

Série 20

Nombres complexes: division euclidienne

- 1.** Parmi les équations pour $z \in \mathbb{C}$ suivantes, déterminer si elle sont polynômiales ou non:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad 1 = \frac{1}{\bar{z}z}, & \text{(c)} \quad 1 = \frac{1}{2-\bar{z}z}, \\ \text{(b)} \quad z^3 - 2z + 1 = 0, & \text{(d)} \quad \bar{z}z + \bar{z} + z = 0. \end{array}$$

- 2.** Calculer la division euclidienne de

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad P(X) = X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7 \text{ par } Q(X) = X^2 + 3X - 1, \\ \text{(b)} \quad P(X) = X^4 + 4iX^3 + 9X^2 + 27iX + 38 \text{ par } Q(X) = -X^2 - iX - 7. \end{array}$$

- 3.**
- (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $R(X)$ le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$. Exprimer $R(X)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
 - (b) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $R(X)$ le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)^2$. Exprimer $R(X)$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

- 4.** Calculer le reste de la division euclidienne de

$$P(X) = (X + 1)^n - X^n - 1$$

par

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad Q(X) = X^2 + 3X + 2. & \text{(b)} \quad Q(X) = X^2 - 2X + 1. \end{array}$$

- 5.** Soient $P_1(X), P_2(X), Q(X)$ des polynômes et soient $R_1(X), R_2(X)$ les restes de la division de $P_1(X)$ par $Q(X)$ et de $P_2(X)$ par $Q(X)$ respectivement. Parmi les affirmations suivantes, déterminer si elles sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

- (a) Le reste de la division de $P_1(X) + P_2(X)$ par $Q(X)$ est $R_1(X) + R_2(X)$.
 - (b) Le reste de la division de $P_1(X) \times P_2(X)$ par $Q(X)$ est $R_1(X) \times R_2(X)$.
 - (c) Le reste de la division de $P_1(X)$ par $Q^2(X)$ est le reste de la division de $R_1(X)$ par $Q(X)$.
 - (d) Le reste de la division de $P_1(X) \times P_2(X)$ par $Q(X)$ est le reste de la division de $R_1(X) \times R_2(X)$ par $Q(X)$.
- 6.**
- (a) Le polynôme $(X - 1)^2$ divise-t-il $X^n - X^{n-1} - X + 1$?
 - (b) Le polynôme $(X - 1)^3$ divise-t-il $2X^n + (n - n^2)X^2 + (2n^2 - 2n)X + n - n^2 - 2$?

Solutions

- S1 (a) non. (c) non.
 (b) oui. (d) non.
- S2 (a) $D(X) = X^2 + 2X + 7$, $R(X) = 0$.
 (b) $D(X) = -X^2 - 3iX - 5$, $R(X) = iX + 3$.
- S3 (a) $R(X) = \frac{P(b)-P(a)}{b-a}(X - a) + P(a)$.
 (b) $R(X) = P'(a)(X - a) + P(a)$.
- S4 (a) $R(X) = ((-2)^n + 2(-1)^{n+1})(X + 1) + (-1)^{n+1} - 1$.
 (b) $R(X) = n(2^{n-1} - 1)(X - 1) + 2^n - 2$.
- S5 (a) Vrai.
 (b) Faux.
 (c) Faux.
 (d) Vrai.
- S6 (a) oui.
 (b) non.
-

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Est-ce que je sais faire un tableau pour une division euclidienne?
2. Est-ce que je comprends que le reste a un degré inférieur au diviseur?
3. Suis-je en mesure d'identifier une équation polynomiale?
4. Ai-je réussi à résoudre les problèmes proposées?
5. Est-ce que je connais une équation dans \mathbb{C} sans solutions?