

Série 21

Nombres complexes: factorisation

1. Résoudre l'équation polynomiale $-x^3 - \frac{3i}{2}x^2 + x + \frac{i}{2} = 0$ sachant qu'elle admet un nombre imaginaire pur comme solution.
2. Déterminer le polynôme P_3 (troisième degré) vérifiant les quatre conditions suivantes :
 - (a) $P_3(1) = 0$,
 - (b) $P_3(i) = i - 1$,
 - (c) le produit des racines de P_3 vaut $1 + i$,
 - (d) la somme des racines non réelles de P_3 est égale à $1 + i$.
3. Factoriser les polynômes suivants sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$:
 - (a) $X^6 + X^4 + X^2 + 1$.
 - (b) $1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + 16X^4$.
4. Décomposer le polynôme suivant en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = X^4 - 2X^2 \cos(\alpha) + 1.$$
5. Soit le polynôme

$$P(X) = (X^2 - X + 1)^2 + 1.$$
 - (a) Vérifier que i est une racine de $P(X)$.
 - (b) Factoriser alors $P(X)$ en irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de $a, b \in \mathbb{R}_+$ le polynôme

$$P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$$
 est-il le carré d'un polynôme? Factoriser $P(X)$ dans ce(s) cas sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Solutions

S1 $x_1 = -i, x_2 = \frac{\sqrt{7}-i}{4}, x_3 = -\frac{\sqrt{7}+i}{4}$

S2 $P_3(z) = \frac{1}{2}(1+i)z^3 - (1+2i)z^2 + \frac{1}{2}(1+5i)z - i$
ou

$$P_3(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - (1+i)$$

S3 (a) $\prod_{k \in \{1,2,3,5,6,7\}} (X - e^{i\frac{k\pi}{4}}).$

(b) $16 \prod_{k \in \{0,1,3,4\}} (X - \frac{1}{2}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}).$

S4

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - e^{i\alpha/2})(X + e^{i\alpha/2})(X - e^{-i\alpha/2})(X + e^{-i\alpha/2}) \\ &= (X^2 - 2\cos(\alpha/2)X + 1)(X^2 + 2\cos(\alpha/2)X + 1). \end{aligned}$$

S5 (b)

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - i)(X - 1 + i)(X + i)(X - 1 - i) \\ &= (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2). \end{aligned}$$

S6 $P(X) = (X + \frac{1-i\sqrt{3}}{2})^2(X + \frac{1+i\sqrt{3}}{2})^2 = (X^2 + X + 1)^2$

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Est-ce que je sais ce qu'est un facteur irréductible?
2. Est-ce que je connais un facteur réductible sur \mathbb{R} sans racines réelles?
3. Suis-je en mesure de diviser un polynôme par un facteur?
4. Ai-je réussi à résoudre les problèmes proposées?
5. Est-ce que j'arrive à identifier des facteurs complexes conjugués?
6. Est-ce que j'ai fait le lien entre le TFA et la réduction?