cosh(t), \frac{d}{dt} \sinh(t)\right)$ sont des points sur l'hyperbole d'équation

- $x^2 - y^2 = 1$ et $x > 0$.
- $y^2 - x^2 = 1$ et $y > 0$.
- $x^2 - y^2 = 1$ et $y > 0$.
- $y^2 - x^2 = 1$ et $x > 0$.

Enoncé

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit la fonction

$$\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto f(x) := (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Alors:

Question 3 (2 point)

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e$.
- la limite de $f(x)$ n'existe pas en 0^+ .
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Question 4 (2 point)

- $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$.
- la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{e}{2}$.

**Enoncé**

Toutes les questions sur cette page se rapportent au même énoncé.

Soit le polynôme de Taylor

$$P_{f(x),0,3}(x) = 1 + 2x - 3x^2.$$

associé à la fonction f . Alors:

Question 5 (2 point)

- $f^{(3)}(0) = 2$.
- $f^{(3)}(0) = 0$.
- On ne peut pas connaître la valeur de $f^{(3)}(0)$.
- $f^{(3)}(0) = -2$.

Question 6 (2 point)

- $2P_{f(x),0,3}(x) = 1 + 4x - 6x^2$.
- $P_{f(x^2),0,6}(x) = 1 + 2x^2 - 3x^4$.
- $P_{f(-x),0,3}(x) = -1 - 2x - 3x^2$.
- $P_{f(2x),0,3}(x) = 1 + 4x - 6x^2$.



Deuxième partie, questions de type ouvert

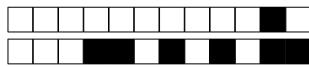
Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 4 points.*

