Série 19

Nombres complexes: représentations

1. Trouver le module et l'argument de :

(a) $z = 5 + 12i$;

(b) $z = \sqrt{3} + i$;

(c) $z = \dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$.

2. Mettre sous forme trigonométrique et polaire les nombres complexes suivants :

(a) $z = -2$;

(b) $z = 7i - \dfrac{3}{i}$;

(c) $z = -1 + i$;

(d) $z = \sqrt{3} + i$;

(e) $z = \dfrac{1}{1 - i}$;

(f) $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. Mettre sous la forme $a + bi$:

(a) $z = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

(b) $z = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$;

(c) $z = \pi e^{i(\pi - t)}$;

(d) $z = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$;

(e) $z = \dfrac{\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

4. Calculer les racines carrées de :

(a) $z = 9i$;

(b) $z = 5 - 12i$;

(c) $z = \dfrac{1}{1 - i} + \dfrac{1}{i}$.

5. Calculer les racine 4$^{\text{ième}}$ de

(a) $z = \sqrt{8} + i\sqrt{8}$.

(b) $z = i$.

6. Former un triangle équilatéral $P_0P_1P_2$ avec

$$P_0(1, 1), \quad P_1(3, 3)$$

en utilisant le calcul dans $\mathbb{C}$.

7. En utilisant le calcul complexe, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \cos n\theta = \sum_{0 \le 2l \le n} (-1)^l \binom{n}{2l} \cos^{n-2l}\theta \sin^{2l}\theta, \\ \sin n\theta = \sum_{0 \le 2l+1 \le n} (-1)^l \binom{n}{2l+1} \cos^{n-2l-1}\theta \sin^{2l+1}\theta. \end{cases}$$

C'est la **formule de Moivre**.

Solutions

S1 (a) $|z| = 13$, $\varphi = \text{Arcsin}\frac{12}{13}$.
(b) $|z| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
(c) $|z| = 1$, $\varphi = 2\alpha$.

S2 (a) $2\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = 2e^{i\pi}$.
(b) $10\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right) = 10e^{i\frac{\pi}{2}}$.
(c) $\sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
(d) $2\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
(e) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
(f) $3\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right) = 3e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

S3 (a) $-5i$.
(b) $\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
(c) $-\pi\cos t + i\pi\sin t$.
(d) $-4i$
(e) $(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

S4 (a) $z_\pm = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
(b) $z_\pm = \pm(3-2i)$.
(c) $z_\pm = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\sqrt{2}+1} + \mp i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$.

S5 (a) $S = \{\sqrt{2}e^{i\pi/16},\ \sqrt{2}e^{i9\pi/16},\ \sqrt{2}e^{i17\pi/16},\ \sqrt{2}e^{i25\pi/16}\}$.
(b) $S = \left\{e^{i\pi/8},\ e^{i5\pi/8},\ e^{i9\pi/8},\ e^{i13\pi/8}\right\}$.

S6 $P_2(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Est-ce que je visualise la représentation de Gauss?

2. Est-ce que je vois le lien entre polynômes de Taylor et la représentation polaire?

3. Suis-je capable de passer d'une représentation à l'autre?

4. Ai-je réussi à résoudre les problèmes proposées?

5. Est-ce que j'arrive à faire des rotations dans le plan en utilisant la multiplication complexe?

6. Est-ce que j'ai compris pourquoi un nombre complexe possède n racines $n^{\text{ième}}$?