

## Série 20

## Nombres complexes: division euclidienne

1. Parmi les équations pour  $z \in \mathbb{C}$  suivantes, déterminer si elle sont polynômiales ou non:

(a)  $1 = \frac{1}{\bar{z}z},$

(c)  $1 = \frac{1}{2-\bar{z}z},$

(b)  $z^3 - 2z + 1 = 0,$

(d)  $\bar{z}z + \bar{z} + z = 0.$

2. Calculer la division euclidienne de

(a)  $P(X) = X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$  par  $Q(X) = X^2 + 3X - 1,$

(b)  $P(X) = X^4 + 4iX^3 + 9X^2 + 27iX + 38$  par  $Q(X) = -X^2 - iX - 7.$

3. (a) Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $R(X)$  le reste de la division euclidienne de  $P(X)$  par  $(X - a)(X - b)$ . Exprimer  $R(X)$  en fonction de  $P(a)$  et  $P(b)$ .  
 (b) Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $R(X)$  le reste de la division euclidienne de  $P(X)$  par  $(X - a)^2$ . Exprimer  $R(X)$  en fonction de  $P(a)$  et  $P'(a)$ .

4. Calculer le reste de la division euclidienne de

$$P(X) = (X + 1)^n - X^n - 1$$

par

(a)  $Q(X) = X^2 + 3X + 2.$

(b)  $Q(X) = X^2 - 2X + 1.$

5. Soient  $P_1(X), P_2(X), Q(X)$  des polynômes et soient  $R_1(X), R_2(X)$  les restes de la division de  $P_1(X)$  par  $Q(X)$  et de  $P_2(X)$  par  $Q(X)$  respectivement. Parmi les affirmations suivantes, déterminer si elles sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

(a) Le reste de la division de  $P_1(X) + P_2(X)$  par  $Q(X)$  est  $R_1(X) + R_2(X)$ .

(b) Le reste de la division de  $P_1(X) \times P_2(X)$  par  $Q(X)$  est  $R_1(X) \times R_2(X)$ .

(c) Le reste de la division de  $P_1(X)$  par  $Q^2(X)$  est le reste de la division de  $R_1(X)$  par  $Q(X)$ .

(d) Le reste de la division de  $P_1(X) \times P_2(X)$  par  $Q(X)$  est le reste de la division de  $R_1(X) \times R_2(X)$  par  $Q(X)$ .

6. (a) Le polynôme  $(X - 1)^2$  divise-t-il  $X^n - X^{n-1} - X + 1$ ?  
 (b) Le polynôme  $(X - 1)^3$  divise-t-il  $2X^n + (n - n^2)X^2 + (2n^2 - 2n)X + n - n^2 - 2$ ?

---

## Solutions

- S1 (a) non. (c) non.  
 (b) oui. (d) non.
- S2 (a)  $D(X) = X^2 + 2X + 7, \quad R(X) = 0.$   
 (b)  $D(X) = -X^2 - 3iX - 5, \quad R(X) = iX + 3.$
- S3 (a)  $R(X) = \frac{P(b)-P(a)}{b-a}(X-a) + P(a).$   
 (b)  $R(X) = P'(a)(X-a) + P(a).$
- S4 (a)  $R(X) = ((-2)^n + 2(-1)^{n+1})(X+1) + (-1)^{n+1} - 1.$   
 (b)  $R(X) = n(2^{n-1} - 1)(X-1) + 2^n - 2.$
- S5 (a) Vrai.  
 (b) Faux.  
 (c) Faux.  
 (d) Vrai.
- S6 (a) oui.  
 (b) non.

---

## Questionnaire d'auto-évaluation

1. Est-ce que je sais faire un tableau pour une division euclidienne?
2. Est-ce que je comprends que le reste a un degré inférieur au diviseur?
3. Suis-je en mesure d'identifier une équation polynômiale?
4. Ai-je réussi à résoudre les problèmes proposées?
5. Est-ce que je connais une équation dans  $\mathbb{C}$  sans solutions?