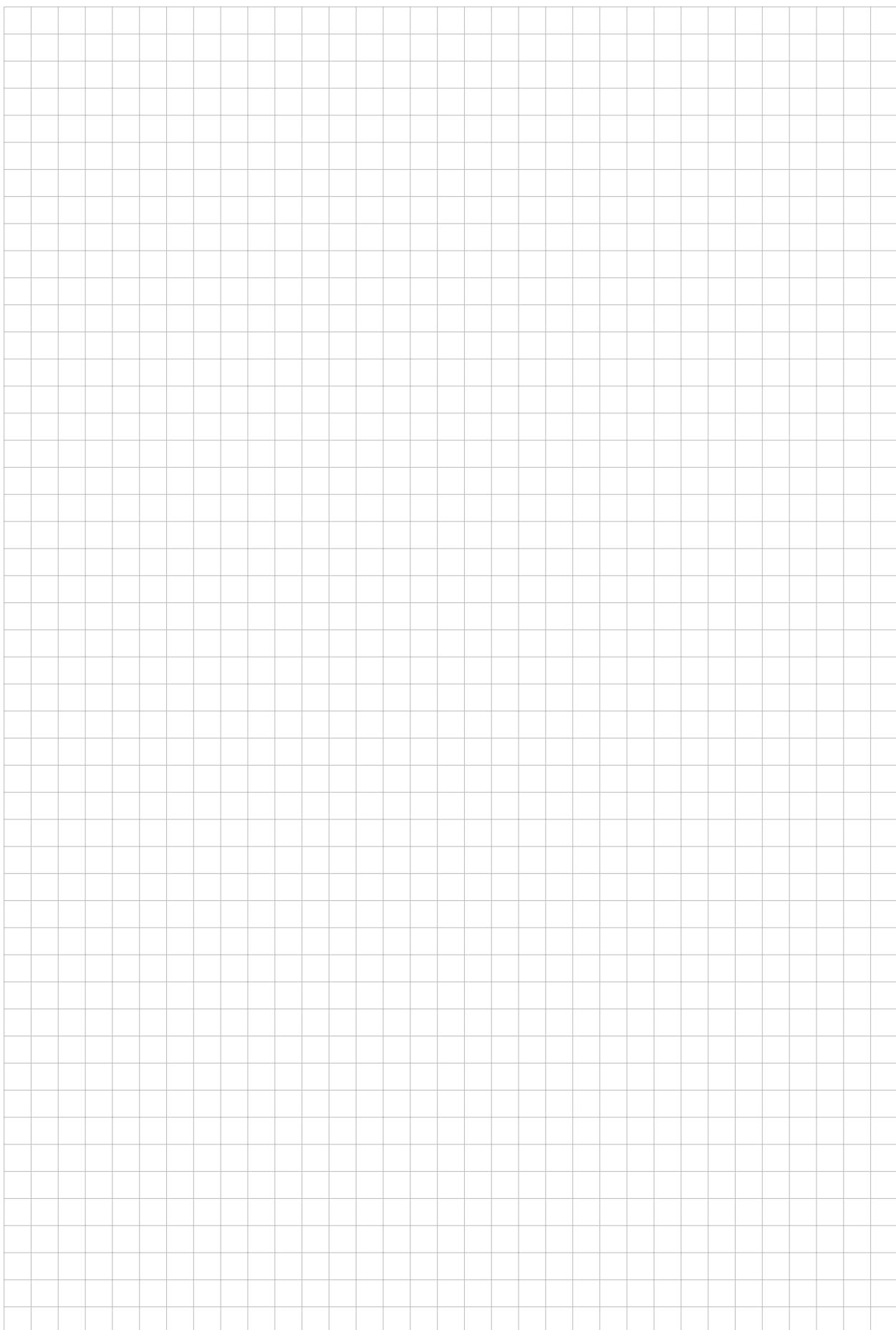
.5 .5 .5 .5
 0 1 2 3 4

Résoudre du système:

$$\begin{cases} \text{Arch}^2(x) + \text{Arch}(x)\text{Arsh}(y) = 2, \\ \text{Arch}(x)\text{Arsh}(y) + \text{Arsh}^2(y) = 2. \end{cases}$$

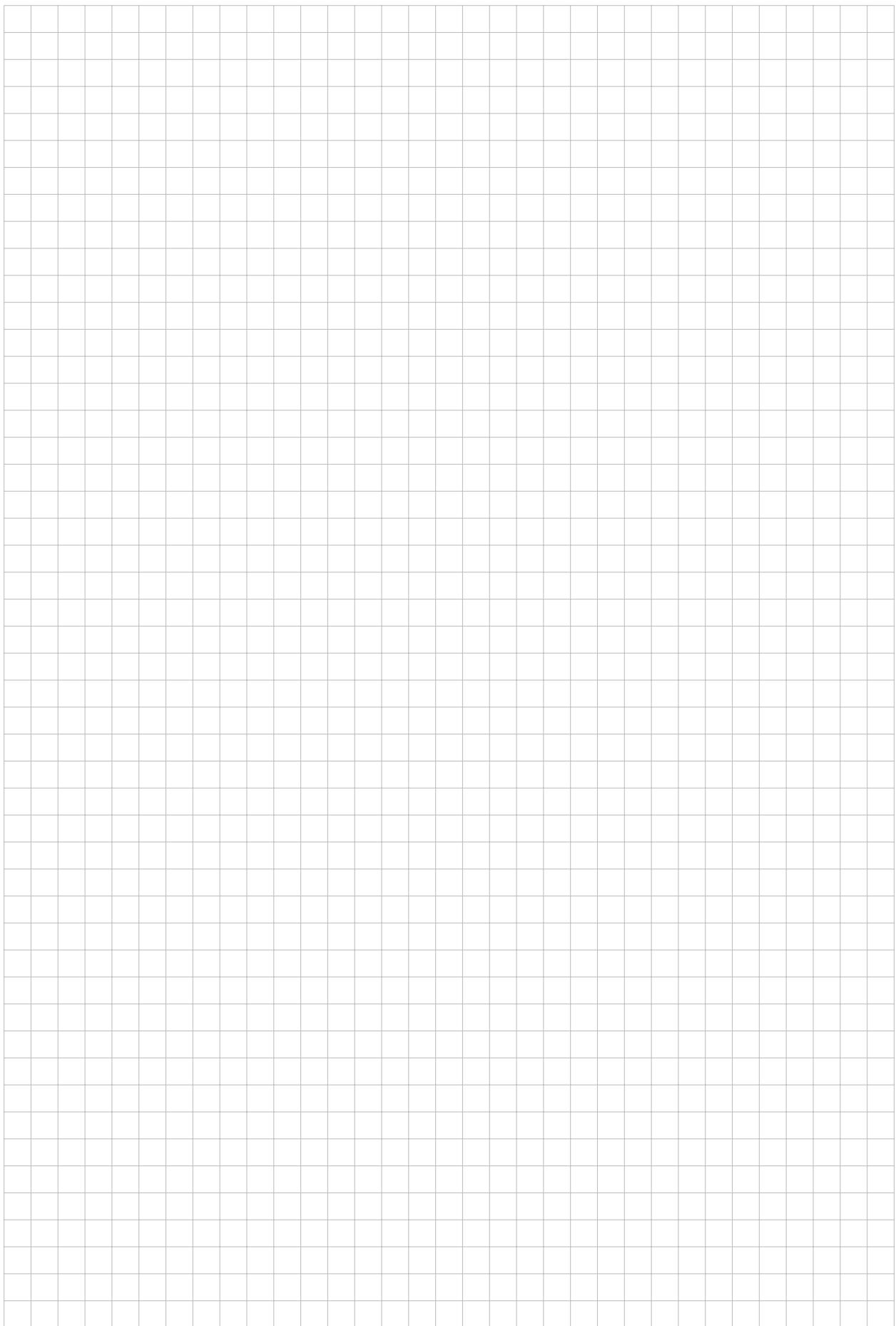


+2/6/43+





+2/7/42+

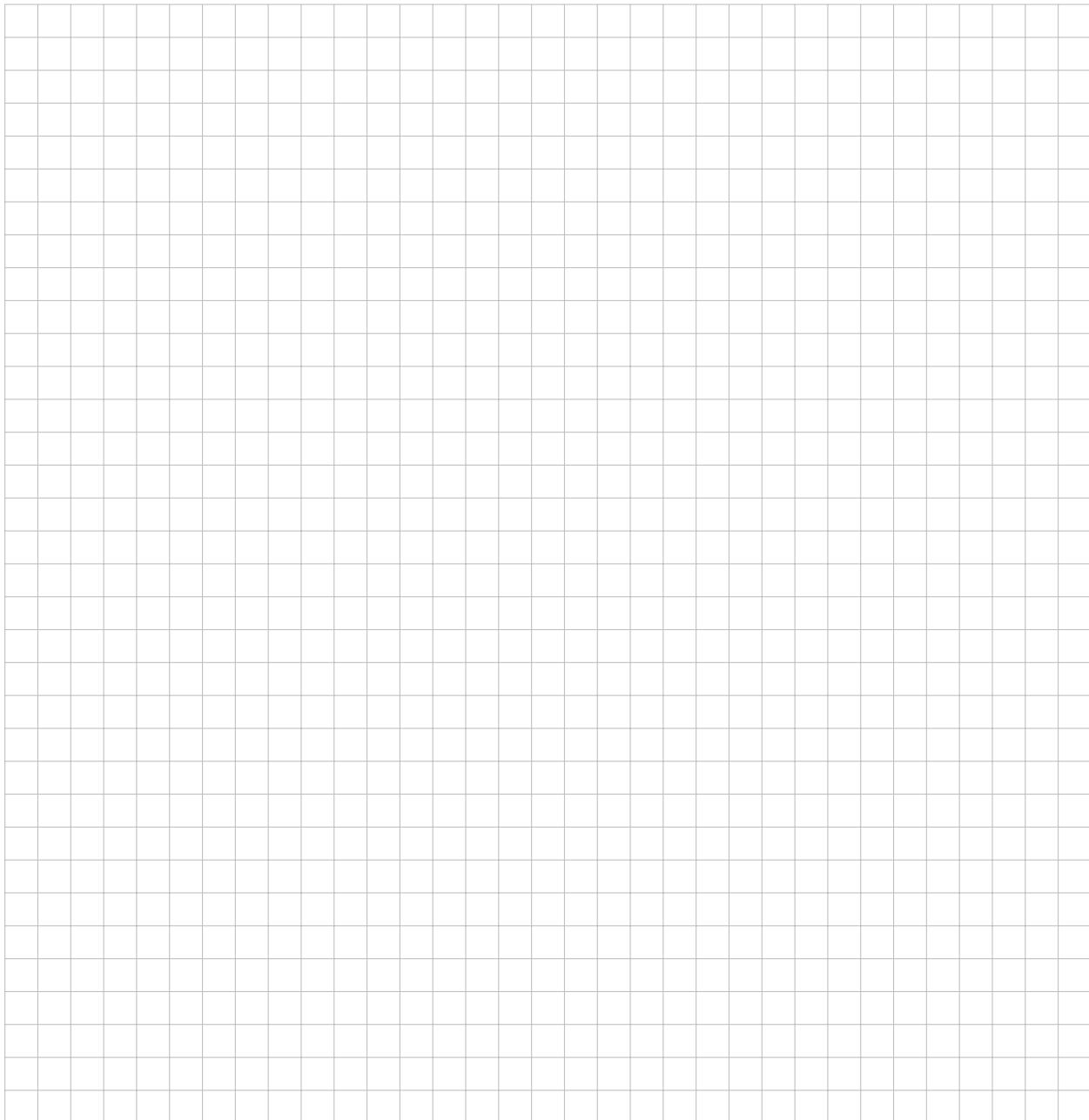




Question 8: Cette question est notée sur 4 points.

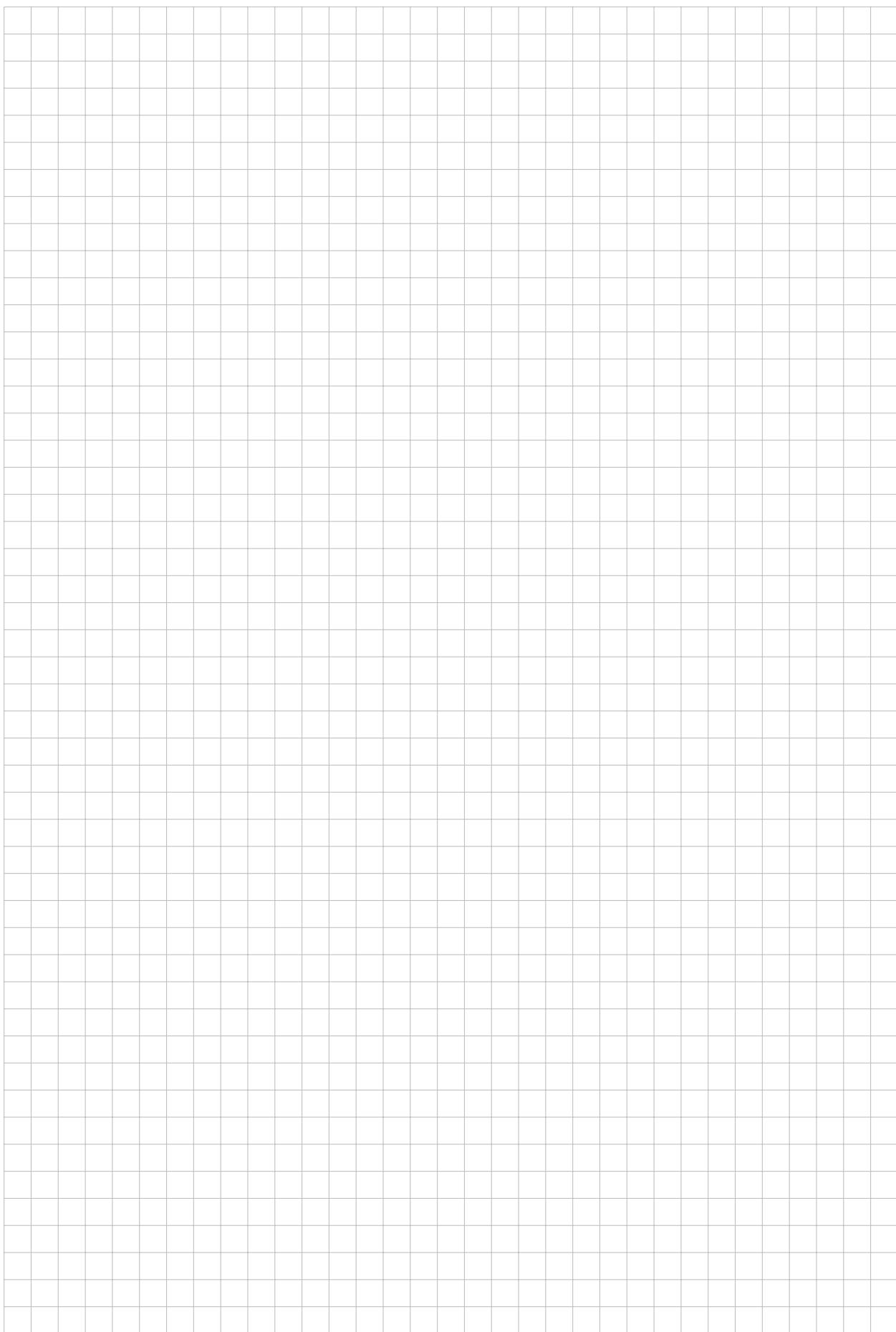
<input type="checkbox"/>	.5							
<input type="checkbox"/> 0		<input type="checkbox"/> 1		<input type="checkbox"/> 2		<input type="checkbox"/> 3		<input type="checkbox"/> 4

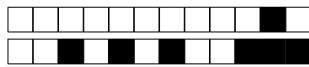
Calculer le polynôme de taylor de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ autour de $x_0 = 8$ à l'ordre 2. Calculer le terme de correction et estimer l'erreur faite pour $x = 9$.



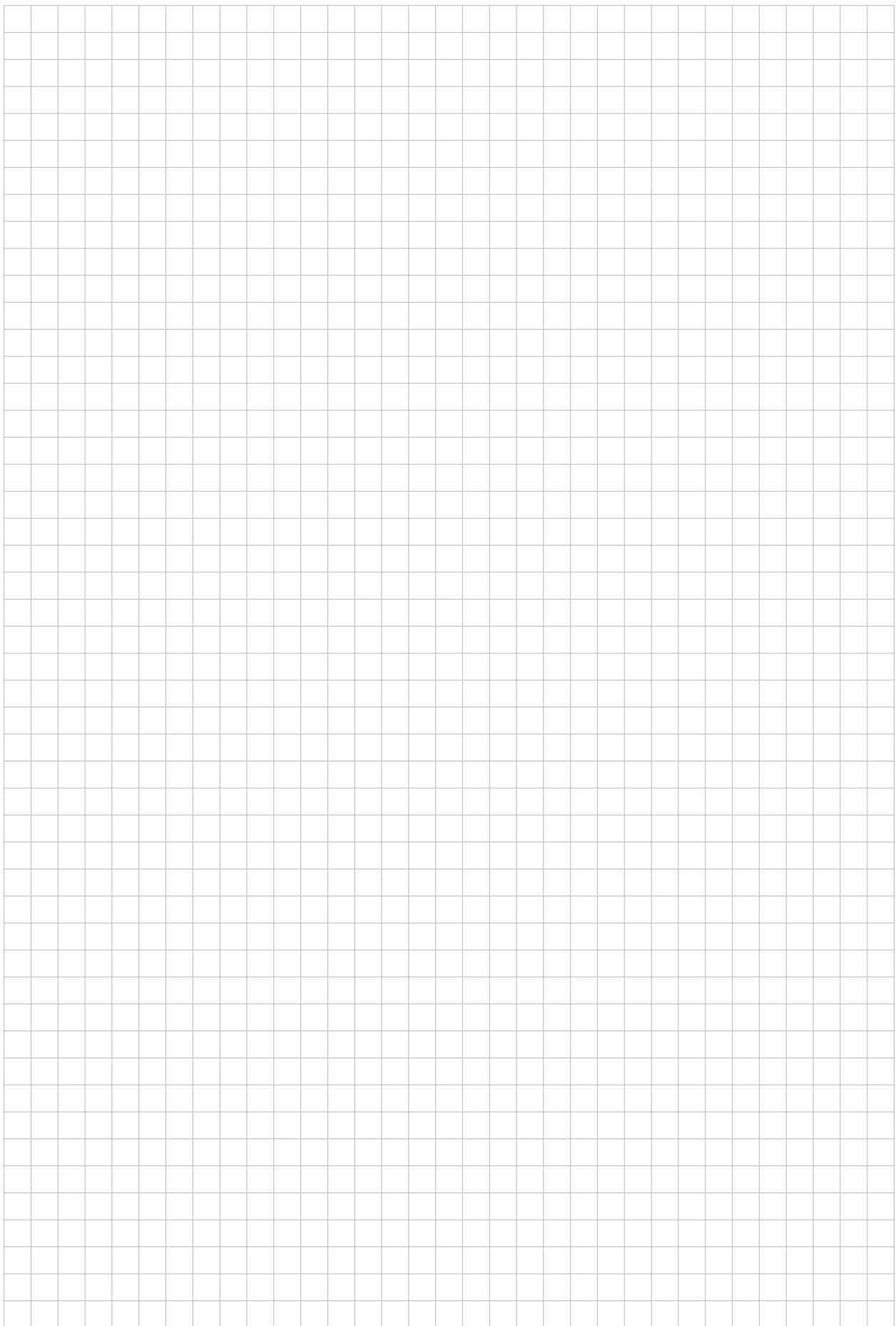


+2/9/40+



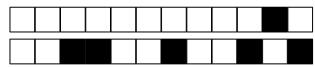


+2/10/39+





+2/11/38+



+2/12/37+